



义务教育教科书

数学

九年级 下册

SHUXUE



青島出版社
QINGDAOCHUBANSHE



义 务 教 育 教 科 书

数 学

九年级 下册



书 名 义务教育教科书 数学（九年级下册）
主 编 展 涛
出版发行 青岛出版社
社 址 青岛市海尔路 182 号（266061）
本社网址 <http://www.qdpub.com>
责任编辑 刘海波 戴振宇
美术编辑 路渊源
制 版 济南汇海科技有限公司
印 刷 昌邑市新华印刷有限公司
出版日期 2014 年 7 月第 2 版 2021 年 12 月第 16 次印刷
开 本 16 开（787mm×1092mm）
印 张 11.75
字 数 170 千
书 号 ISBN 978-7-5436-3786-3
定 价 10.88 元
编校质量、盗版监督服务电话 4006532017 （0532）68068638

新学期寄语

亲爱的同学：

时间过得真快！转眼之间，已经进入九年级下学期。

在九年义务教育阶段的最后一学期，你打算怎样学习数学？

函数是你的老朋友，早在七年级，就结识了函数，在八（下）又学习过一次函数及其图象。在本书中，你将在此基础上，更进一步地认识函数，通过研究两种常见的函数——反比例函数、二次函数和它们的图象，探索它们的性质，熟悉它们的应用，积累活动经验，从而进一步体会研究函数的基本方法，感悟数学模型和数形结合的思想。

在本书中，你将学习频数和频数分布的意义，会画频数直方图，利用频数直方图解释数据中蕴涵的信息。你还将通过一些大量的重复试验，了解事件的概率并尝试用频率估计概率，并学习一些简单的概率计算。

通过本书，你还将进一步认识几种简单的几何体，了解直棱柱、圆锥、圆柱的侧面展开图，了解中心投影、平行投影和正投影，会画几种简单几何体的三视图，能判断简单物体的视图，并会根据视图描述简单的几何体，进一步发展你的空间观念。

数学是研究数量关系和空间形式的科学，数学与人类的发展和社会的进步息息相关。学习数学不仅使你掌握必要的数学知识与技能，为你的未来生活、工作和学习打下良好的基础，还可使你的思维能力和创新意识都得到培养和发展。

在学习数学的过程中，充满着快乐也充满着挑战。相信你会在独立思考、合作交流的氛围中，不怕困难，勤于思考，勇于探索，敢于创新，胜利地完成本学期的义务教育阶段的数学学习任务。

目 录

第 5 章 对函数的再探索 2

5.1 函数与它的表示法 4

5.2 反比例函数 14

5.3 二次函数 27

5.4 二次函数的图象和性质 31

5.5 确定二次函数的表达式 43

5.6 二次函数的图象与一元二次方程 46

5.7 二次函数的应用 50

回顾与总结 58

综合与实践 实际问题与分段函数模型 62

第 6 章 事件的概率 70

6.1 随机事件 72

6.2 频数与频率 75

6.3 频数直方图 78

6.4 随机现象的变化趋势 87

6.5 事件的概率 92

6.6 简单的概率计算 101

6.7 利用画树状图和列表计算概率 112

回顾与总结 119

综合与实践 质数的分布 124

第7章 空间图形的初步认识	128
7.1 几种常见的几何体	130
7.2 直棱柱的侧面展开图	134
7.3 圆柱的侧面展开图	143
7.4 圆锥的侧面展开图	149
回顾与总结	154
第8章 投影与识图	158
8.1 中心投影	160
8.2 平行投影	164
8.3 物体的三视图	171
回顾与总结	181

第 5 章 对函数的再探索

内容提要

- 函数与它的表示法
- 反比例函数
- 二次函数
- 二次函数的图象和性质
- 确定二次函数的表达式
- 二次函数的图象与一元二次方程
- 二次函数的应用





情境导航

这是一幅某城市广场夜景的照片，喷出的道道水柱组成一条条美丽的曲线，这些曲线是抛物线。一般地，二次函数的图象也都是抛物线。

- (1) 你知道如何根据二次函数的解析式画出它的图象吗？
- (2) 你知道如何根据二次函数的图象研究函数的性质吗？

5.1 函数与它的表示法



观察与思考

你还记得什么是函数吗？

在现实生活中，函数关系是处处存在的. 你知道表示函数关系的方法通常有哪几种吗？

(1) 黄河的一条支流上的某水文站记录了该支流当天 9 时至 21 时河水水位的变化情况 (图 5-1). 你从图中能获取哪些信息？

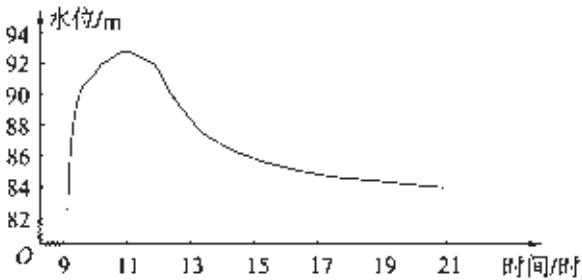


图 5-1

在这个实际问题中，有哪两个变量？这两个变量之间是函数关系吗？如果是，函数关系是用哪种方法表示的？你能从图 5-1 中看出自变量是在哪个范围内取值的吗？与同学交流.

(2) 一根弹簧原长 15 cm，在弹簧一端所受到的拉力不超过 40 N 的弹性限度内，每增加 10 N 的拉力，弹簧就伸长 2 cm，请你填写下表：

拉力 x/N	0	10	20	30	35	40
弹簧长度 y/cm						

在这个实际问题中，弹簧长度 y 与拉力 x 之间是函数关系吗？如果是，函数关系是用哪种方法表示的？其中，自变量是在哪个范围内取值的？

(3) 物体从 490 m 的高度处自由下落，物体距地面的高度 $h(\text{m})$ 与物体下落的时间 $t(\text{s})$ 之间的关系满足表达式 $h = 490 - 4.9t^2$.

在这个实际问题中，物体距地面的高度 h 与物体下落的时间 t 之间是函数关系吗？如果是，它们之间的函数关系是用哪种方法表示的？其中，自变量是在哪个范围内取值的？

(4) 上述问题(1)(2)(3)中, 分别是用图象法、列表法及解析法来表示两个变量之间的函数关系的. 你还能分别举出用上述三种方法表示函数的例子吗? 你体会表示函数关系的三种方法各有哪些优点和不足? 与同学交流.

图象法的优点是直观, 能够形象地反映出当自变量的值变化时函数值的变化趋势, 所以常用来研究函数的性质和变化趋势, 不足之处是不能准确地由已知自变量的值求出函数值; 列表法的优点是已知表中给出的部分自变量的值时, 可以不通过计算直接查出对应的函数值, 不足之处是只能表示出自变量的有限个离散值及其函数值; 解析法的优点是全面、准确、方便, 对于自变量在可以取值的范围内任取一个确定的值, 都可以通过表达式计算求出它的函数值, 不足之处是不够形象直观, 而且并不是每一个函数都可写出它的表达式, 例如上面问题(1)中的函数关系就无法用一个表达式表示. 因此在研究函数时, 往往将三种表示方法联合运用, 互相补充. 过去学习一次函数时, 就是联合运用三种方法, 研究它的特征、图象和性质的.

(5) 利用问题(2)表中给出的数据, 画出 y 与 x 的函数图象. 你发现弹簧的长度 y 是拉力 x 的一次函数吗? 为什么? 写出 y 与 x 的表达式.

如图5-2, 它的图象是以 $A(0, 15)$ 和 $B(40, 23)$ 为端点的一条线段. 由此可设函数的表达式为 $y = kx + 15$ (k 是常数, $0 \leq x \leq 40$).

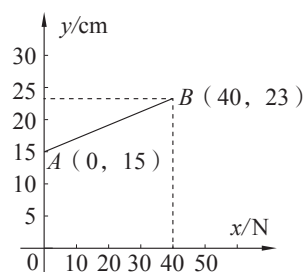


图 5-2

将 $x = 40$, $y = 23$ 代入上式, 得

$$23 = 40k + 15,$$

$$\text{解得 } k = \frac{1}{5}.$$

所以这个函数的表达式为 $y = \frac{1}{5}x + 15$ ($0 \leq x \leq 40$).

(6) 你会用描点法画出问题(3)中的函数图象吗?

由问题(3)的实际意义和函数表达式 $h = 490 - 4.9t^2$, 先确定自变量 t 可以取值的范围是 $0 \leq t \leq 10$.

根据函数的表达式和自变量可以取值的范围, 列出下面的表格:

t/s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h/m	490	485.1	470.4	445.9	411.6	367.5	313.6	249.9	176.4	93.1	0

以时间 t 为横轴、高度 h 为纵轴画出直角坐标系（根据该问题的实际背景，横轴和纵轴选取不同的单位长度），然后以上表中的每一个有序实数对 (t, h) 为坐标，在直角坐标系中描出相应的各点，用一条平滑的曲线按自左向右的顺序顺次连接它们，便得函数 $y = 490 - 4.9t^2$ ($0 \leq t \leq 10$) 的图象. 它是一段曲线（图 5-3）.

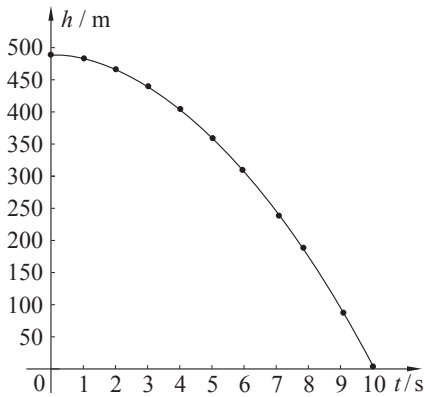


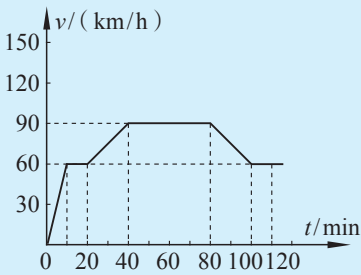
图 5-3



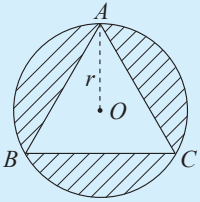
练习

1. 一辆汽车在一段行驶过程中，速度 v 随行驶时间 t 变化的情况如图所示.
- (1) 在这个问题中，速度 v 与行驶时间 t 之间的函数关系是用哪种方法表示的？
 - (2) 这个过程中汽车共行驶了多少分钟？在哪个时间段内，汽车行驶速度最大？最大速度是多少？
 - (3) 在哪个时间段内汽车的行驶速度逐渐增加？在哪个时间段内行驶速度逐渐减少？在哪个时间段内汽车按匀速运动行驶？按匀速运动行驶时，速度是多少？
 - (4) 根据图象，填写下表：

t / min	0	20	40	60	80	100	120
$v / (\text{km/h})$							



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，正三角形 ABC 内接于圆 O ，设圆的半径为 r . 你能写出图中阴影部分的面积 S 与半径 r 之间的函数关系吗？你认为用哪种方法表示它们之间的函数关系比较方便？



观察与思考

进一步研究本节开始时的问题(1)(2)(3), 思考下列问题:

(1) 在这些问题中, 自变量可以取值的范围分别是什么?

(2) 在这些问题中, 对于自变量在可以取值的范围内每取一个确定的值, 另一个变量的值是否唯一确定? 你是如何看出来的?

在这些问题中, 对于自变量每取一个确定的值, 另一个变量都有唯一确定的值和它对应.



(3) 由此你对函数有了哪些进一步的认识? 与同学交流.

在同一个变化过程中, 有两个变量 x, y . 如果对于变量 x 在可以取值的范围内每取一个确定的值, 变量 y 都有唯一确定的值与它对应, 那么就说 y 是 x 的函数.

(4) 观察图 5-4 ①~④, 你认为它们所表示的变量 y 与变量 x 之间的对应关系都是函数关系吗? 如果 y 是 x 的函数, 请指出自变量的取值范围; 如果 y 不是 x 的函数, 请说明理由.

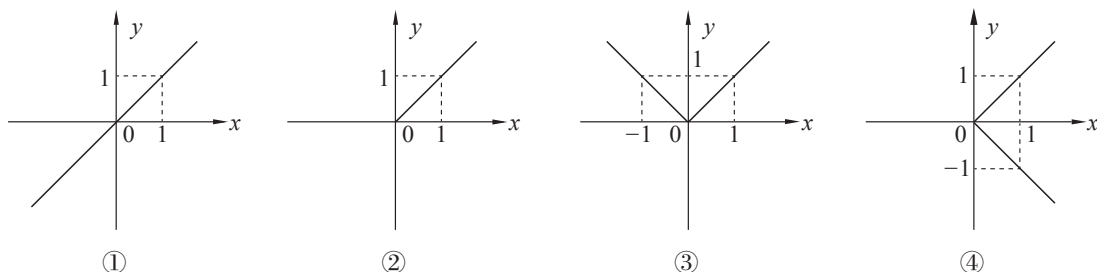


图 5-4

(5) 设 x 是非负数, 如果 y 是 x 的算术平方根, 当 x 变化时, y 是 x 的函数吗? 如果 y 是 x 的负的平方根呢? 如果 y 是 x 的平方根呢? 如果是, 分别写出它们之间的函数表达式, 指出自变量可以取值的范围, 并用描点法画出它的图象.

例1 求下列函数中自变量 x 可以取值的范围:

$$(1) y = 3x - 2;$$

$$(2) y = \frac{1}{2x+1};$$

$$(3) y = \sqrt{x-1};$$

$$(4) y = \frac{x}{\sqrt{3-5x}}.$$

解 (1) 当 x 取任意实数时, $3x - 2$ 都有意义. 所以, 自变量 x 可以取值的范围是全体实数;

(2) 函数有意义的条件是分式的分母 $2x + 1 \neq 0$, 即 $x \neq -\frac{1}{2}$. 所以, 自变量 x 可以取值的范围是 $x \neq -\frac{1}{2}$ 的实数;

(3) 函数有意义的条件是被开方式 $x - 1 \geq 0$, 即 $x \geq 1$. 所以, 自变量 x 可以取值的范围是 $x \geq 1$;

(4) 函数有意义的条件是分式分母中的被开方式 $3 - 5x > 0$, 即 $x < \frac{3}{5}$. 所以, 自变量 x 可以取值的范围是 $x < \frac{3}{5}$.

对于用解析法表示的函数表达式, 为确定其自变量可以取值的范围, 必须使函数表达式有意义. 在解决实际问题时, 还要使实际问题有意义.



挑战自我



如果函数 $y = \frac{1}{x^2 - 2x + m}$ 中自变量 x 可以取值的范围是全体实数, 你能确定 m 的取值范围吗? 与同学交流.



练习

1. 求下列函数中自变量 x 可以取值的范围:

$$(1) y = \frac{3x-1}{2};$$

$$(2) y = \frac{x}{x^2-4x+3};$$

(3) $y = \sqrt{6-2x}$;

(4) $y = \sqrt{3x+2}$.

2. 用 18 cm 的铁丝围成一个等腰三角形, 写出底边长 y (cm) 与一腰腰长 x (cm) 之间的函数表达式, 指出自变量 x 可以取值的范围, 并画出它的图象.
3. 油箱中有油 300 L, 油从管道中匀速流出, 1 小时流完. 写出油箱中剩余的油量 Q (L) 与油流出时间 t (s) 之间的函数表达式, 指出自变量 t 可以取值的范围, 并画出它的图象.

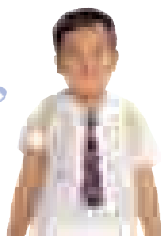


观察与思考

为了鼓励节约用电, 某市按以下标准对居民用户收取电费: 当一户居民月用电量不超过 $200 \text{ kW} \cdot \text{h}$ 时, 按 $0.5 \text{ 元/kW} \cdot \text{h}$ 收费. 当一户居民月用电量超过 $200 \text{ kW} \cdot \text{h}$ 时, 超过部分按 $0.7 \text{ 元/kW} \cdot \text{h}$ 收费.

(1) 设用电量为 $x \text{ kW} \cdot \text{h}$, 电费为 y 元, 你能按上述标准写出一户居民的每月应缴电费 y (元) 与 x ($\text{kW} \cdot \text{h}$) 之间的函数表达式吗?

上面的收费标准是分段收费的, 当 $0 \leq x \leq 200$ 时, $y = 0.5x$; 当 $x > 200$ 时, $y = 0.5 \times 200 + 0.7 \times (x - 200) = 0.7x - 40$.



函数表达式是

$$y = \begin{cases} 0.5x, & 0 \leq x \leq 200; \\ 0.7x - 40, & x > 200. \end{cases}$$



(2) 你能用描点法画出这个函数的图象吗? 与同学交流.

(3) 图 5-5 是所画出 y 与 x 的函数图象, 你发现它的图象具有什么特征?



它是由线段 OA 和以 A 为端点的一条射线组成的.

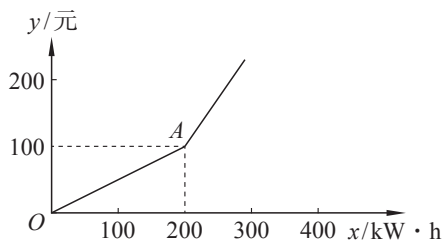


图 5-5

(4) 当某户居民月用电量是 $190 \text{ kW} \cdot \text{h}$ 时, 电费是多少? 如果月用电量是 $210 \text{ kW} \cdot \text{h}$ 时呢? 分别在图象上用 B, C 表示出相应的点.

像这样, 函数关系是分段给出的, 我们把它叫做**分段函数**.

(5) 图 5-5 中点 A 是图象中线段 OA 的一个端点, 又是射线 AC 的端点, 因此, 它是图象上的一个分段点. 你发现分段点与图象上其他点的区别是什么?



在图 5-5 中, 随着自变量的增加, 当图象上的点经过分段点时, 函数的对应关系发生了变化: 分段点左边函数关系满足 $y=0.5x$, 右边满足 $y=0.7x-40$.

例2 某校住校生放学后到学校锅炉房水箱

打水, 每人接水 2 L . 开始时水箱中有水 96 L , 两个龙头同时放水, 经过 2 min 后, 水箱内的余水量为 80 L . 此时其中一个龙头因故障而关闭. 如果前后两人接水间隔时间忽略不计, 且不发生泼洒, 水箱内的余水量 $y(\text{L})$ 与放水时间 $x(\text{min})$ 的函数图象如图 5-6 所示. 已知放水 4 min 时, 水箱中的余水量为 72 L .

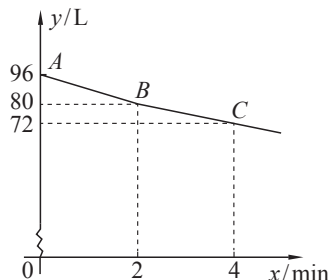


图 5-6

图 5-6 所示. 已知放水 4 min 时, 水箱中的余水量为 72 L .

- (1) 写出水箱的余水量 y 与放水时间 x 之间的函数表达式;
- (2) 前 15 位同学接水共用了多少时间?

解 (1) 由题意和图 5-6 知, y 与 x 之间的函数是分段函数. 其中线段 AB 表示两个水龙头同时放水时 y 与 x 的对应关系.

设这段函数的表达式是 $y = k_1x + b_1$, 将 $(0, 96), (2, 80)$ 代入该式, 得

$$\begin{cases} b_1 = 96, \\ 2k_1 + b_1 = 80. \end{cases}$$

解得 $k_1 = -8, b_1 = 96$.

所以这段函数的表达式是 $y = -8x + 96, 0 \leq x \leq 2$.

同样地将 $(2, 80), (4, 72)$ 代入 $y = k_2x + b_2$, 可以求出当只有一个水龙头放水时, y 与 x 之间函数的表达式为 $y = -4x + 88$.

令 $y = 0$, 得 $x = 22(\text{min})$. 所以当只有一个水龙头放水时, 函数表达式是

$$y = -4x + 88, 2 < x \leq 22.$$

由此得到 y 与 x 之间的函数表达式是

$$y = \begin{cases} -8x + 96, & 0 \leq x \leq 2; \\ -4x + 88, & 2 < x \leq 22. \end{cases}$$

(2) 前 15 位同学共接水 $2 \times 15 = 30$ (L), 当第 15 位同学接完水时水箱余水量为 $96 - 30 = 66 < 80$. 由图 5-6 可以看出, 此时只有一个水龙头放水. 将 $y = 66$ 代入 $y = -4x + 88$, 得 $66 = -4x + 88$, 解得 $x = 5.5$ (min).

所以, 前 15 位同学接水共用时间 5.5 min.

你还能利用例 2 的情境, 提出一个可以解决的数学问题吗? 与同学交流.



挑战自我

天泉村服装厂今年前 5 个月中生产服装的总件数 S (件) 与时间 t (月) 的函数关系如图 5-7 所示. 在下面的四个说法中, 你能判断哪个是正确的吗?

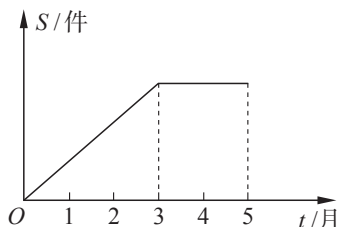


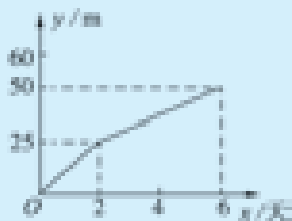
图 5-7

- (A) 1 月至 3 月每月生产总件数逐月增加, 4, 5 两月每月生产总件数逐月减少
- (B) 1 月至 3 月每月生产总件数逐月增加, 4, 5 两月停止生产
- (C) 1 月至 3 月每月生产总件数逐月增加, 4, 5 两月每月生产总件数与 3 月持平
- (D) 1 月至 3 月每月生产总件数不变, 4, 5 两月停止生产



练习

- 某工程队开挖一段河渠, 施工进度 y (m) 与施工时间 x (天) 之间的函数关系如图所示. 根据图象所提供的信息, 解答下列问题:



(第 1 题)

- (1) 开挖到 25 m 时, 用了多少时间?
- (2) 写出开工后前 6 天内 y 与 x 之间的函数表达式;
- (3) 前 2 天施工进度是每天 _____ m, 从第 3 天开始到第 6 天施工进度是每天 _____ m.



习题5.1



复习与巩固

1. 一个竖直放置的圆柱形容器，原有水面的高度为 50 cm，继续向容器内均匀注水，注水时间和容器内水面高度如下表所示：

注水时间 t/s	5	10	15	20	25	30
水面高度 h/cm	60	70	80	90	100	110

- (1) 写出 h 与 t 之间的函数表达式；
- (2) 当 $t = 18\text{ s}$ 时，水面高度是多少？

2. 某航空公司托运行李的费用 y (元) 与托运行李的质量 x (kg) 之间的函数关系如右图所示. 根据图中的信息，求免费托运行李质量的范围.

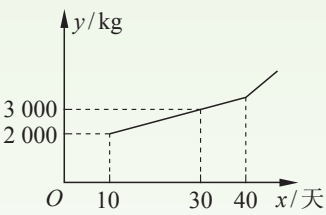


(第 2 题)

3. 小球由静止开始沿斜面向下滚动，从第 2 秒起，速度每秒都比上一秒增加 2 m/s. 当小球到达斜面底部时，小球速度达到 40 m/s.

- (1) 写出小球速度 v (m/s) 与时间 t (s) 之间的函数表达式；
- (2) 指出 t 可以取值的范围；
- (3) 当 $t = 3.5\text{ s}$ 时，求小球的速度；
- (4) 当 t 为何值时，小球的速度为 16 m/s？

4. 某实验田的农作物在生长期每天的需水量 y (kg) 与生长时间 x (天) 之间的函数关系如图所示. 这些农作物在生长期第 10 天、第 30 天的需水量分别为 2 000 kg, 3 000 kg. 在第 40 天后每天的需水量比前一天增加 100 kg.



(第 4 题)

- (1) 写出 y 与 x 之间的函数表达式；
- (2) 如果这些作物每天的需水量大于等于 4 000 kg 时需要进行人工灌溉，那么应从第几天开始进行人工灌溉？

5. 一根合金棒在不同的温度下，其长度也不同. 经测定，该合金棒长度与温度之间有表所示的关系：

温 度 / $^{\circ}\text{C}$	...	-5	0	5	10	15	20	...
长 度 /cm	...	9.995	10	10.005	10.01	10.015	10.02	...

- (1) 上表反映了合金棒长度与温度之间的函数关系，其中 _____ 是自变量，_____ 是函数；

- (2) 当温度是 10°C 时, 合金棒的长度是多少?
- (3) 如果合金棒的温度在 $50^{\circ}\text{C} \sim 150^{\circ}\text{C}$ 时, 根据表中数据推测, 此时合金棒长度应在 _____ $\text{cm} \sim$ _____ cm 的范围内;
- (4) 假设温度为 $x^{\circ}\text{C}$, 合金棒的长度是 $y \text{ cm}$, 根据表中数据, 写出 y 与 x 之间的函数表达式;
- (5) 当温度是 -20°C 或 100°C 时, 合金棒的长度分别是多少?

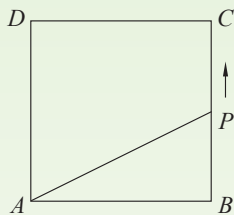
拓展与延伸

6. 小亮设计了一个计算机的计算程序, 输入数 x 和输出数 y 如下表所示:

x	1	2	3	4	5
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{5}{26}$

在这个问题中, 输出数 y 与输入数 x 之间的函数关系是用哪种方法表示的? 你能用图象法及解析法表示它们之间的函数关系吗?

7. 如图, 在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 的一边 BC 上, 有一点 P 从 B 点运动到 C 点, 设 $PB = x$, 四边形 $APCD$ 的面积为 y .



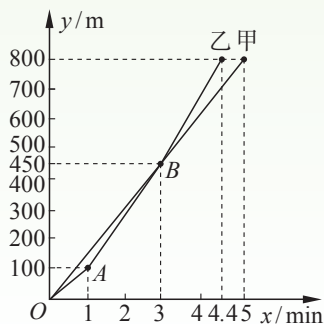
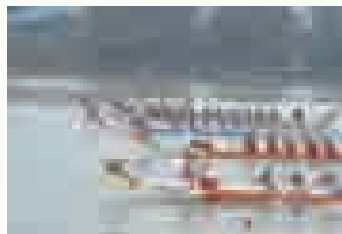
(第7题)

- (1) 写出 y 与 x 之间的函数表达式;
- (2) 指出自变量 x 可以取值的范围;
- (3) 求函数值 y 的变化范围.

探索与创新

8. 某地端午节举行龙舟比赛, 赛程为 800 m . 甲、乙两队比赛时, 路程 $y(\text{m})$ 与时间 $x(\text{min})$ 的函数关系如图所示.

- (1) 最先到达终点的是哪个队? 比另一个队提前多少时间到达?
- (2) 写出图中点 A 和点 B 的坐标, 并解释它们的实际意义;
- (3) 假设乙队在第一次加速后, 继续保持这个速度前进, 那么乙队何时到达终点?



(第8题)

5.2 反比例函数



观察与思考

思考下面的问题，并与同学交流：

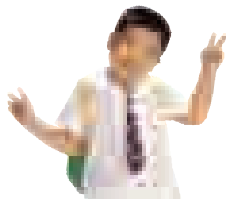
(1) 时代中学要修建一个面积为 84 m^2 的矩形花圃，写出矩形的宽 $y(\text{m})$ 与长 $x(\text{m})$ 之间的函数表达式；

(2) 甲、乙两地相距 200 km ，一辆汽车从甲地驶往乙地. 写出汽车行驶的时间 $t(\text{h})$ 与汽车的平均速度 $v(\text{km/h})$ 之间的函数表达式；

(3) 已知两个实数的乘积为 -10 . 写出其中的一个因数 q 与另一个因数 p 之间的函数表达式；

这三个问题中的函数表达式分别

$$\text{为 } y = \frac{84}{x}, t = \frac{200}{v}, q = \frac{-10}{p}.$$



(4) 想一想，上述问题中的函数表达式在形式上具有什么共同特征？

上述问题中的函数表达式都具有 $y = \frac{k}{x}$ 的形式，其中 k 为不等于 0 的常数.

一般地，形如 $y = \frac{k}{x}$ (k 是常数， $k \neq 0$) 的函数叫做反比例函数 (inverse proportional function).



对于函数 $y = \frac{k}{x}$ ，当 $k > 0$ 时，变量 y 与 x 是成反比例的量.

你能举出一些反比例函数的例子吗？与同学交流.

例1 写出下列问题中 y 与 x 之间的函数表达式,并判断是否为反比例函数.

(1) 三角形的面积为 36 cm^2 , 底边长 $y(\text{cm})$ 与该底边上的高 $x(\text{cm})$;

(2) 圆柱的体积为 60 cm^3 , 它的高 $h(\text{cm})$ 与底面的面积 $S(\text{cm}^2)$;

(3) 圆柱的体积为 60 cm^3 , 它的高 $h(\text{cm})$ 与底面的半径 $r(\text{cm})$.

解 (1) 由三角形的面积公式, 得 $\frac{1}{2}xy = 36$, 于是 $y = \frac{72}{x}$.

所以当三角形的面积为定值 36 cm^2 时, y 是 x 的反比例函数.

(2) 由圆柱的体积公式, 得 $Sh = 60$, 于是 $h = \frac{60}{S}$.

所以当圆柱的体积为定值 60 cm^3 时, h 是 S 的反比例函数.

(3) 由圆柱的体积公式得 $\pi r^2 h = 60$, 于是 $h = \frac{60}{\pi r^2}$, 由于分母上自变量 r 的次数是2, 所以, h 不是底面半径 r 的反比例函数.

例2 已知 y 是 x 的反比例函数, 且当 $x = 2$ 时, $y = -3$, 求这个反比例函数的表达式.

解 设所求的反比例函数的表达式为 $y = \frac{k}{x}$.

将 $x = 2$, $y = -3$ 代入上式, 得

$$-3 = \frac{k}{2},$$

解得 $k = -6$. 所以, 这个反比例函数的表达式为 $y = \frac{-6}{x}$.

想一想, 例2中确定常数 k 时, 运用了什么方法?



小资料

在同一个变化过程中, 如果两个变量 x 与 y 的积等于一个不为0的常数 k , 那么变量 y 是自变量 x 的反比例函数.



挑战自我

以下三个表格分别列出了三个函数的两个变量之间的部分对应值, 你认为哪个表格中的函数关系可能是反比例函数? 如果可能是, 写出可能的反比例函数表达式.

表1

x	...	1	2	3	...
y	...	3	2	1	...

表2

x	...	1	2	3	...
y	...	10	5	2	...

表3

x	...	-3	-2	-1	...
y	...	2	3	6	...



练习

- 1. 分别写出下列函数的表达式，并指出哪些是反比例函数：
 - (1) 当物体的质量 m 一定时，物体的密度 ρ 与体积 V 之间的函数关系；
 - (2) 当压力 F 一定时，压强 p 与受力面积 S 之间的函数关系；
 - (3) 当电压 U 一定时，电流 I 与电阻 R 之间的函数关系；
 - (4) 当梯形面积 S 与上底 a 一定时，梯形高 h 与下底 x 之间的函数关系.
- 2. 已知 y 与 x 成反比例，并且当 $x = 3$ 时， $y = 7$.
 - (1) 写出 y 与 x 之间的函数表达式；
 - (2) 当 $x = 1$ 时，求 y 的值；
 - (3) 当 $y = 1$ 时，求 x 的值.

我们过去曾经学习过一次函数，还记得当时是怎样研究一次函数的图象及其性质的吗？类比一次函数的研究方法，你认为应当怎样探索反比例函数的性质？



实验与探究

- (1) 反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ 的自变量 x 可以取值的范围是什么？

(2) 为了画出 $y = \frac{8}{x}$ 的图象, 需要先列表. 列表时, 应选取哪些自变量 x 的值呢?

(3) 在 $x \neq 0$ 的范围内, 选定 x 的下列值, 计算出对应的 y 值, 完成下面的表格:



必须在自变量可以取值的范围内选取 x 的值.

所取的 x 的值应有利于计算对应的 y 值和描点, 还要能整体地反映出函数的图象.



x	-8	-6	-4	-2	-1	1	2	4	6	8
y										

(4) 以表中每对 x, y 的值作为点的坐标, 在直角坐标系中描出对应的点 (图 5-8).

(5) 连线时, 所描出的相邻两点如 $A(2, 4)$ 与 $B(4, 2)$ 之间, 能不能用线段来连接? 为什么? 如果不能, 应当如何连接?

在 $2 < x < 4$ 的范围内, 取 $x = 3$, 代入 $y = \frac{8}{x}$, 得点 $C(3, \frac{8}{3})$, 因为线段 AB 的表达式为 $y = -x +$

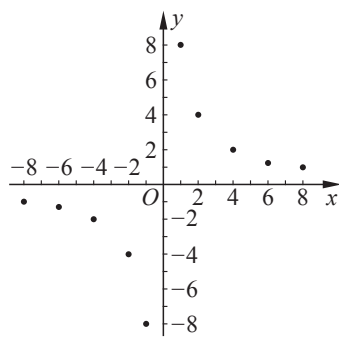


图 5-8

6, 如果将 $x = 3$ 代入该式, 得 $y = 3$. 由 $\frac{8}{3} < 3$, 可知点 C 在线段 AB 的下方. 然后再分别在 $2 < x < 3$ 和 $3 < x < 4$ 范围内各取一点, 同样可以判断这段 $y = \frac{8}{x}$ 图象上的点也都在相应线段的下方. 类似地可以判断, 当 $x > 0$ 时在其他描出的相邻的各点中, 函数 $y = \frac{8}{x}$ 的图象上的各点都分别在以它们为端点的线段的下方, 因此连线时要用向下凹的平滑曲线连接描出的各点. 而当 $x < 0$ 时, 情况相反, 连线时要用向上凸的平滑曲线连接描出的各点.

(6) 想一想, 在图 5-8 中能用线段或平滑的曲线将点 $(-1, -8)$ 与点 $(1, 8)$ 连接吗? 为什么?

(7) 用平滑的曲线按自变量由小到大的顺序顺次连接在图 5-8 中各点, 便画出函数 $y = \frac{8}{x}$ 的图象 (图 5-9).

(8) 你能用上面的方法画出反比例函数 $y = \frac{-8}{x}$ 的图象吗? 试一试 (图 5-10).

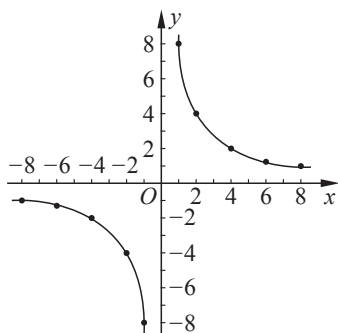


图 5-9

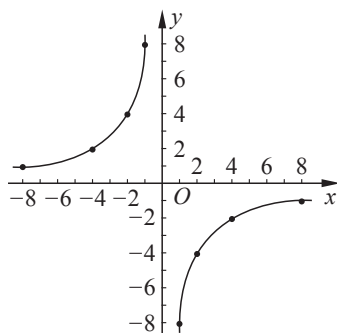
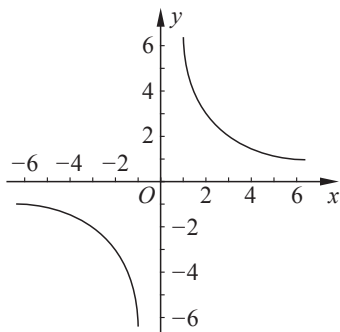
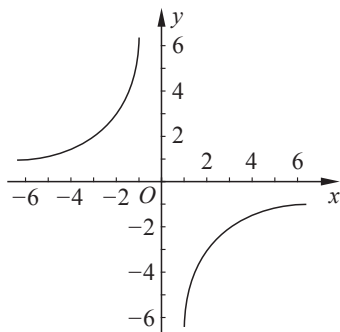


图 5-10

类似地, 可以画出反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 和 $y = \frac{-6}{x}$ 的图象 (图 5-11 ①, ②).



①



②

图 5-11



观察与思考

(1) 类比利用一次函数的图象研究其性质的过程, 你认为可以通过观察图象 (图 5-9、图 5-10、图 5-11) 的哪些特征认识反比例函数的性质?

可以通过观察这些图象的形状、位置 and 变化趋势, 归纳出函数的性质.



(2) 观察函数 $y = \frac{8}{x}$ 与 $y = \frac{-8}{x}$ 以及 $y = \frac{6}{x}$ 与 $y = \frac{-6}{x}$ 的图象, 你发现它们的形状、位置有哪些共同特征和不同点?



它们的形状基本相同, 都由两支曲线组成; 图象都不经过原点; 并且与两坐标轴都不相交. 但它们在坐标系中的位置不同, $y = \frac{8}{x}$ 和 $y = \frac{6}{x}$ 的图象在第一、三象限, $y = \frac{-8}{x}$ 和 $y = \frac{-6}{x}$ 的图象在第二、四象限.

(3) 由(2)你猜测反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象的位置是受什么因素决定的? 你能利用函数的表达式说明你的结论吗?

反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象的位置是由 k 决定的. 当 $k > 0$ 时, 图象的两个分支分别在第一、三象限; 当 $k < 0$ 时, 分别在第二、四象限. 这是因为由表达式可得 $xy = k$, 当 $k > 0$ 时, 点的横、纵坐标 x, y 同号; 当 $k < 0$ 时, x 与 y 异号.

(4) 在第一象限内, 随着图象上点的横坐标不断增大, $y = \frac{8}{x}$ 图象的变化情况是怎样的? 这说明在第一象限, 当 x 的值不断增大时, 对应的 y 值增大还是减小? 当 $x > 0$ 且 x 越来越接近 0 时图象的变化情况又是怎样的呢? 类似地, 请你讨论双曲线 $y = \frac{8}{x}$ 在第三象限内的情况.

在第一象限内, 如果在反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ 的图象上任取两点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , 且 $0 < x_1 < x_2$, 那么可以画出这两点的纵坐标 y_1, y_2 所对应的线段. 比较它们的长度, 可以发现 $y_1 > y_2$. 观察 $y = \frac{8}{x}$ 在第三象限内的分支, 也会得出同样的结论. 这说明 $y = \frac{8}{x}$ 在每一象限内, y 随 x 值的增大而减小. 由 $xy = 8$ 可知在双曲线 $y = \frac{8}{x}$ 上总有 $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$, 因此, 图象永远不会与 x 轴及 y 轴相交.

(5) 反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象的变化情况是怎样的? 反比例函数 $y = \frac{-8}{x}$ 与 $y = \frac{-6}{x}$ 呢? 由此你能归纳出当 $k > 0$ 和 $k < 0$ 时, 函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象的变化情况分

别是怎样的吗?

通过以上探索,可以得到反比例函数的以下性质:

反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象称作双曲线 (hyperbola). 当 $k > 0$ 时, 图象的两个分支分别位于第一、三象限内, 在每个象限内, y 随 x 的增大而减小; 当 $k < 0$ 时, 图象的两个分支分别位于第二、四象限内, 在每个象限内, y 随 x 的增大而增大.

(6) 通过以上探索过程, 你对运用“数形结合”思想研究函数的性质、解决与函数相关的问题有什么体会?



挑战自我

- (1) 已知 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3), P_4(x_4, y_4)$ 是反比例函数 $y = \frac{-3}{x}$ 上的四个点, 且 $x_1 < x_2 < 0 < x_3 < x_4$, 如何比较 y_1, y_2, y_3, y_4 的大小关系?
- (2) 已知点 $P_1(2, b_1), P_2(2, b_2)$ 分别在双曲线 $y = \frac{k_1}{x}$ 和 $y = \frac{k_2}{x}$ 上, 如果 $b_1 < b_2$, 如何比较 k_1, k_2 的大小关系?



练习

1. 画出函数 $y = \frac{3}{x}$ 与 $y = -\frac{3}{x}$ 的图象, 并分别说出它们的性质.
2. 将正比例函数 $y = kx$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象和性质进行对比, 填写下面的表格, 找出它们有哪些相同点和不同点:

表达式		自变量可以取值范围	图象		
			形状	位置	变化情况
$y = kx (k \neq 0)$	$k > 0$				
	$k < 0$				
$y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$	$k > 0$				
	$k < 0$				

例3 如图5-12, 已知点 C, P 的坐标分别为 $(2, y)$

和 $(x, 2\sqrt{2})$, 这两点在反比例函数 $y = \frac{12}{x}$ 的图象上. 过点 C, P 作 x 轴的垂线, 垂足分别为点 A, Q . 过点 C, P 作 y 轴的垂线, 垂足分别为点 B, R .

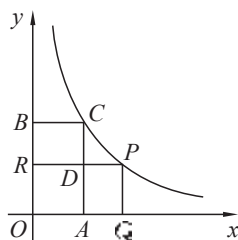


图 5-12

(1) 矩形 $OACB$ 与矩形 $OAQP$ 的面积分别是多少?

(2) 设 CA 与 PR 交于点 D , 求矩形 $OACB$ 与矩形 $OAQP$ 公共部分的面积.

解 (1) 将点 C, P 的坐标分别代入 $y = \frac{12}{x}$, 得 $y = 6, x = \frac{12}{2\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$.

所以, 点 C 的横坐标为2, 纵坐标为6, 矩形 $OACB$ 的面积为 $2 \times 6 = 12$.

同样地, P 点横坐标为 $3\sqrt{2}$, 纵坐标为 $2\sqrt{2}$. 矩形 $OAQP$ 的面积为 $3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 12$.

因此, 矩形 $OACB$ 和 $OAQP$ 的面积相等, 且都等于表达式中的常数12.

一般地, 从反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象上任一点 P , 向 x 轴和 y 轴作垂线, 以点 P 的两个垂足及坐标原点为顶点的矩形面积等于常数 $|k|$.



(2) 点 D 的横坐标等于点 C 的横坐标2, 即 $DR = 2$, 点 D 的纵坐标等于点 P 的纵坐标 $2\sqrt{2}$, 即 $DA = 2\sqrt{2}$.

所以, 矩形 $OACB$ 与矩形 $OAQP$ 的公共部分即矩形 $OADR$ 的面积为 $2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

例4 如图5-13, 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象与直线 $y = ax + b$ 相交于点 $A(-2, 3)$, $B(3, m)$. 求 k 及 a, b 的值.

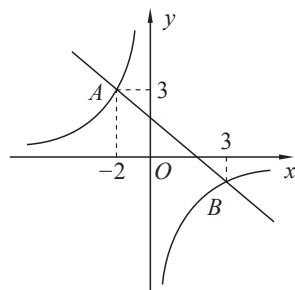


图 5-13

解 因为 $A(-2, 3)$ 在函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上, 所以 $3 = \frac{k}{-2}, k = -6$.

又因为 $B(3, m)$ 在函数 $y = \frac{-6}{x}$ 图象上, 所以 $m = \frac{-6}{3} = -2$, 因此点 B 的坐标为 $(3, -2)$.

将 $A(-2, 3)$, $B(3, -2)$ 分别代入 $y = ax + b$, 得

$$\begin{cases} 3 = -2a + b, \\ -2 = 3a + b, \end{cases}$$

解这个二元一次方程组, 得

$$\begin{cases} a = -1, \\ b = 1. \end{cases}$$



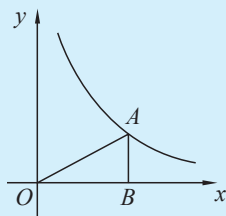
挑战自我

在同一个直角坐标系中, 反比例函数 $y = \frac{k_1}{x}$ 与 $y = \frac{k_2}{x}$ ($k_1 \neq k_2$) 的图象能相交吗? 说明理由.

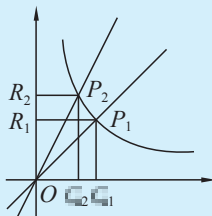


练习

1. 如图 A 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上的一点, 过 A 作 $AB \perp Ox$, 垂足为 B . 已知 $\triangle OAB$ 面积为 3, 求这个反比例函数的表达式.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图, 已知函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象与直线 $y = x$, $y = 2x$ 分别交于第一象限内的点 P_1 和 P_2 , 过 P_1 分别作 x 轴、 y 轴的垂线 P_1Q_1 , P_1R_1 , 垂足分别为 Q_1 , R_1 , 过 P_2 分别作 x 轴、 y 轴的垂线 P_2Q_2 , P_2R_2 , 垂足分别为 Q_2 , R_2 . 你能分别求出四边形 $OQ_1P_1R_1$ 和 $OQ_2P_2R_2$ 的周长并比较它们的大小吗?

例5

一辆汽车以 80 km/h 的平均速度从甲地驶往乙地, 用 5 h 到达, 然后按原路返回.

(1) 如果规定该车限速 120 km/h, 写出返回甲地所用的时间 t 与平均速度 v 的函数表达式, 并画出它的图象;

(2) 如果汽车必须在 4 h 内回到甲地, 求返程时的平均速度的范围.

解 (1) 由已知, 可求出从甲地到乙地的路程为

$$S = 80 \times 5 = 400 \text{ (km)}.$$

由 $vt = 400$ 及限速条件, 可得 t 与 v 之间函数的表达式为

$$t = \frac{400}{v}, \quad 0 < v \leq 120.$$

其图象为双曲线 $t = \frac{400}{v}$ 在第一象限内的一段 (图 5-14).

(2) 当 $t = 4$ 时,

$$v = \frac{400}{4} = 100 \text{ (km/h)}.$$

所以, 如果汽车必须在 4 h 内回到甲地, 那么 $100 \leq v \leq 120$, 即返程时平均速度的范围不低于 100 km/h、不大于 120 km/h.

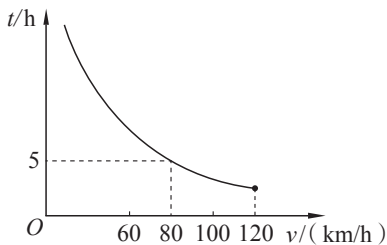


图 5-14



加油站

反比例函数是实际生活和生产中的一类问题的数学模型. 解决这类问题时, 需要先列出符合题意的函数表达式, 然后利用反比例函数的性质, 以及综合运用方程、方程组、不等式等相关知识求解.

例6

某校对教室采用药薰法进行灭蚊. 根据药品使用说明, 药物燃烧时, 室内每立方米空气中含药量 y (mg/m³) 与药物点燃后的时间 x (min) 成正比例, 药物燃尽后, y 与 x 成反比例 (图 5-15). 已知药物点燃后 8 min 燃尽, 此时室内每立方米空气中含药量为 6 mg.

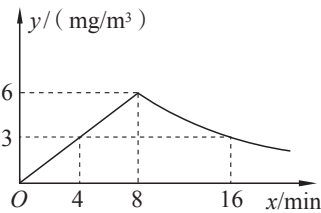


图 5-15

(1) 求药物燃烧时, y 与 x 之间函数的表达式;

(2) 求药物燃尽后, y 与 x 之间函数的表达式;

(3) 根据灭蚊药品使用说明, 当空气中每立方米的含药量低于 1.6 mg 时, 对人体是安全的. 那么从开始药薰, 至少经过多少时间, 学生才能进入教室?

(4) 根据灭蚊药品使用说明, 当每立方米空气中药量不低于 3 mg 且持续时间不低于 10 min 时, 才能有效杀灭室内的蚊虫, 那么此次灭蚊是否有效? 为什么?

解 (1) 当药物燃烧时, y 是 x 的正比例函数, 设它的表达式为

$$y = k_1 x \quad (0 \leq x \leq 8).$$

将分段点 (8, 6) 代入上式, 得 $6 = 8k_1$, 解得 $k_1 = \frac{3}{4}$.

所以, 药物燃烧时, y 与 x 之间的函数表达式为

$$y = \frac{3}{4}x, \quad 0 \leq x \leq 8.$$

(2) 当药物燃尽后, y 是 x 的反比例函数, 设它的表达式是 $y = \frac{k_2}{x} \quad (x > 8)$.

将分段点 (8, 6) 代入上式, 得 $6 = \frac{k_2}{8}$, 解得 $k_2 = 48$.

所以, 药物燃尽后, y 与 x 之间函数的表达式为

$$y = \frac{48}{x}, \quad x > 8.$$

(3) 将 $y = 1.6$ 代入 $y = \frac{48}{x}$, 得 $x = 30$ (min).

所以, 从灭蚊开始至少需经过 30 min, 学生才能进入教室.

(4) 将 $y = 3$ 分别代入 $y = \frac{3}{4}x$ 和 $y = \frac{48}{x}$, 分别得 $x_1 = 4$ 和 $x_2 = 16$ (图 5-15),

因此, 从药物点燃 4 min 到 16 min 时, 室内每立方米空气中药量超过 3 mg, 由于 $x_2 - x_1 = 16 - 4 = 12$ (min) > 10 (min), 所以此次灭蚊有效.



练习

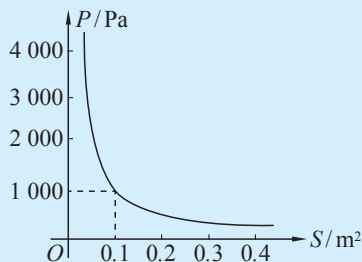
1. 在压力不变的情况下, 某物体承受的压强 P (Pa) 是它的受力面积 S (m^2) 的反比例函数, 其图象如右图所示.

(1) 求 P 与 S 之间的函数表达式;

(2) 求当 $S = 0.5 \text{ m}^2$ 时的物体承受的压强 P .

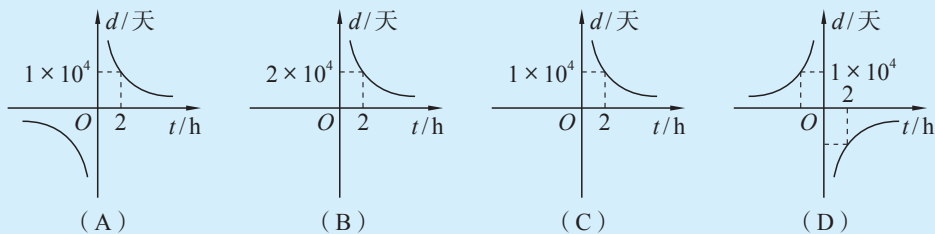
2. 选择题: 已知某种品牌电脑显示屏的使用寿命大约

为 $2 \times 10^4 \text{ h}$. 如果该显示屏工作天数为 d (天), 平均每天工作时间为 t (h), 那么能



(第1题)

正确表示 d 与 t 之间函数关系的图象是 ().



(第2题)



习题5.2



复习与巩固

1. 指出下列函数中的反比例函数:

(1) $y = \frac{-x}{2}$; (2) $y = \frac{1}{x}$; (3) $y = -\frac{1}{x}$; (4) $y = \frac{\sqrt{3}}{3x}$.

2. (1) 学校食堂用 1 200 元购买大米, 写出所购买的大米质量 y (kg) 与单价 x (元/kg) 之间的函数表达式. y 是 x 的反比例函数吗?

(2) 水池中蓄水 90 m^3 , 现用放水管以 $x (\text{m}^3/\text{h})$ 的速度排水, 经过 $y (\text{h})$ 排空. 写出 y 与 x 之间的函数表达式. y 是 x 的反比例函数吗?

3. 某县现有人口 82 万, 人均占有耕地面积为 0.125 公顷. 如果该县的总耕地面积不变,

(1) 写出该县人均占有耕地面积 y (公顷/人) 与人口总数 x (人) 之间的函数表达式. y 是 x 的反比例函数吗?

(2) 当该县人口增加到 100 万时, 人均占有耕地面积是多少公顷?

4. 一定质量的氧气, 它的密度 $\rho (\text{kg}/\text{m}^3)$ 是它的体积 $V (\text{m}^3)$ 的反比例函数. 当 $V = 10 \text{ m}^3$ 时, $\rho = 1.43 \text{ kg}/\text{m}^3$.

(1) 求 ρ 与 V 之间的函数表达式;

(2) 当 $V = 2 \text{ m}^3$ 时, 求氧气的密度 ρ .

5. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象过点 $(1, 2)$, 求 k 的值.

6. 已知 y 是 x 的反比例函数, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 是它图象上的一点.

(1) 写出这个反比例函数的表达式;

(2) 该图象是否经过点 $P(-6, \frac{1}{3})$, $Q(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$?

7. 已知反比例函数 $y = \frac{2m-1}{x}$ 的图象在第一、三象限, 求 m 的取值范围.

8. 如果点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 都在反比例函数 $y = \frac{5}{x}$ 的图象上, 并且 $x_1 < x_2 < 0$, 试比较 y_1, y_2 的大小.

9. 如图, P 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象上一点. 如果图中矩形阴影部分面积是 2, 求这个反比例函数的表达式.



(第9题)

10. 某市计划修建一条长 80 km 的轻轨铁路.

- (1) 原计划每月修建 x km, y 个月可修建完. 求 y 与 x 之间的函数表达式;
- (2) 为使工程能提前 3 个月完成, 需要将原定的工作效率提高 12%. 原计划完成这项工程用多少个月?

11. 甲、乙、丙、丁各指出函数的一个性质:

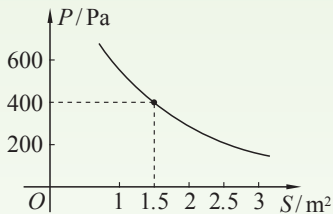
- 甲: 函数的图象经过第二、四象限;
- 乙: 函数的图象不经过原点;
- 丙: 在每个象限内, y 随 x 增大而增大;
- 丁: 函数图象经过点 $(5, -3)$.

请你根据他们的叙述, 写出满足上述性质的一个函数表达式.

12. 某玻璃器皿厂根据需要, 打算设计一种容积为 200 cm^3 的圆锥形漏斗, 要求漏斗口面积不得少于 30 cm^2 .

- (1) 写出漏斗深 h (cm) 与漏斗口面积 S (cm^2) 之间的函数表达式.
- (2) 如果漏斗口直径设计为 8 cm, 那么漏斗深应是多少?

13. 某勘探队在进行野外考察时, 途中遇到一段湿地. 为了安全, 他们沿着前进的路线铺设了若干块木板, 构筑成一条临时通道. 已知木板对地面的压强 P (Pa) 是木板面积的反比例函数, 其图象如图所示.



(第13题)

- (1) 写出这个反比例函数的表达式和自变量的取值范围;

- (2) 当木板面积为 0.2 m^2 时, 木板对地面的压强是多少?
- (3) 如果要求压强不超过 6000 Pa , 木板的面积至少要多大?

14. 某蓄水池排水管的排水速度为 $8 \text{ m}^3/\text{h}$ 时, 6 h 可将满池水全部排空.

- (1) 这个蓄水池容积是多少?
- (2) 如果增加排水管, 使排水速度达到 $12 \text{ m}^3/\text{h}$, 那么将满池水排空所需时间 t (h) 将如何变化?
- (3) 写出 t 与 12 之间的函数表达式;
- (4) 如果必须在 5 h 内将满池水排空, 那么排水速度至少是多少?

(5) 如果排水速度最大为 $12 \text{ m}^3/\text{h}$, 那么至少用多少时间可将满池水全部排空?



拓展与延伸

15. 如图, 点 O 为原点, 点 A 在 x 轴上, 点 C 在 y 轴上, 点 B 和

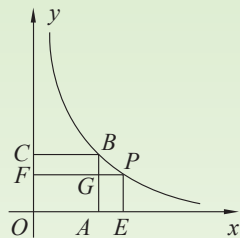
$P(m, n)$ 是函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0, x > 0$) 在第一象限内图象上的点, 过 P 分别作 x 轴、 y 轴的垂线, 垂足分别为 E, F , 正

方形 $OABC$ 的面积为 9, 矩形 $OAGF$ 的面积为 S .

(1) 求点 B 的坐标和 k 值;

(2) 当 $S = \frac{9}{2}$ 时, 求点 P 的坐标;

(3) 写出 S 与 m 之间的函数表达式.



(第 15 题)

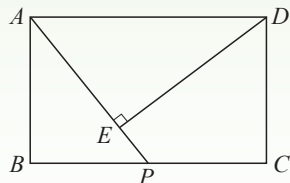
16. (1) 写出第一象限内函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象上所有横、纵坐标都是整数的点;

(2) 如果 $P(m, y_1)$, $Q(-3, y_2)$ 是该函数图象上的点, 且 $y_1 > y_2$, 求 m 的取值范围.



探索与创新

17. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $BC = 3$, P 是 BC 边上一个动点. 设 $PA = x$, 点 D 到 PA 的距离为 y . 求 y 与 x 之间的函数表达式, 并求出自变量 x 的取值范围.



(第 17 题)

5.3 二次函数



观察与思考

思考下列问题, 并与同学交流:

(1) 把一根长为 60 cm 的铁丝, 围成一个矩形. 写出矩形的面积 $S(\text{cm}^2)$ 与它的一边长 $x(\text{cm})$ 之间的函数表达式.

矩形的一边长为 x cm, 则它的另一边为 $(30-x)$ cm, 因此矩形的面积

$$S = x(30 - x),$$

整理得

$$S = -x^2 + 30x.$$

(2) 如图 5-16, 一个小球由静止开始沿斜坡向下滚动, 5 s 时到达斜坡的底部. 测得小球滚动的距离 s (m) 与时间 t (s) 的对应数据如下表所示:

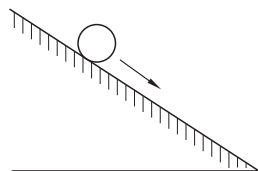


图 5-16

时间 t/s	0	1	2	3	4	5
距离 s/m	0	2	8	18	32	50

分析上面的数据, 你发现当 t 增加时, s 的变化有什么规律? 你能写出 s 与 t 之间的函数表达式吗?

(3) 某企业去年的产值为 1 200 万元. 如果三年内该企业年产值平均每年的增长率为 x , 你能写出明年该企业年产值 y (万元) 与 x 之间的函数表达式吗?

因为去年的年产值为 1 200 万元, 所以该企业今年的年产值为 $1\,200 + 1\,200x$, 即 $1\,200(1 + x)$.

因而, 明年该企业的年产值 y (万元) 与增长率 x 之间的函数表达式为

$$y = 1\,200(1 + x) + 1\,200(1 + x) \cdot x = 1\,200(1 + x)^2.$$

上面的函数表达式还可以进一步整理成

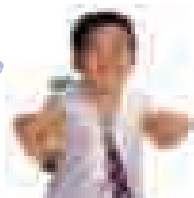
$$y = 1\,200x^2 + 2\,400x + 1\,200.$$

(4) 经过整理, 以上三个问题中的函数表达式分别是:

$$S = -x^2 + 30x; \quad s = 2t^2; \quad y = 1\,200x^2 + 2\,400x + 1\,200.$$

观察这些函数表达式, 你发现它们具有什么共同特征?

这些函数表达式都是关于自变量的二次整式.



一般地, 形如 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数, 且 $a \neq 0$) 的函数叫做二次函数 (quadratic function).

你能分别说出上述三个二次函数表达式中的二次项系数、一次项系数和常数项吗?

(5) 你能说出二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中自变量 x 的取值范围吗? 你能分别说出问题(1)(2)(3)中自变量可以取值的范围吗?



二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的自变量 x 可以取值的范围是全体实数, 但在具体问题中, 还要结合实际背景确定自变量的取值范围.

例1 如图5-17, 从半径为15的圆形铁片上, 挖去一个半径为 x 的圆. 写出剩余部分的面积 y 与 x 之间的函数表达式, 并指出自变量 x 可以取值的范围.

解

原来圆形铁片的面积为

$$S = \pi \times 15^2 = 225\pi.$$

挖去部分的面积为 πx^2 .

所以, 剩余部分的面积 y 与 x 之间的函数表达式为

$$\begin{aligned} y &= 225\pi - \pi x^2 \\ &= -\pi x^2 + 225\pi. \end{aligned}$$

根据题意, 小圆在大圆的内部, 所以自变量 x 可以取值的范围是

$$0 < x < 15.$$

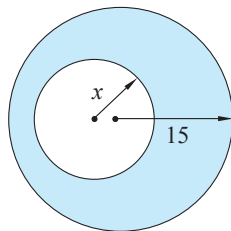


图 5-17



练习

1. 当系数 a, b, c 满足什么条件时, 函数 $y = ax^2 + bx + c$ 是二次函数? 是一次函数? 是正比例函数?
2. 已知正方形的边长是3, 当边长增加 x 时, 面积增加 y . 写出 y 与 x 之间的函数表达式.



习题5.3



复习与巩固

1. 指出下列函数中哪些是二次函数. 如果是二次函数, 写出它的二次项系数、一次项系数和常数项:

(1) $y = 2x + 1$;

(2) $y = 2x^2 + 1$;

(3) $y = x(2 - x)$;

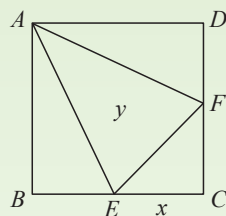
(4) $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{5}{2}$;

(5) $y = \frac{8}{3x^2}$;

(6) $y = x^2(x - 1) - 1$.

2. 已知直角三角形的一个锐角是 30° , 写出它的面积 $y(\text{cm}^2)$ 与斜边长 $x(\text{cm})$ 之间的函数表达式, 并指出自变量 x 可以取值的范围.

3. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = 4$. E, F 分别是边 BC, CD 边上的动点, 且 $AE = AF$. 设 $\triangle AEF$ 的面积为 y , EC 的长为 x . 写出 y 与 x 之间的函数表达式, 并指出自变量 x 可以取值的范围.



(第3题)



拓展与延伸

4. 设人民币一年定期储蓄的年利率是 x , 一年到期后, 银行将本金和利息自动按一年定期储蓄转存. 如果本金是 10 000 元, 写出两年后的本息之和 $y(\text{元})$ 与年利率 x 之间的函数表达式.
5. 如图, 一块草地是长为 100 m、宽为 50 m 的矩形, 要在中间修筑互相垂直且宽为 $x(\text{m})$ 的小路, 如果草坪面积为 $y(\text{m}^2)$, 求 y 与 x 之间的函数表达式.



(第5题)



探索与创新

6. 某商品的进价为每件 20 元, 如果按标价为每件 30 元销售, 商店每月可售出 400 件. 为了提高利率商店拟提高每件的售价, 但根据销售经验, 销售价格每提高 1 元, 每月的销售量会相应减少 20 件.

(1) 写出每月的利润 y 与单价 x 之间的函数表达式;

(2) 求自变量 x 可以取值的范围.

5.4 二次函数的图象和性质

我们已经知道，一次函数的图象是直线，反比例函数的图象是双曲线，并且根据它们的图象，得到了一次函数和反比例函数的性质. 二次函数的图象形状是怎样的？它有哪些性质？

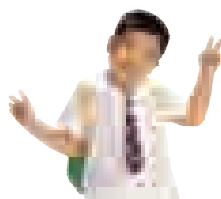
根据我们的经验，研究二次函数的图象应该从最简单的二次函数即 $y = ax^2$ 开始，取得对它的图象和性质的认识，进而再研究更复杂、更一般的二次函数的图象和性质.



实验与探究

(1) 如何用描点法画出函数 $y = x^2$ 的图象呢？与同学交流.

在自变量可以取值的范围内，选定 x 的一些值，求出对应的 y 值，列出表格.



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

以表中的每个有序实数对 (x, y) 作为点的坐标，在直角坐标系中描出相应的各点（图 5-18）.

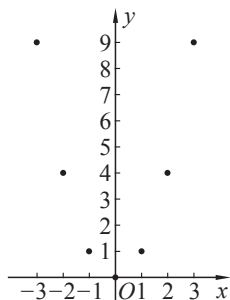


图 5-18

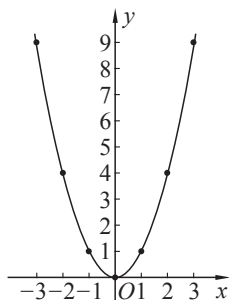


图 5-19

(2) 用平滑的曲线由左至右顺次连接描出的各点, 便得出函数 $y = x^2$ 的图象 (图 5-19).

(3) 观察 (2) 中得到的函数 $y = x^2$ 的图象形状、开口方向和轴对称性, 找出图象与对称轴的交点, 研究图象在交点的左边和右边的变化情况, 你有什么发现? 与同学交流.

函数 $y = x^2$ 的图象是一条 **抛物线** (parabola). 它的开口向 _____; 图象是轴对称图形, 它的对称轴是 _____; 图象与对称轴的交点坐标是 _____, 交点是图象的最 _____ 点; 当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而 _____; 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而 _____.

(4) 请你再画出二次函数 $y = -x^2$ 的图象, 研究它的特征, 并与同学交流.

观察二次函数 $y = -x^2$ 的图象 (图 5-20) 可以看出, 函数 $y = -x^2$ 的图象也是一条抛物线. 它的开口向 _____; 图象是轴对称图形, 它的对称轴是 _____; 图象与对称轴的交点坐标是 _____, 交点是图象的最 _____ 点; 当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而 _____; 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而 _____.

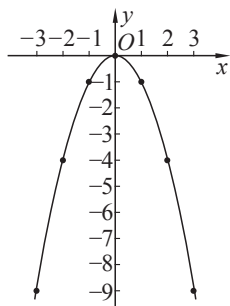


图 5-20

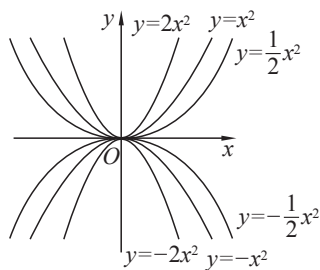


图 5-21

(5) 在同一直角坐标系中, 分别画出二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$, $y = -x^2$, $y = -2x^2$ 的图象 (图 5-21). 观察这些图象, 你发现二次函数 $y = ax^2$ 的图象有什么共同性质?

二次函数 $y = ax^2$ 的图象是抛物线. 我们把二次函数 $y = ax^2$ 的图象也叫做抛物线 $y = ax^2$, 它的对称轴是 y 轴.

抛物线与对称轴的交点叫做抛物线的 **顶点**. 抛物线 $y = ax^2$ 的顶点是坐标原点. 当 $a > 0$ 时, 它的开口向上, 顶点是它的最低点; 当 $a < 0$ 时, 它的开口向下, 顶点是它的最高点.



广角镜

漫谈抛物线

炮弹发射之后飞行的路线是怎样的？

火炮发明之后，人们对这个问题并不十分明白. 从发射炮弹的一方看来，以为炮弹离开炮筒后是沿着炮筒所在的射线飞出的，敌方也以为炮弹是从空中沿直线方向飞下来的，于是当时人们总认为炮弹飞行的路线是一条折线（图 5-22）.

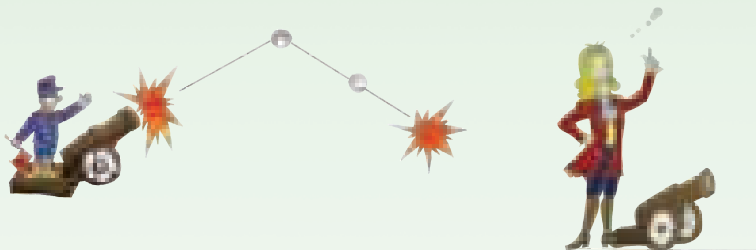


图 5-22

意大利著名学者伽利略更正了这种错误认识. 他指出炮弹并不是沿着折线飞行的，而是沿着一条曲线飞行的，他把这条曲线叫“抛物线”. 就像斜抛一个物体后，物体在空中划过的曲线的形状，“抛物”的名称正是从此而来.

在现实生活中，你会发现有不少曲线的形状是抛物线，如喷泉喷出的水滴行进的路线，跳水运动员起跳后至入水前运动的路线，某些桥梁的桥拱等.

抛物线有许多有用的性质. 如果将一束平行于抛物线的对称轴的光线射入抛物线，经过抛物线反射后，这些光线会聚于一点 F ，点 F 叫做抛物线的焦点（图 5-23）. 反之，在抛物线的焦点处安装一个点光源，经抛物线反射出的是平行光线. 利用这个原理，人们制出锅型天线、太阳灶、探照灯等器具.



图 5-23



练习

1. 分别说出抛物线 $y = -4x^2$ ， $y = \frac{1}{2}x^2$ 的开口方向、对称轴，并分别写出它们的顶点、最高点或最低点的坐标.
2. 已知抛物线 $y = ax^2$ 通过点 $(1, 3)$ ，求 a 的值.



观察与思考

在上一课时，你已经知道了最简单的二次函数 $y = ax^2$ 的图象和性质. 在此基础上，我们继续从一些特殊的二次函数入手，探索更一般的二次函数的图象和性质. 思考下面的问题：

(1) 比较 $y = x^2 + 1$ 与 $y = x^2$ 的表达式，你发现它们有哪些联系与区别？

它们都是二次函数，二次项的系数都是1，一次项都是0，区别是它们的常数项不同，前者是1，后者为0.



对于自变量 x 的同一个值，函数 $y = x^2 + 1$ 的对应值比 $y = x^2$ 的对应值多1.



(2) 你会利用描点法画出二次函数 $y = x^2 + 1$ 的图象吗？

利用列表、描点，得到二次函数 $y = x^2 + 1$ 的图象（图5-24）.

(3) 观察图5-24，你发现二次函数 $y = x^2 + 1$ 的图象的形状、开口方向、对称性、顶点坐标有什么特征？

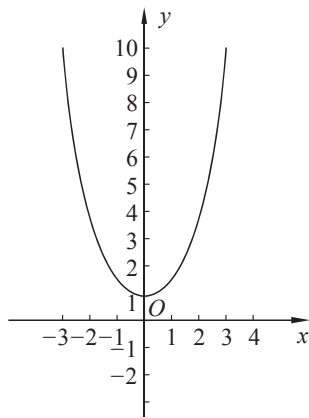


图 5-24

二次函数 $y = x^2 + 1$ 的图象是抛物线，开口向上，对称轴是 y 轴，顶点是图象的最低点，顶点坐标为 $(0, 1)$.



(4) 利用(1)(3)中的结论, 比较你在画 $y = x^2 + 1$ 和 $y = x^2$ 的图象时列出的表格以及图 5-19 和图 5-24, 你猜想如果把这两条抛物线画在同一个直角坐标系中, 它们有怎样的关系?

它们的形状相同, 只是在坐标系中的位置不同, 如果将抛物线 $y = x^2$ 沿 y 轴向上平移 1 个单位长度, 就得到抛物线 $y = x^2 + 1$.



(5) 类似地, 把 $y = x^2 - 1$ 和 $y = x^2$ 的图象画在同一个直角坐标系中 (图 5-25), 你有什么发现?



它们的形状相同, 只是在坐标系中的位置不同.

将抛物线 $y = x^2$ 沿 y 轴向下平移 1 个单位长度就得到抛物线 $y = x^2 - 1$.

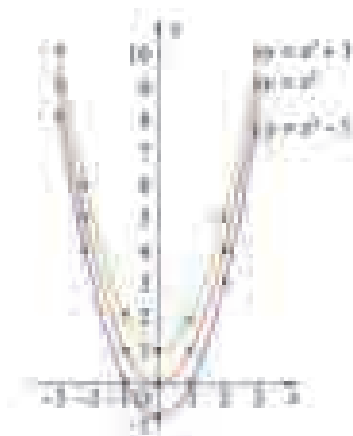


图 5-25

一般地, 二次函数 $y = ax^2 + c$ 的图象是抛物线, 它与抛物线 $y = ax^2$ 的形状相同, 将抛物线 $y = ax^2$ 沿 y 轴向上或向下平移 $|c|$ 个单位长度便得到抛物线 $y = ax^2 + c$. 当 $c > 0$ 时, 向上平移; 当 $c < 0$ 时, 向下平移.

(6) 比较 $y = -\frac{1}{2}x^2$, $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2$, $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的表达式, 你发现它们之间有什么联系和区别?

(7) 在同一直角坐标系中, 分别画出二次函数 $y = -\frac{1}{2}x^2$, $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2$ 与 $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的图象 (图 5-26). 你有什么发现?

可以看出, 二次函数 $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2$, $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2$ 的图象也都是抛物线. 它们与抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 的形状相同, 只是位置不同.

(8) 观察图 5-26, 抛物线 $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2$, $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2$ 可由抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 分别经过怎样的平移而得到?



将抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 沿 x 轴向右平移 1 个单位长度就得到 $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2$; 向左平移 1 个单位长度就得到抛物线 $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2$.

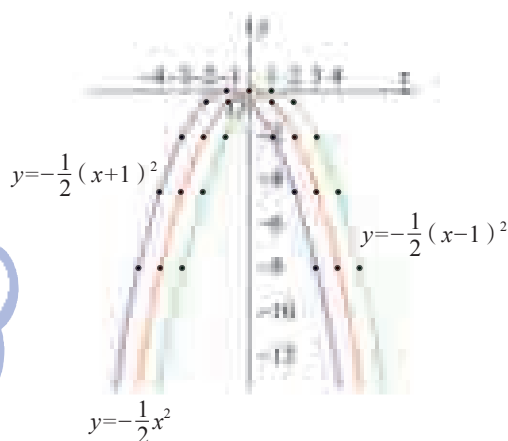
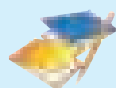


图 5-26

(9) 一般地, 由抛物线 $y = ax^2$ 经过怎样的平移得到抛物线 $y = a(x-h)^2$? 与同学交流.



练习

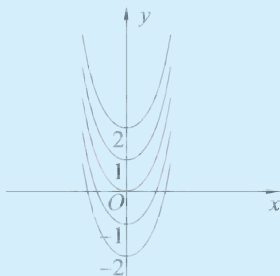
1. 如图, 在同一直角坐标系中, 有五条抛物线, 它们对应的二次函数表达式分别是:

- (1) $y = 2x^2$; (2) $y = 2x^2 + 1$; (3) $y = 2x^2 + 2$;
(4) $y = 2x^2 - 1$; (5) $y = 2x^2 - 2$.

你能把图中的抛物线用它们的表达式的编号分别标注出来吗?

2. 写出满足下列条件的一个二次函数的表达式:

- (1) 图象的顶点在 x 轴的负半轴上;
(2) 图象的开口方向向下.



(第 1 题)



观察与思考

(1) 观察二次函数 $y = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 3$ 的表达式, 它与 $y = \frac{1}{2}(x-4)^2$ 有什么联系和区别? 它与 $y = \frac{1}{2}x^2$ 有什么联系和区别?

(2) 在同一个直角坐标系中, 用描点法分别画出二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{2}(x-4)^2$ 和 $y = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 3$ 的图象. 比较它们之间的联系与区别, 你能说出二次函数 $y = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 3$ 的图象有哪些性质吗?

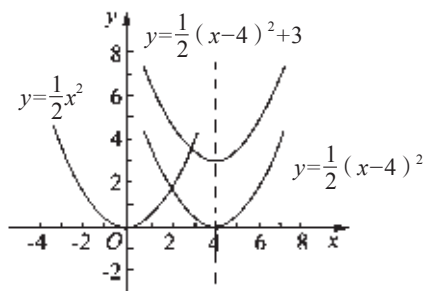


图 5-27

二次函数 $y = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 3$ 的图象是抛物线, 它的形状与抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 相同, 顶点是 $(4, 3)$, 对称轴是直线 $x = 4$ (图 5-27).

(3) 由二次函数 $y = \frac{1}{2}(x-4)^2$ 的图象, 经过怎样的平移, 可以得到二次函数 $y = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 3$ 的图象?

(4) 由二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的图象, 如果沿 x 轴方向和 y 轴方向依次进行怎样的平移, 便得到二次函数 $y = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 3$ 的图象?

(5) 一般地, 二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象可以由抛物线 $y = ax^2$ 经过怎样的平移而得到? 由此你能说出二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 有哪些性质吗? 与同学交流.

二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象是抛物线, 它与 $y = ax^2$ 的图象形状相同, 只是位置不同. 因此, 它可由抛物线 $y = ax^2$ 经过平移而得到. 二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 及其图象有如下性质:

(1) $a > 0$ 时, 开口向上, 顶点是图象最低点; $a < 0$ 时, 开口向下, 顶点是图象最高点;

(2) 对称轴是经过点 $(h, 0)$ 且平行于 y 轴的直线 $x = h$;

(3) 顶点坐标是 (h, k) ;

(4) 如果 $a > 0$, 当 $x < h$ 时, y 随 x 的增大而减小; 当 $x > h$ 时, y 随 x 的增大而增大. 如果 $a < 0$, 当 $x < h$ 时, y 随 x 的增大而增大; 当 $x > h$ 时, y 随 x 的增大而减小.

例1

试讨论二次函数 $y = -\frac{5}{2}(x+3)^2 - 2$ 的性质.

解

由函数 $y = -\frac{5}{2}(x+3)^2 - 2$ 的表达式可知, 它有以下性质:

(1) 图象是抛物线, 开口向下;

(2) 对称轴为直线 $x = -3$;

(3) 顶点是图象的最高点, 坐标为 $(-3, -2)$;

(4) 当 $x < -3$ 时, 函数值随 x 的增大而增大; 当 $x > -3$ 时, 函数值随 x 的增大而减小.

**练习**

1. 填表:

抛物线	开口方向	对称轴	顶点坐标
$y = 2x^2 + 3$			
$y = -\frac{1}{2}(x-1)^2$			
$y = 4(x+5)^2 + \sqrt{2}$			

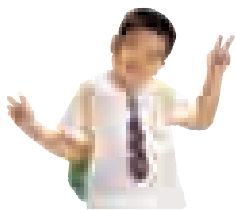
2. 写出符合下列两个条件的一个二次函数的表达式:

(1) 图象的顶点在第四象限;

(2) 当 $x < 3$ 时, y 随 x 的增大而减小.

**交流与发现**

(1) 你已经知道了二次函数 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象和性质, 一般地, 怎样画出一个二次函数的图象呢? 例如二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 21$ 能通过配方, 把它的表达式化成 $y = a(x-h)^2 + k$ 的形式吗?



$$\begin{aligned}
 y &= \frac{1}{2}x^2 - 6x + 21 \\
 &= \frac{1}{2}(x^2 - 12x + 42) \\
 &= \frac{1}{2}(x^2 - 12x + 36 + 42 - 36) \\
 &= \frac{1}{2}(x - 6)^2 + 3.
 \end{aligned}$$

(2) 根据配方后的表达式 $y = \frac{1}{2}(x - 6)^2 + 3$, 你能说出二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 21$ 有哪些性质? 与同学交流.

(3) 上面(2)中所得到的结论, 对于用描点法画出二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 21$ 的图象会有哪些帮助?

通过把 $y = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 21$ 配方, 可知它的图象是一条开口向上的抛物线, 其顶点坐标是 $(6, 3)$, 于是大致了解它在坐标系中的位置. 列表时可以先确定顶点, 描出对称轴一侧的图象上的若干个点, 然后利用对称性, 描出这些点关于这条直线的对称点.



(4) 列表时先填入顶点坐标 $(6, 3)$, 适当选取满足 $x > 6$ (或 $x < 6$) 的一些值, 再根据表达式求出相应的 y 值, 得到下表:

x				6	7	8	9
$y = \frac{1}{2}(x - 6)^2 + 3$				3	3.5	5	7.5

(5) 然后利用对称性, 在表中的空白处直接写出与 $(7, 3.5)$, $(8, 5)$, $(9, 7.5)$ 对应的各有序数对, 并在直角坐标系中描出对应各点, 再用平滑的曲线连接, 便得到 $y = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 21$ 的图象 (图 5-28).

(6) 通过以上对二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 21$ 的图象和性质的探索, 你认为应当怎样得到二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图象的性质?



先把函数表达式通过配方化成 $y = a(x - h)^2 + k$ 的形式.

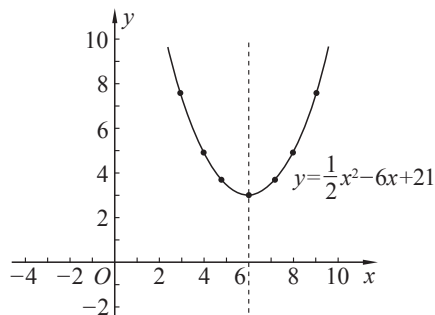


图 5-28

$$\begin{aligned}
 y &= ax^2 + bx + c \\
 &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
 &= a\left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \\
 &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.
 \end{aligned}$$

一般地, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象是抛物线, 它的对称轴是直线 $x = -\frac{b}{2a}$, 顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$. 若 $a > 0$, 抛物线的开口向上. 当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而减小, 当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而增大, 顶点是这条抛物线的最低点. 若 $a < 0$, 抛物线的开口向下. 当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而增大, 当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时, y 随 x 的增大而减小, 顶点是这条抛物线的最高点.



挑战自我

抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与抛物线 $y = ax^2$ 有什么联系和区别? 它可以由抛物线 $y = ax^2$ 经过怎样的平移得到?



练习

- 利用配方法写出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标. 这些抛物线分别有最高点还是有最低点? 当 x 取何值时, y 随 x 的增大而增大? 当 x 取何值时, y 随 x 的增大而减小?

$(1) y = x^2 - 3x;$

$(2) y = x^2 + 3x - 1;$

$(3) y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2};$

$(4) y = \frac{5}{2}x - 2 - 3x^2.$
- 画出二次函数 $y = -x^2 + 4x + 3$ 的图象.



习题5.4



复习与巩固

- 写出与抛物线 $y = -\frac{1}{4}x^2$ 关于 x 轴对称的抛物线的表达式.
- 判断下列说法的正误:

- (1) 抛物线 $y = ax^2$ 经过点 $(-1, a)$;
 - (2) 如果点 (m, n) 在抛物线 $y = ax^2$ 上, 那么点 $(-m, n)$ 也在这条抛物线上;
 - (3) 抛物线 $y = -\frac{1}{6}x^2$ 有最低点;
 - (4) 抛物线 $y = 6x^2$ 与抛物线 $y = -6x^2$ 关于 x 轴成轴对称.
- 画出二次函数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 的图象, 根据图象, 求:

- (1) 当 $x = -1.7$ 时, y 的值 (精确到 0.1);
 - (2) 当 $y = -5.8$ 时, x 的值 (精确到 0.1).
- 在同一直角坐标系中, 画出下列二次函数的图象:

$$y = \frac{1}{4}x^2, y = \frac{1}{4}x^2 + 2, y = \frac{1}{4}x^2 - 2.$$

观察这三个函数图象的位置关系, 分别指出它们的开口方向、顶点坐标、对称轴、最低点或最高点的坐标. 当 x 取何值时, y 随 x 的增大而增大? 当 x 取何值时, y 随 x 的增大而减小?
- 指出下列抛物线的开口方向、顶点坐标和对称轴, 并说明当 x 取何值时, y 随 x 的增大而增大; 当 x 取何值时, y 随 x 的增大而减小:

$(1) y = 4(x + 1)^2 - 4;$

$(2) y = -2(x - 1)^2 + 3.$
- 写出把二次函数 $y = x^2$ 的图象向左平移 2 个单位长度再向下平移 1 个单位长度后, 所得到的图象的表达式.

7. 画出函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图象, 根据图象回答下列问题:

- (1) 写出图象的开口方向和顶点坐标;
- (2) 当 x 取什么值时, y 随 x 的增大而增大?
- (3) 当 x 取什么值时, y 随 x 的增大而减小?

8. 小亮在用描点法画二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象时, 列出了下面的表格:

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
y	$\cdots$	11	2	-1	2	5	$\cdots$

由于粗心, 他算错了其中一个 y 值, 你能帮他指出表中的错误吗?

9. 当 $b < 0$ 时, 抛物线 $y = 2x^2 + bx - 5$ 的顶点在哪个象限?

10. 如何平移二次函数 $y = 4(x+3)^2 - 7$ 的图象, 可得到二次函数 $y = 4x^2$ 的图象?

11. 如果点 $(2, a)$ 与 $(b, -8)$ 都在抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 上, 求 a 和 b 的值.

12. 已知点 $A(2, -1)$ 和 $B(-3, m)$ 在抛物线 $y = ax^2$ 上, 求 m 的值.



拓展与延伸

13. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$, 其中 $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$. 回答下列问题, 并说明理由:

- (1) 抛物线与 y 轴的交点在原点的上方还是原点的下方?
- (2) 抛物线的对称轴在 y 轴的左侧还是右侧?
- (3) 抛物线的顶点在哪一象限或哪条坐标轴上?

14. 抛物线 $y = x^2 - 6x + c$ 的一段如图所示.

- (1) 求这条抛物线的对称轴;
- (2) 它可以由抛物线 $y = x^2$ 经过怎样的平移而得到?
- (3) 画出这条抛物线.



(第14题)

15. (1) 选择一组你认为适当的 a, b, c 的值, 使二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 满足以下条件:

- ① 它的图象开口向下;
- ② 对称轴为 $x = 2$.

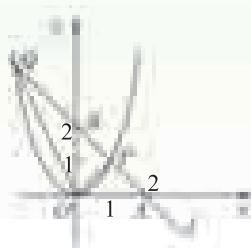
(2) 满足上述条件的 a, b, c 有多少组? 如果不止一组, 请你再写出一组与 (1) 不同的答案.



探索与创新

16. 二次函数 $y = ax^2$ 的图象与过 $A(2, 0)$, $B(0, 2)$ 的直线 l 交于 P, Q 两点, P 点横坐标为 1.

- (1) 求直线 l 及二次函数的表达式;
- (2) 求 $\triangle OPQ$ 的面积.



(第16题)

5.5 确定二次函数的表达式

如果已知二次函数图象上某些点的坐标，你能利用待定系数法确定二次函数的表达式吗？

如果已知图象的顶点坐标，把它的表达式写成 $y = a(x+h)^2 + k$ 的形式，其中 $(-h, k)$ 已知，那么只要再知道抛物线上其他一点的坐标便可以利用待定系数法确定系数 a 的值。



例1 二次函数图象的顶点坐标是 $(-1, -6)$ ，并且图象经过点 $(2, 3)$ 。求这个函数的表达式。

解 因为二次函数图象的顶点坐标是 $(-1, -6)$ ，所以，可以设二次函数的表达式为

$$y = a(x+1)^2 - 6.$$

又因为图象经过点 $(2, 3)$ ，将这点的坐标代入上式，得

$$3 = a(2+1)^2 - 6.$$

解得 $a = 1$ 。

所以，这个二次函数的表达式是

$$\begin{aligned} y &= (x+1)^2 - 6 \\ &= x^2 + 2x - 5. \end{aligned}$$

***例2** 已知点 $A(-1, 6)$ ， $B(4, 6)$ 和 $C(3, 2)$ ，求经过这三点的二次函数的表达式^❶。

解 设所求的二次函数的表达式为

$$y = ax^2 + bx + c.$$

❶ 由给定不共线三点的坐标确定一个二次函数的表达式是选学内容，不作为考试要求。

二次函数的图象经过点 $A(-1, 6)$, $B(4, 6)$ 和 $C(3, 2)$.

将这三点坐标分别代入 $y = ax^2 + bx + c$, 得

$$\begin{cases} a - b + c = 6, \\ 16a + 4b + c = 6, \\ 9a + 3b + c = 2. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a = 1, \\ b = -3, \\ c = 2. \end{cases}$

所以, 这个二次函数的表达式为

$$y = x^2 - 3x + 2.$$



加油站

在二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的表达式中, a, b, c 是待定系数, 如果已知不共线的三点的坐标将它们分别代入这个表达式, 便可得到一个关于 a, b, c 的三元一次方程组, 解这个方程组, 便可确定表达式中的未知系数. 这就是说, 知道不共线的三点的坐标, 便可确定经过这三点的抛物线.



智趣园

有趣的“切饼问题”

如图 5-29, 把一张烙饼切一刀可以把它切成两块, 切两刀最多可以把它切成 4 块, 切三刀最多可以把它切成 7 块.

如果切四刀, 切五刀, 最多能把这张烙饼切成几块? 切 n 刀呢?

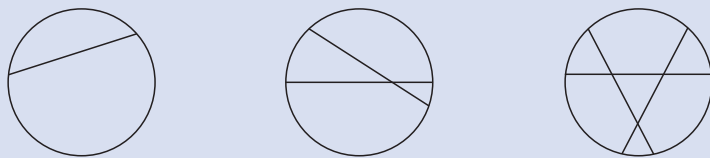


图 5-29

用 y 表示切 x 刀最多可以把一张烙饼切成的块数. 列出下表:

x	0	1	2	3	4	5	...
y	1	2	4	7	11	16	...

你能写出 y 与 x 之间的函数表达式吗?

在如图 5-30 所示的直角坐标系中, 横轴表示切的刀数 x , 纵轴表示最多可切成的块数 y , 以表中每对 x, y 的值作为点的坐标, 描出对应的各点, 把这些点用平滑的曲线连接起来, 观察这条曲线的形状, 可以猜测这些点分布在一个二次函数的图象上. 设这个二次函数的表达式为

$$y = ax^2 + bx + c. \quad \textcircled{1}$$

将其中三点 $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$ 的坐标代入 ① 式, 得到

$$\begin{cases} c = 1, \\ a + b + c = 2, \\ 4a + 2b + c = 4. \end{cases}$$

解这个三元一次方程组, 得

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = 1.$$

因此, 经过这三点的抛物线的表达式是 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$.

我们还需要验证点 $(3, 7)$, $(4, 11)$, $(5, 16)$ 是否都满足这个二次函数的表达式.

分别令 $x = 3, 4, 5$, 依次代入 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$, 得 $y = 7, 11, 16$. 这说明, 上面表中列出的前 6 个有序数对 (x, y) 所对应的点都在这个二次函数的图象上.

你还可以继续验证, 当 $x = 6, 7, 8, \dots$ 时, 切的刀数和最多可以切成的块数也满足

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1.$$

事实上, 对于 x 为任意正整数时, 这个结论仍然成立, 其严格证明将会在今后的学习中得到解决.

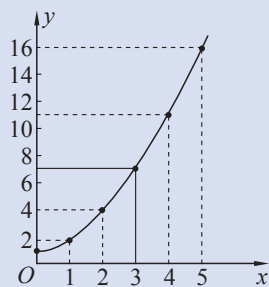


图 5-30



练习

1. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点坐标为 $(2, 1)$, 且抛物线与 x 轴的一个交点坐标是 $(3, 0)$. 求:
 - (1) 这条抛物线的表达式;
 - (2) 这条抛物线与 x 轴另一个交点的坐标.
- *2. 已知二次函数的图象经过点 $A(1, -2)$, $(-1, 6)$ 和 $(2, -9)$, 求这个二次函数的表达式.



习题5.5

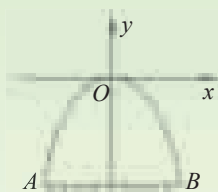


复习与巩固

1. 二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图象经过 $A(0, 1)$ 与 $B(2, -1)$, 试判断点 $P(-1, 2)$

是否在这个二次函数的图象上.

2. 某涵洞的横断面呈抛物线形, 现测得底部的宽 $AB = 1.6$ m, 涵洞顶部到底面的最大高度为 2.4 m. 在如图所示的直角坐标系中, 求抛物线所对应的二次函数的表达式.



(第2题)



(第3题)

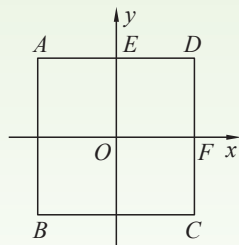
3. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示, 求这个函数的表达式.
4. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象, 经过 $(0, -1)$ 与 $(3, 5)$ 两点, 对称轴是直线 $x = 1$. 求这个二次函数的表达式.



拓展与延伸

- *5. 在如图所示的直角坐标系中, 正方形 $ABCD$ 的边长为 4 .

- (1) 求图象经过 B, E, F 三点的二次函数的表达式;
- (2) 求 (1) 中二次函数图象的顶点坐标.



(第5题)



探索与创新

6. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $(0, 1)$ 与点 $(2, -3)$.
- (1) 写出满足上述条件的两个函数的表达式;
 - (2) 当抛物线开口向下、对称轴在 y 轴的左侧时, 求 a 的取值范围.

5.6 二次函数的图象与一元二次方程



观察与思考

- (1) 比较二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的表达式与一元二次方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$, 你能说出二者之间有什么联系吗?
- (2) 一元二次方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 有没有实根? 如果有实根, 它的实根是

什么?

(3) 观察二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图象 (图 5-31). 图象与 x 轴有公共点吗? 如果有, 有几个公共点? 公共点的坐标分别是什么?

(4) 当 x 取何值时, 函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的值是 0?

(5) 一元二次方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的实根和二次函数 $y = x^2 - 2x - 3$ 的图象与 x 轴的交点的横坐标有什么关系?

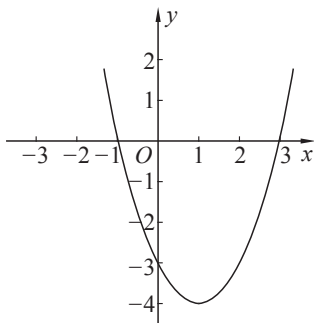


图 5-31

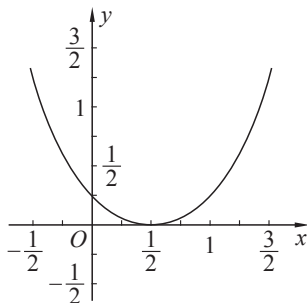


图 5-32

(6) 通过以上的探索活动, 你发现一元二次方程 $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ 与二次函数 $y = x^2 - x + \frac{1}{4}$ 的图象 (图 5-32) 有什么联系?

(7) 一般地, 如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有实根, 那么该方程的实根和二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴的公共点的横坐标有什么关系?

如果一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有实根, 那么二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴有公共点, 且公共点的横坐标是这个一元二次方程的实根; 反之, 如果二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴有公共点, 那么公共点的横坐标就是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的实根.

例1 利用二次函数图象, 求一元二次方程 $x^2 - 3x - 2 = 0$ 的近似解 (精确到 0.1).

解 (1) 画出二次函数 $y = x^2 - 3x - 2$ 的图象 (图 5-33).

(2) 观察图象, 发现图象与 x 轴有两个交点, 左交点在 $(-1, 0)$ 与 $(0, 0)$ 之间, 右交点在 $(3, 0)$

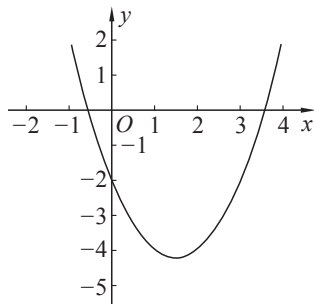


图 5-33

与 $(4, 0)$ 之间, 由此可知一元二次方程 $x^2 - 3x - 2 = 0$ 在 -1 与 0 之间以及 3 与 4 之间各有一个实根.

(3) 观察图 5-33 可知, 当 x 由 -1 增加到 0 时, 图象由 x 轴上方穿过 x 轴下降到 y 轴的下方, 也就是说, 当 $x = -1$ 时, $y > 0$, 当 $x = 0$ 时, $y < 0$.

为了进一步确定图象与 x 轴的左交点的位置, 在 -1 与 0 之间取 $x = -0.5$, 求出对应的 $y = -0.25$, $y < 0$, 因此图象与 x 轴的左交点在 $(-1, 0)$ 到 $(-0.5, 0)$ 之间. 为了求出左交点横坐标精确到 0.1 的近似值. 再将点 $(-1, 0)$ 与 $(-0.5, 0)$ 之间的线段分为 5 等份, 把每个分点的横坐标作为 x 值, 分别代入 $y = x^2 - 3x - 2$, 利用计算器求出所对应的函数值, 列表得

x	-1.0	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5
y	2	1.51	1.04	0.59	0.16	-0.25

由上表看出, 当 $x = -0.6$ 时, $y > 0$; 当 $x = -0.5$ 时, $y < 0$. 这就是说, 图象上的点 $(-0.6, 0.16)$ 在 x 轴上方, 点 $(-0.5, -0.25)$ 在 x 轴下方. 因此图象与 x 轴左交点在点 $(-0.6, 0)$ 和 $(-0.5, 0)$ 之间. 所以 -0.6 或 -0.5 都可作为图象与 x 轴左交点的横坐标的近似值, 因此二次方程 $x^2 - 3x - 2 = 0$ 的较小根的近似值为 $x \approx -0.6$ 或 $x \approx -0.5$ (精确到 0.1).

(4) 同样地, 可以求出函数 $y = x^2 - 3x - 2$ 与 x 轴的右交点横坐标的近似值. 列表得

x	3.0	3.5	3.6
y	-2	-0.25	0.16

由上表看出, 当 $x = 3.5$ 时, $y < 0$; 当 $x = 3.6$ 时, $y > 0$. 这就是说, 图象与 x 轴的右交点的横坐标在 3.5 和 3.6 之间, 所以一元二次方程 $x^2 - 3x - 2 = 0$ 较大根的近似值为 $x \approx 3.5$ 或 $x \approx 3.6$ (精确到 0.1).

例2 利用二次函数的图象讨论一元二次方程

$x^2 - 2x + 3 = 0$ 的根.

解

(1) 画出二次函数 $y = x^2 - 2x + 3$ 的图

象 (图 5-34).

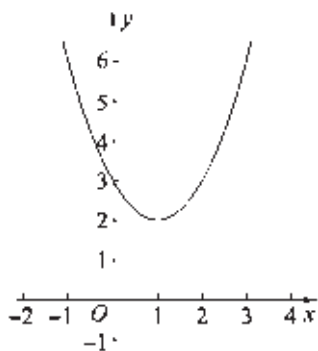


图 5-34

(2) 由于图象与 x 轴没有公共点, 所以一元二次方程 $x^2 - 2x + 3 = 0$ 没有实根.



挑战自我

已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$, 当 a, b, c 满足什么条件时,

- (1) 抛物线与 x 轴有两个公共点?
- (2) 抛物线与 x 轴只有一个公共点?
- (3) 抛物线与 x 轴没有公共点?



练习

1. 求二次函数 $y = 2x^2 - 4x - 1$ 的图象与 x 轴的公共点的坐标.
2. 利用二次函数的图象求一元二次方程 $x^2 - 8x + 6 = 0$ 的近似解 (精确到 0.1).



习题5.6



复习与巩固

1. 判断下列二次函数的图象与 x 轴是否有公共点. 如果有, 有几个公共点?
 (1) $y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1$; (2) $y = x^2 + x + 2$; (3) $y = x^2 - 3x - 4$.
2. 利用二次函数的图象, 求方程 $-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 = 0$ 的近似解 (精确到 0.1).



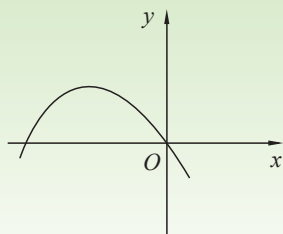
拓展与延伸

3. 当 m 取何值时, 抛物线 $y = x^2 + 3x + m$ 与 x 轴有两个交点?
4. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示.
 (1) 不求 a, b, c 的值, 写出方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根;
 (2) 当 x 取何值时, $y > 0$? 由此写出不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集;
 (3) 若图象顶点的纵坐标是 2, 写出二次函数的表达式.



(第 4 题)

5. 如图所示的抛物线是二次函数 $y = ax^2 - 3x + a^2 - 1$ 的图象, 求 a 的值.



(第5题)



探索与创新

6. 如果关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + 2x - 5 = 0$ 的两根中恰有一个根大于0而小于1, 求 a 的取值范围.

5.7 二次函数的应用

二次函数也是一个重要的数学模型. 生活实际中的许多问题, 可以运用二次函数的知识加以解决.

例1 用篱笆围成一个有一边靠墙的矩形菜园, 已知篱笆的长度为 60 m. 应该怎样设计才使菜园的面积最大? 最大面积是多少?

解 如图 5-35, 设矩形菜园的宽为 x (m), 则菜园的长为 $(60 - 2x)$ m, 面积为 y (m^2).

根据题意, y 与 x 之间的函数表达式为

$$\begin{aligned} y &= x(60 - 2x) \\ &= -2(x^2 - 30x) \\ &= -2(x^2 - 30x + 225 - 225) \\ &= -2[(x - 15)^2 - 225] \\ &= -2(x - 15)^2 + 450. \end{aligned}$$

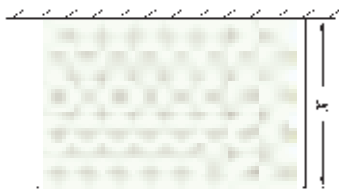


图 5-35

因为 $a = -2 < 0$, 所以这个二次函数的图象开口向下, 顶点 $(15, 450)$ 是图象的最高点. 这就是说, 当 $x = 15$ 时, y 有最大值, 最大值为 450.

根据问题的实际意义, 自变量 x 可以取值的范围是 $0 < x < 30$. 由于 $x = 15$ 在这个范围内, 所以二次函数 $y = x(60 - 2x)$ 的最大值, 就是该实际问题的最大值.

所以, 当菜园的宽为 15 m 时, 菜园面积最大, 最大面积是 450 m^2 .

一般地, 因为抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点是抛物线的最低(高)点, 所以当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 有最小(大)值, 最小(大)值为 $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

例2 如图 5-36, $ABCD$ 是一块边长为 2 m 的正方形铁板, 在边 AB 上选取一点 M , 分别以 AM 和 MB 为边截取两块相邻的正方形板材. 当 AM 的长为何值时, 截取的板材面积最小?

解 设 AM 的长为 x (m), 则 BM 的长为 $(2-x)$ m, 以 AM 和 BM 为边的两个正方形面积之和为 y (m^2).

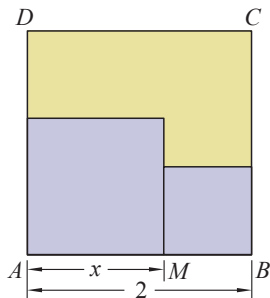


图 5-36

根据题意, y 与 x 之间函数的表达式为

$$\begin{aligned} y &= x^2 + (2-x)^2 \\ &= 2x^2 - 4x + 4 \\ &= 2(x-1)^2 + 2. \end{aligned}$$

因为 $a = 2 > 0$,

于是, 当 $x = 1$ 时, y 有最小值, 最小值是 2.

根据问题的实际意义, 自变量 x 可以取值范围是 $0 < x < 2$, 由于 $x = 1$ 在这个范围内, 所以二次函数 $y = x^2 + (2-x)^2$ 的最小值就是该实际问题的最小值.

所以, 当 $AM = 1$ m 时, 截取的板材面积最小, 最小面积为 2 m^2 .



挑战自我

如图 5-37, 用篱笆围成一个一面靠墙(墙的最大可用长度为 10 m)、中间隔有一道篱笆的矩形菜园. 已知篱笆的长度为 24 m. 设菜园的宽 AB 为 x (m), 面积为 y (m^2).

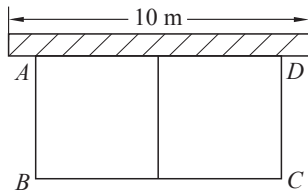


图 5-37

- (1) 写出 y 与 x 之间的函数表达式及自变量 x 可以取值的范围;
- (2) 围成菜园的最大面积是多少? 这时菜园的宽 x 等于多少?



练习

1. 菱形的两条对角线的和为 40 cm.

- (1) 如果菱形的面积为 y (cm^2), 一条对角线的长为 x (cm), 写出 y 与 x 之间函数的表达式, 并指出自变量 x 可以取值的范围;
- (2) 当这两条对角线的长分别为多少时, 菱形的面积最大? 最大面积是多少?

例3

运动员掷一枚铅球, 铅球抛出时离地面的高度为 $\frac{5}{3}$ m, 抛出后, 铅球行进的路线是一段抛物线, 行进时距离地面的最大高度是 3 m, 此时铅球沿水平方向行进了 4 m. 求铅球从抛出到落地走过的水平距离.

解

如图 5-38, 以铅球出手点 A 所在的铅垂线为 y 轴, 铅垂线与地面的交点为 O 点, 射线 OA 的方向为 y 轴的正方向. 铅球的落地点为 C 点, 直线 OC 为 x 轴, 射线 OC 的方向为 x 轴的正方向, x 轴、 y 轴均以 1 m 为单位长度, 建立直角坐标系. 由题意可知, 抛物线的顶点 B 的坐标是 $(4, 3)$.

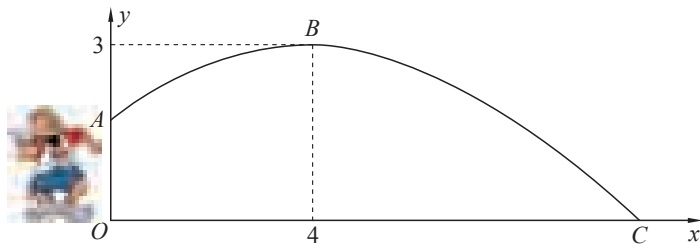


图 5-38

设抛物线的表达式为

$$y = a(x - 4)^2 + 3.$$

这里, y 表示铅球运行时离地面的高度, x 表示铅球沿水平方向运行的距离.

当 $x = 0$ 时, $y = \frac{5}{3}$, 代入 $y = a(x - 4)^2 + 3$, 得

$$\frac{5}{3} = a(0 - 4)^2 + 3.$$

解得 $a = -\frac{1}{12}$.

所以, 抛物线的表达式为

$$y = -\frac{1}{12}(x - 4)^2 + 3.$$

令 $y = 0$, 得

$$-\frac{1}{12}(x-4)^2 + 3 = 0.$$

解这个一元二次方程, 得

$$x_1 = -2, x_2 = 10.$$

代入实际问题中检验, $x_1 = -2(\text{m})$ 不合题意, 舍去; $x_2 = 10(\text{m})$ 符合题意.

所以, 铅球从抛出到落地走过的水平距离为 10 m .

***例4** 图 5-39 是龙泉镇最近 5 年财政总收入情况的折线统计图. 图中点 A, B, C, D, E 的横坐标分别代表年度, 纵坐标代表该年度的财政总收入 (单位: 亿元). 试根据折线图的发展趋势, 预测该镇第 6 年的财政总收入.

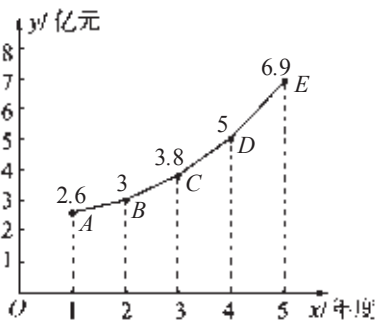


图 5-39

解 设图象过 A, C, D 三点的二次函数的表达式为

$$y = ax^2 + bx + c.$$

将这三点的坐标 $(1, 2.6)$, $(3, 3.8)$, $(4, 5)$ 分别代入上式, 得

$$\begin{cases} 2.6 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c, \\ 3.8 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c, \\ 5 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 0.2, \\ b = -0.2, \\ c = 2.6. \end{cases}$$

所以, 经过 A, C, D 三点的二次函数的表达式为

$$y = 0.2x^2 - 0.2x + 2.6.$$

当 $x = 2$ 时, 代入 $y = 0.2x^2 - 0.2x + 2.6$, 得 $y = 3$, 与 B 点纵坐标相等, 这说明点 B 在经过 A, C, D 三点的二次函数的图象上, 即这条抛物线上相应的点的纵坐标反映了该镇第 2 年的财政收入. 当 $x = 5$ 时, 代入 $y = 0.2x^2 - 0.2x + 2.6$, 得 $y = 6.6$, E 点纵坐标为 6.9 , 相差 0.3 (亿元), 这说明点 E 虽不在经过 A, C, D 三点的二次函数的图象上, 但比较接近, 即这条抛物线上相应的点的纵坐标



加油站

由图 5-39, 可以看出 A, B, C, D, E 近似分布在一条抛物线上, 因此可以选取其中的三个点, 求出由这三点确定的二次函数的表达式, 然后验证其他各点是否也靠近这条抛物线, 如果靠近, 便可推测第 6 年的财政总收入也符合以上规律. 从而可以预测第 6 年的财政总收入.

可以近似反映该镇第5年的财政收入. 由此可知, 二次函数 $y = 0.2x^2 - 0.2x + 2.6$ 可以近似地反映该镇最近5年财政收入情况的发展趋势, 因此可利用前5年的发展趋势, 预测第6年的财政收入.

当 $x = 6$ 时, 代入 $y = 0.2x^2 - 0.2x + 2.6$, 得 $y = 8.6$. 所以, 可以预测2010年该镇的财政收入约为8.6亿元.



挑战自我

将若干小正方形按图5-40的方式排列, 自上而下、自左而右填入正整数1, 2, 3, 4, ... 按这个规律, 继续做下去, 再把其中奇数行的中间的小正方形用粗线条描出, 则这些小正方形的序号及小正方形中的数字组成一个整数对序列:

(1, 1), (2, 5), (3, 13),

(1) 写出这个序列中第4, 5, 6个数对;

(2) 将这些数对在直角坐标系中描出;

(3) 你猜测这些点分布在一条什么样的曲线上? 你能验证你的猜测是正确的吗?

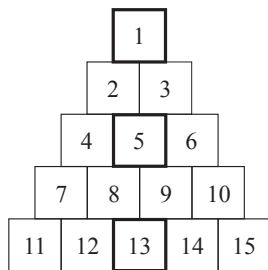
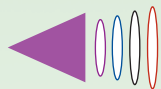


图 5-40



广角镜

平均数、方差与二次函数

在科学实验中, 经常需要测定某一个量 a 的大小. 由于受到测量工具和测量方法的限制, 所得到测量的结果往往只是 a 的近似值. 为此, 需对它作 n 次观测, 测得 n 个数据 $a_1, a_1, \dots, a_n$. 然后取它们的平均数 $\bar{x} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$, 作为对 a 的测定值. 你能说出这种方法的道理吗?

设 x 是一个未知的可以用来近似表示量 a 大小的变量, 考虑 x 的二次函数

$$y = \frac{1}{n} [(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2]. \quad (1)$$

对 a 的测定值应使这个二次函数的值达到最小.

将 (1) 式展开并化为二次函数的一般形式, 得

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{1}{n} [nx^2 - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)x + (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)] \\
 &= x^2 - \frac{2}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)x + \frac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2).
 \end{aligned}$$

当 $x = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \bar{x}$ 时, 这个二次函数取得最小值, 将 $x = \bar{x}$ 代入 (1) 式, 得

$$y_{\text{最小}} = \frac{1}{n} [(\bar{x} - a_1)^2 + (\bar{x} - a_2)^2 + \cdots + (\bar{x} - a_n)^2].$$

$y_{\text{最小}}$ 正是数据 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的方差.

因此, 在科学实验中通常把 n 次观测数据的平均数 $\bar{x}$ 作为所要观测量的测定值.



练习

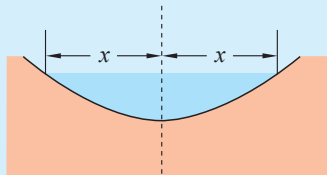
1. 某排球队员站在发球区发球, 排球发出后向正前方行进, 行进高度 y (m) 与水平距离 x (m) 之间函数的表达式是 $y = -\frac{1}{15}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$. 求:

- (1) 已知发球点到排球网的水平距离为 9 m, 网高 2.43 m, 排球是否能打过网?
- (2) 当排球走过的水平距离是多少时, 排球距离地面最高?
- (3) 已知排球场地的长为 18 m, 排球将落在界内还是界外?

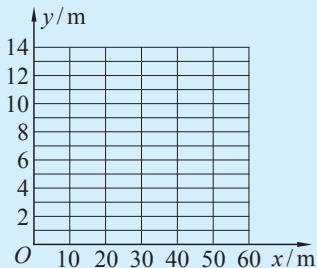
*2. 图①是某条河流河床横断面的示意图, 设河面的最大宽度为 $2x$ (m), 相应的河水的最大深度为 y (m). 查阅河段的水文资料, 得到下表中的数据:

x/m	5	10	20	30	40	50
y/m	0.125	0.5	2	4.5	8	12.5

- (1) 以上表中的各对数据 (x, y) 作为点的坐标, 在图②所示的坐标系中画出 y 关于 x 的函数图象;



①



②

(第2题)

- (2) 根据所画出的函数图象, 猜想 y 与 x 之间的函数表达式;
- (3) 利用你猜想的函数表达式, 判断当水面宽度为 36 m 时, 一艘吃水深度 (船底到水面的距离) 为 1.8 m 的货船能否在这个河段安全通过? 请说明理由.



习题5.7



复习与巩固

1. 炮弹以一定的初速度和发射角射出后, 上升的高度 y (m) 与相应的水平距离 x (m) 之间的函数表达式是

$$y = -\frac{1}{54\,000}x^2 + \frac{1}{3}x.$$

试求炮弹能达到的最大高度.

2. 某种烟花点燃后垂直升空, 其离地面的高度 h (m) 和点燃后的时间 t (s) 的函数表达式为 $h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ ($0 < t \leq 2$), 其中重力加速度 $g \approx 10 \text{ m/s}^2$. 烟花点燃后以 $v_0 = 20 \text{ m/s}$ 的初速度上升.

- (1) 这种烟花在地面上点燃后, 经过多少时间离地面 15 m?
- (2) 在烟花点燃后的 1.5 s 至 1.8 s 这段时间内, 判断烟花是上升, 或是下降? 说明理由.
3. 某公园草坪的护栏是由 50 段形状相同的抛物线形组成的. 为牢固起见, 每段护栏需按间距 0.4 m 加设不锈钢管支柱 (如图 ①, 单位: m). 为了计算所需不锈钢管的总长度, 设计人员建立如图 ② 所示的直角坐标系进行计算. 求该抛物线的表达式, 并计算所需不锈钢管的总长度至少为多少 (精确到 1 m).



①



②

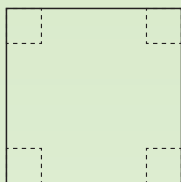
(第3题)



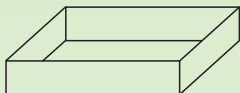
拓展与延伸

4. 把边长为 40 cm 的正方形硬纸板 (图 ①), 在四个顶点处分别剪掉一个小正方形, 折成一个长方体形的无盖盒子, 折纸厚度忽略不计.

- (1) 要使折成的盒子的底面积为 484 cm^2 , 剪掉的正方形边长应是多少?
- (2) 折成的长方体盒子侧面积有没有最大值? 如果没有, 说明理由; 如果有, 求出这个最大值, 并求出此时剪掉的正方形边长.



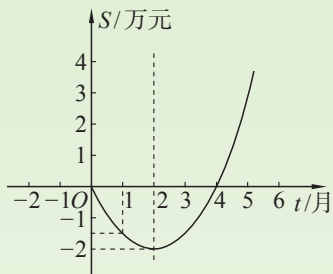
①



②

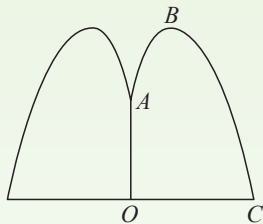
(第4题)

5. 某公司开发一种新的软件, 年初上市后, 公司经历了扭亏为盈的过程. 下图中的图象是抛物线的一段, 它刻画了该软件上市以来累积利润 S (万元) 与销售时间 t (月) 之间的函数关系 (即前 t 个月的利润总和 S 与 t 之间的函数关系). 根据图象提供的信息, 解答下列问题:



(第5题)

- (1) 由图象上的哪些点的坐标, 便可求出 S 与 t 之间的函数表达式?
- (2) 截止到几月末, 公司累积利润可达 30 万元?
- (3) 求公司第 5 个月所获的利润.
6. 如图, 公园要建造圆形的喷水池, 在水池中央垂直于水面处安装一个柱子 OA , 点 O 恰在圆形水面中心, $OA = 1.25 \text{ m}$. 由柱子顶端 A 处的喷头向外喷水, 水流在各个方向的路线都是抛物线.
- (1) 为使水流形状美观, 要求设计成水流在与柱子 OA 的水平距离为 1 m 处达到距水面最大高度 2.25 m . 如果不计其他因素, 那么水池的半径至少为多少时才能使喷出的水流不致落到池外?
- (2) 如果水池的半径为 3.5 m , 要使水流不落到池外, 此时水流的最大高度应达到多少 (精确到 0.1 m)?

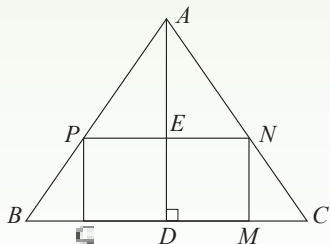


(第6题)



探索与创新

7. 在生产中, 为了节约原材料, 常利用一些边角余料加工零件. 如图所示, $\triangle ABC$ 为一块锐角三角形余料, $BC = 12 \text{ cm}$, BC 边上的高 $AD = 8 \text{ cm}$. 在 $\triangle ABC$ 上截取矩形 $PQMN$, 使点 Q , M 在 BC 边上, 点 P , N 分别在边 AB , AC 上. 设 $MN = x$, $PN = y$.



(第7题)

- (1) 用含 x 的代数式表示 y ;
- (2) 当 x 和 y 分别取什么值时, 矩形 $PQMN$ 面积最大? 最大面积是多少?



回顾与总结

1. 本章学习了哪些内容？总结一下，并与同学交流.
2. 你学过本章后，对函数的概念有了哪些进一步的认识？函数有哪三种表示法？举出例子说明.
3. 什么是分段函数？你能举出分段函数的实例吗？
4. 什么是反比例函数？你是怎样通过图象了解反比例函数性质的？
5. 什么是二次函数？请说明二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象及性质.
6. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与抛物线 $y = ax^2$ 有哪些区别与联系？
7. 怎样确定二次函数的表达式？你学了哪些方法？
8. 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 与二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 之间有怎样的联系？
9. 怎样利用二次函数的图象求一元二次方程的近似解？
10. 举出利用反比例函数、二次函数解决实际问题的例子，并与同学交流.
11. 你对利用数形结合思想研究函数的图象和性质有哪些体会？请以你在本章中学过的函数为例，谈谈研究函数的基本方法.



综合练习



复习与巩固

1. 填空：

- (1) 函数 $y = \frac{2}{3x}$ 的图象是 _____，当 $x < 0$ 时，图象在第 _____ 象限， y 随 x 的增大而 _____；
- (2) 函数 $y = (x - 2)^2 + 1$ 的图象是 _____，当 $x > 2$ 时， y 随 x 的增大而 _____；
- (3) 抛物线 $y = -2x^2 - x + 6$ 与 y 轴的交点坐标是 _____，与 x 轴的交点坐标是 _____.

2. 一辆汽车出发后，前 320 km 在柏油路面行驶，速度为 100 km/h，然后转入沙石路面，速度为 60 km/h，行驶了 240 km，到达目的地. 写出行驶总路程 y (km) 与行驶时间 t (h) 的函数表达式.

3. 求下列函数自变量 x 可以取值的范围:

$$(1) y = -6x^2 - x + 2;$$

$$(2) y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3};$$

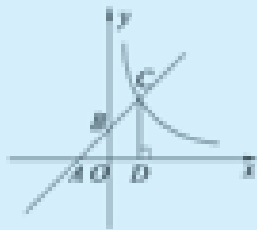
$$(3) y = \sqrt{x-1} - 1;$$

$$(4) y = \frac{\sqrt{x+1}}{2-x}.$$

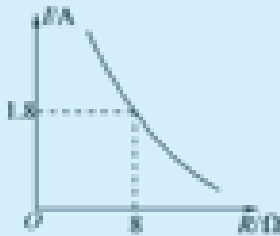
4. 如图, 已知一次函数 $y = kx + b$ 的图象与 x 轴, y 轴分别相交于 A, B 两点, 且与反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 在第一象限的图象交于点 C , CD 垂直于 x 轴, 垂足为 D . 如果 $OA = OB = OD = 1$, 求:

(1) 点 C 的坐标;

(2) 这个一次函数和这个反比例函数的表达式.



(第4题)



(第5题)

5. 小亮利用一个最大电阻为 200Ω 的滑动变阻器及一个电流表测一个电源两端的电压, 随着滑动变阻器的电阻 R 的改变, 电流 I 也随之改变, 且它们之间的函数关系如图所示.

(1) 该电源两端的电压是多少? 电流 I 与电阻 R 之间的函数关系怎样表示?

(2) 如果滑动变阻器的可变电阻在 $2 \Omega \sim 200 \Omega$ 之间, 那么通过该滑动变阻器的电流应在什么范围内?

(3) 如果该滑动变阻器的限制电流不超过 20 A , 那么该滑动变阻器的可变电阻应在什么范围内?

6. 指出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标, 并判断有最大值还是有最小值:

$$(1) y = x^2 - 4x + 5;$$

$$(2) y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 4;$$

$$(3) y = 3x^2 - 2x + 1;$$

$$(4) y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1.$$

7. 二次函数的图象经过点 $(-1, -1)$, 且不过第一象限, 写出满足上述条件的一个二次函数的表达式.

8. 小莹用描点法画二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 时, 列出了下表:

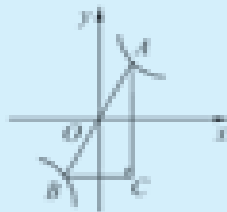
x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	$-\frac{13}{6}$	-4	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{5}{2}$	...

- (1) 你能根据表格中的信息, 求出该二次函数当 $x = 3$ 时, y 的值吗?
- (2) 试从表中选择适当的数据, 求出该二次函数的表达式.
9. 二次函数 $y = ax^2 + 2x - c$ 的图象经过点 $(-1, -6)$ 和点 $(2, 3)$.
- (1) 求这个二次函数的表达式, 并写出它的对称轴;
- (2) 写出两个二次函数的表达式, 使它们图象的对称轴都与上面的二次函数图象的对称轴相同, 并且常数项也相同.
10. 利用二次函数图象求下列一元二次方程的近似解 (精确到 0.1):
- (1) $x^2 - 5x + 2 = 0$; (2) $x^2 + x - 7 = 0$.
11. 已知抛物线 $y = x^2 - 2bx + 4$ 的顶点在 x 轴上, 求 b 的值.
12. 已知 $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$, 且 $a - b + c = 0$, 请在直角坐标系中画出函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象的草图.
13. 某蓄水池有两个进水口和一个出水口, 每个进水口的进水速度是 $10 \text{ m}^3/\text{h}$, 出水口的出水速度是 $20 \text{ m}^3/\text{h}$. 如果某天蓄水池排空水后, 从 0 时到 2 时打开两个进水口, 关闭出水口; 从 2 时到 3 时, 只开一个进水口, 同时打开出水口; 从 3 时到 6 时, 两个进水口和一个出水口全部打开.
- (1) 写出这天从 0 时到 6 时该水池的蓄水量 $y (\text{m}^3)$ 与时间 $x (\text{h})$ 之间的函数表达式;
- (2) 画出 y 与 x 之间的函数图象.



拓展与延伸

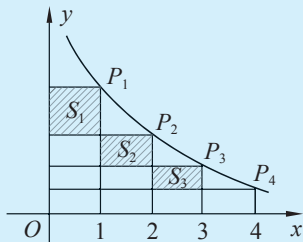
14. 选择题: 如图, A, B 是函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象上关于原点 O 对称的任意两点, AC 平行于 y 轴, BC 平行于 x 轴, $\triangle ABC$ 的面积为 S , 那么 ().
- (A) $S = 1$ (B) $S > 2$
- (C) $S = 2$ (D) $1 < S < 2$



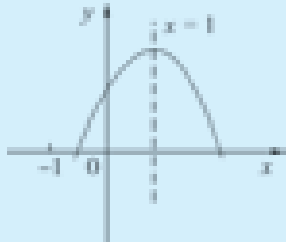
(第 14 题)

15. 如图, 在反比例函数 $y = \frac{2}{x} (x > 0)$ 图象上, 有点 P_1, P_2, P_3, P_4 , 它们的横坐标依次为 1, 2, 3, 4. 分别过这些点, 作 x 轴的垂线, 过 P_1 ,

P_2, P_3, P_4 再分别作 y 轴的垂线. 图中阴影部分的面积从左到右依次为 S_1, S_2, S_3 , 则 $S_1 + S_2 + S_3$ 等于多少?



(第 15 题)



(第 16 题)

16. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示, 在以下四个结论中, 试判断哪些是正确的, 哪些是错误的, 并说明理由.

- (1) $abc > 0$; (2) $b < a + c$;
(3) $4a + 2b + c > 0$; (4) $a + b > 0$.

17. 已知抛物线 C_1 的表达式是 $y = 2x^2 - 4x + 5$, 抛物线 C_2 与抛物线 C_1 关于 x 轴对称, 求抛物线 C_2 的表达式.



探索与创新

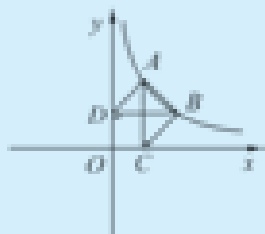
18. 如图, A, B 是反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 图象上的两个点, $AC \perp x$ 轴, 垂足为点 C , $BD \perp y$ 轴, 垂足为点 D , 连接 AD, AB, BC . 比较 $\triangle ADB$ 与 $\triangle ACB$ 面积的大小.

19. 已知抛物线 $y = x^2 - 2x + a$ 与直线 $y = x + 1$ 有两个公共点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 且 $x_2 > x_1 \geq 0$.

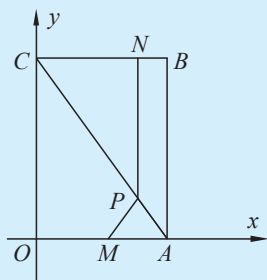
- (1) 求 a 的取值范围;
(2) 作 $AE \perp x$ 轴, E 为垂足, $BF \perp x$ 轴, F 为垂足. 求四边形 $ABFE$ 面积的最大值.

20. 如图, 在直角坐标系中, 四边形 $OABC$ 为矩形, 点 A, B 的坐标分别为 $(3, 0), (3, 4)$. 动点 M 从点 O 出发, 以每秒 1 个单位长度的速度, 沿 OA 向终点 A 移动, 点 N 从点 B 出发沿 BC 向终点 C 以同样速度移动. 过点 N 作 $NP \perp BC$ 交 AC 于 P , 连接 MP .

- (1) 当动点运动了 x s 时, 求 P 点的坐标 (用含 x 的代数式表示);
(2) 求 $\triangle MPA$ 面积的最大值, 并求此时的 x 值;
(3) 当 x 为何值时, $\triangle MPA$ 是一个等腰三角形?



(第 18 题)



(第 20 题)

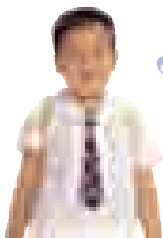


综合与实践

实际问题与分段函数模型

数学模型是由数字、字母或其他数学符号组成，描述现实对象规律的数学式子、图形或算法.

(1) 在初中数学的学习中，你已认识了哪些数学模型？



方程（一元一次方程、一次方程组、分式方程、一元二次方程…），不等式（一元一次不等式、一元一次不等式组…），函数（一次函数、反比例函数、二次函数…）…

(2) 函数是刻画现实世界数量变化关系的数学模型. 你能结合本册第5章的学习，谈谈是如何建立和求解函数模型的吗？

函数反映了事物间的广泛联系，揭示了现实世界中的运动和变化规律，现实生活中的许多实际问题诸如合理下料、最大获利、最小成本、前景预测、方案最优化问题，常常可以建立函数模型求解.

建立模型的过程，包括从现实生活或具体情境中发现并提出数学问题，然后把这一问题由普通语言转化成数学文字语言，再抽象为符号语言，识别问题中的常量和变量以及自变量和函数，利用函数的表示方法（解析法、列表法或图象法）刻画数学问题中的数量关系和变化规律，从而建立实际问题的数学模型. 然后运用相关的数学知识，对数学模型求解，最后回归到实际问题，检验数学模型的解答是否合理，从而做出实际问题的解答.

数学建模不仅是一种解决实际问题的强有力的手段，而且还是一种重要的数学思维方式，同时，求解数学模型的研究也推动了数学自身的发展.

在本次“综合与实践”活动中，你将再一次经历建立和求解数学模型的过程，体验和感受数学模型的思想方法.



观察与思考

问题：为了保持室内空气的清新，某车间的自动换气窗采用了以下设计：如图1，窗子的形状是一个五边形，它可看作是由一个矩形和一个边长与矩形的长相等的等边三角形组成的. 该窗子关闭时可以完全密封，根据室内的温度和湿度也可以自动打开窗子上的通风口换气. 通风口是一个倒立的等腰三角形，其顶点固定在矩形的底边的中点上，底边是可以沿换气窗的左右边框上下滑动且长度可自动伸缩的水平横杆. 图1、图2是通风口打开时横杆的两种不同位置.

如果已知矩形的长为2 m，高为1 m，当横杆沿窗子的边框上下平移时，通风口的最大面积是多少？

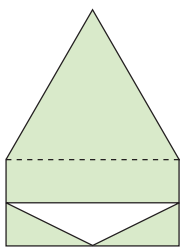


图1

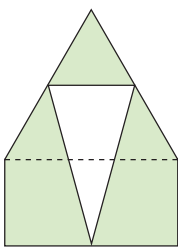


图2

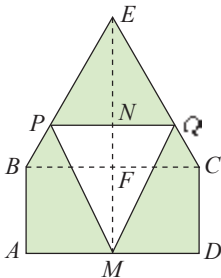


图3

(1) 为了建立数学模型，请你在上面的图形中，标出适当的字母，并结合实际问题的背景，对图形的性质进行初步的探究，你有什么发现？

以下是小亮的探究结果：

设五边形为 $EBADC$ ， M 为 AD 的中点（图3）， P ， Q 分别在边 AB ， BE 和边 DC ， CE 上，且 $PQ \parallel AD$ ，连接 EM 交 PQ 于 N ，连接 BC 交 EM 于 F .

由于四边形 $BADC$ 是矩形， $\triangle EBC$ 可看作是以矩形的一边 BC 向外作的等边三角形，根据矩形和等边三角形的轴对称性可知，五边形 $EBADC$ 是以 EM 所在直线为对称轴的轴对称图形， $\triangle MPQ$ 也是关于这条直线成轴对称的等腰三角形. 由轴对称的基本性质， EM 垂直并平分 AD ， BC 与 PQ . 当点 P 在边 AB 上移动时（图1）， $PQ \not\parallel AD$ ，当点 P 在边 BE 上移动时（图2）， $PQ \parallel AD$ ，但 PQ 的长发生变化.

(2) 在上面的问题中，如果用 S 表示 $\triangle MPQ$ 的面积，你认为 S 与哪些量的大小有关？要表示 S 的变化规律，你认为哪个量作为自变量比较合理和方便？

可以选取 $\triangle MPQ$ 的高即 MN 的长作为自变量 x , 然后把 S 表示为 x 的函数.



(3) 如何根据图 1 和图 2, 确定面积 S 与 $\triangle MPQ$ 的高 x 之间函数的表达式以及自变量 x 的可以取值的范围呢?

因为 $MF = AB = 1$, $EB = BC = 2$, $BF = AM = 1$, 所以 $EF = \sqrt{EB^2 - BF^2} = \sqrt{3}$, 从而 $EM = MF + EF = 1 + \sqrt{3}$. 由于当 PQ 沿换气窗的左右边框由 AD 滑动到 BC , 进而滑动到点 E 时, 面积 S 与高 x 的对应关系不同, 所以应当分 $0 \leq x \leq 1$ 和 $1 < x \leq 1 + \sqrt{3}$ 两种情况, 分别列出 S 与 x 的函数表达式.

(4) 根据以上的分析, 可以列出函数的表达式

$$S = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + (1 + \frac{\sqrt{3}}{3})x, & 1 < x \leq 1 + \sqrt{3}. \end{cases}$$

这便是上面实际问题中通风口的面积与它的面积之间关系的数学模型, 它是一个分段函数.

(5) 你会根据上面的分段函数的表达式, 画出这个分段函数的图象吗? 能结合图象求出函数 S 的最大值吗? 最大值在 x 取什么值时达到? 你能将根据数学模型求出的结果代回到原实际问题进行检验, 并给出实际问题的答案吗?

小莹的解答是:

在 $0 \leq x \leq 1$ 范围内, 函数是正比例函数, 图象是一条线段, 当 $x = 1$ 时取得这一范围的最大值 $S = 1$.

在 $1 < x \leq 1 + \sqrt{3}$ 范围内, 函数是二次函数, 图象是一段抛物线

$$\begin{aligned} S &= -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + (1 + \frac{\sqrt{3}}{3})x \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \left(x - \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right). \end{aligned}$$

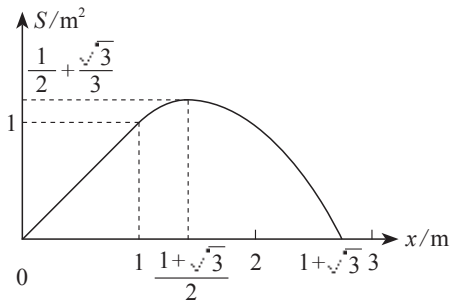


图 4

因而当 $x = \frac{1 + \sqrt[3]{3}}{2}$ (m) 时, S 取得这一范围的最大值 $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ (m^2).

因为 $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt[3]{3}}{3} > 1$, 所以函数在 $0 \leq x \leq 1 + \sqrt[3]{3}$ 整个范围内, 最大值应是两段函数的最大值中的较大者, 即 $S_{\text{最大}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ (m^2).

这就是说, 当图 3 中 $MN = \frac{1 + \sqrt[3]{3}}{2}$ m, 即 N 为 EM 的中点时, 通风口面积最大, 最大面积是 $(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt[3]{3}}{3}) \text{m}^2$. 经检验, 与实际问题相符合.

(6) 在以上建立和求解数学模型的过程中, 你运用了哪些数学知识和方法? 你对模型思想有了哪些新的体会和感受?



交流与发现

(1) 某商场为了促销, 开展购物“积分换奖品”活动, “积分”的方法是: 以百元为单位, 顾客一次购物每满 1 百元记 1 分, 不足 1 百元的部分不记分. 如果一位顾客一次购物 525 元应记多少分? 如果一次购物 899 元呢?

在这里, 如果把 525 元和 899 元都以百元为计价单位, 那么它们可分别写成 5.25 百元和 8.99 百元, 而 5 与 8 分别是这两个十进小数精确到百元的不足近似值, 取近似值的方法是去尾法 (把不足百元的尾数去掉).

(2) 在实数范围内, 任何一个数都可以写成一个整数与 0 或一个正的纯小数的和的形式. 例如 $1.5 = 1 + 0.5$, $\pi = 3 + 0.1415 \dots$, $2 = 2 + 0$, $-1.5 = -2 + 0.5$, $0 = 0 + 0$, 其中的整数叫做这个数的整数部分, 0 或正的纯小数叫做这个数的小数部分, 你能分别说出 0.5, -5 , $-\frac{1}{2}$, $-\sqrt[3]{3}$ 的整数部分和小数部分吗?

(3) 设 x 为一个实数, x 的整数部分记作 $[x]$ (可读作方括号 x), 你能利用 $[x]$ 的定义, 分别求出 $[1.8]$, $[\sqrt[3]{2}]$, $[-3]$, $[-\sqrt[3]{2}]$ 的值吗?

(4) 如果 x 是一个变量, y 是不大于 x 的最大整数, y 是 x 的函数吗? 如果是, 它的表达式可以怎样写出?

因为当 $0 \leq x < 1$ 时, $[x] = 0$;

当 $1 \leq x < 2$ 时, $[x] = 1$;

当 $2 \leq x < 3$ 时, $[x] = 2$.

.....

另一方面,

当 $-1 \leq x < 0$ 时, $[x] = -1$;

当 $-2 \leq x < -1$ 时, $[x] = -2$;

.....

所以 y 与 x 之间的函数表达式可以写成 $y = [x]$, 或写成 $y = n, n \leq x < n + 1, n$ 是整数.

函数 $y = [x]$ 叫做实数 x 的取整函数, 它是首先由德国数学家高斯提出的, 所以取整函数也称为高斯函数.

(5) 你能画出函数 $y = [x]$ 的图象吗? 观察画出的图象, 发现它有什么特征?

函数 $y = [x]$ 实际上是一个分段函数, 其图象 (图 5) 由无数条包含左端点而不包含右端点的相互平行的“线段”组成. 由于与通常意义的长度为 1 的线段相比, 它们只是少了一个点, 因此也可以把它们长度都看做是 1. 这些“线段”中, 只有一条在 x 轴上, 其余都与 x 轴平行, 且呈阶梯形依次分布在第一象限和第三象限, 相邻两条线段的距离都等于 1. 整个图象在每条“线段”的左、右端点处出现间断, 且各条“线段”左端点的横、纵坐标相等, 因此左端点都在直线 $y = x$ 上.

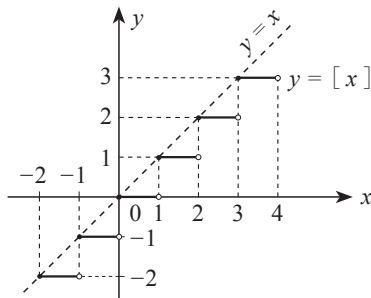


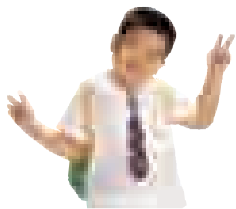
图 5

(6) 由 $[x]$ 的意义可知, $[x]$ 是不大于 x 的最大整数, $[x] + 1$ 是大于 x 的最小整数. 对任意的实数 x , 都满足不等式

$$[x] \leq x < [x] + 1. \quad \textcircled{1}$$

不等式①是取整函数的一个性质.

利用不等式①, 你会求 $[\sqrt{135}]$ 和 $[\sqrt{n^2 + n + 1}]$ (n 是正整数) 吗?



$11^2 < 135 < 12^2, 11 < \sqrt{135} < 12,$
所以 $[\sqrt{135}] = 11.$

因为 n 是正整数, 于是

$$n^2 < n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$

$$\text{所以 } n < \sqrt{n^2 + n + 1} < n+1,$$

$$\text{因此 } [\sqrt{n^2 + n + 1}] = n.$$



(7) 如果 x 满足 $[3x+2] = 5$, 你能确定 x 的取值范围吗?

利用不等式①, 问题(7)可转化为解不等式 $5 \leq 3x+2 < 6$,

$$\text{解得 } 1 \leq x < \frac{4}{3}.$$

(8) 你能写出满足 $[x] = 2x$ 的所有解吗?

因为不论 x 取何值, $[x]$ 总是整数, 由 $[x] = 2x$, 所以 $2x$ 也总是整数. 由不等式①, 问题转化为解不等式 $2x \leq x < 2x+1$, 解得 $-1 < x \leq 0$.

$\therefore -2 < 2x \leq 0$, 因为 $2x$ 是整数, 所以 $2x = -1$ 或 $2x = 0$.

$$\text{解得 } x = -\frac{1}{2} \text{ 或 } 0.$$

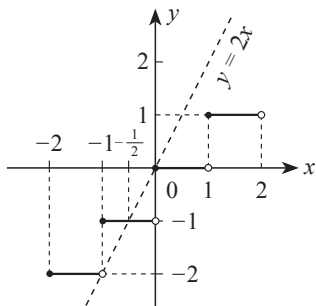


图 6

也可以借助图象求解. 在同一个直角坐标系中画出 $y = [x]$ 和 $y = 2x$ 的图象 (图 6), 它们有且只有两个交点 $(0, 0)$ 和 $(-\frac{1}{2}, -1)$, 交点的横坐标 0 或 $-\frac{1}{2}$ 就是 $[x] = 2x$ 的解.



挑战自我

(1) 利用实数 x 的整数部分 $[x]$, 你能表示出它的小数部分吗?

(2) 如果把实数 x 的小数部分记作 $\{x\}$ (可读作花括号 x), 它是 x 的函数

吗？为什么？画出小数部分函数 $y = \{x\}$ 的图象，研究它的性质（图7）；

（3）提出一个有关小数部分函数的问题，并运用已学过的数学知识加以解决。

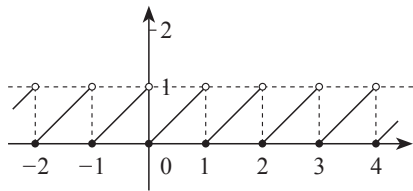
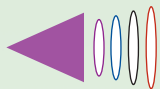


图7



广角镜

几个著名的分段函数

研究下面的问题：

若 x 是一个变量. 当 x 取 0 或正数时, 变量 y 的值是 1; 当 x 取负数时, 变量 y 的值是 -1.

（1） y 与 x 之间的关系是函数关系吗？

（2）如果是函数关系, 你能用表达式表示这个函数吗？

（3）你能画出这个函数的图象吗？

因为变量 x 在实数范围内每取一个确定的值, 另一个变量 y 都有唯一确定的值与它对应, 所以 y 是 x 的函数. 它们之间函数的表达式是

$$y = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

它的图象如图8所示.

在画这个图象时, 应注意点 $(0, 1)$ 在函数图象上, 并且是射线 $y = 1 (x \geq 0)$ 的端点, 所以这个点应描成实心圆点. 而点 $(0, -1)$ 不在函数图象上, 图象在第三象限的部分是不包括端点的“射线”, 因而 $(0, -1)$ 应画成空心圆点.

（4）想一想, 你会画出函数 $y = \frac{|x|}{x}$ 的图象吗? 这里 $|x|$ 是 x 的绝对值.

你会画出函数

$$y = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

的图象吗？

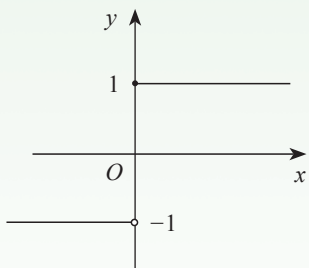


图8

这两个函数的图象与图8有什么相同点和不同点?

(5) 比上述两个函数还要奇妙的是狄利克雷函数. 德国数学家狄利克雷(Dirichlet, 1805—1859)在给出函数定义时提出了自变量 x 与另一个变量 y 之间的现代观念的对应关系. 同时, 他还提到“完全不必要求 y 按同一规律依赖于 x . 确实没有必要认为函数仅仅是用数学运算表示的那种关系.”为此, 他举出了一个著名的例子:

$$y = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

这个函数既没有通常意义下的表达式, 甚至连图象也无法画出, 但 y 的确是自变量 x 的函数. 人们为了赞赏他在函数研究上的贡献, 便以他的名字为这个函数命名, 称为狄利克雷函数.



狄利克雷



习题

- 根据取整函数的意义, 你能解决以下问题吗?
 - 从1到1 000的整数中, 有多少个数是13的倍数?
 - 从1 000到2 000的整数中, 有多少个数是87的倍数?
- 设 x 为非负实数, 将 x “四舍五入”到整数的值记为 $\langle x \rangle$ (可读作尖括号 x), 即当非负实数 x 满足 $n - \frac{1}{2} \leq x < n + \frac{1}{2}$ 时, 其中 n 为整数, 则 $\langle x \rangle = n$. 如 $\langle 0 \rangle = \langle 0.48 \rangle = 0$, $\langle 5.5 \rangle = 6$, $\langle 3.49 \rangle = 3$.
 - 如果 $\langle x+2 \rangle = 5$, 求 x 的取值范围;
 - 设 m 为非负整数, 求证 $\langle x+m \rangle = \langle x \rangle + m$;
 - 画出函数 $y = \langle x \rangle$, $x \geq 0$ 的图象;
 - 求满足 $x = \langle \frac{4}{3}x \rangle$ 的所有非负实数;
 - 设 x, y 是任意非负实数, 等式 $\langle x \rangle + \langle y \rangle = \langle x+y \rangle$ 是否成立? 如果成立, 请说明理由; 如果不成立, 举出一个反例.

第 6 章 事件的概率

内容提要

- 随机事件和确定事件
- 频数与频率
- 频数分布，频数直方图
- 随机现象的变化趋势
- 事件的概率，用频率估计概率
- 简单的概率计算
- 利用画树状图和列表计算概率

情境导航

泰山是号称五岳独尊的中国名山。在泰山极顶，当看到霞光万道，一轮红日破晓射出时，人们何等心旷神怡！

这是一幅泰山极顶日出的照片。“清晨在泰山极顶还能看到日出”是确定事件还是不确定事件？你能举出生活中确定事件和不确定事件的例子吗？你能用一个数表示一个事件发生的可能性大小吗？

6.1 随机事件



交流与发现

现实生活中经常会遇到下面的问题：

明晨在泰山极顶会看到日出吗？

明年亚洲会发生7级以上地震吗？

超市明天的营业额会比今天多吗？

一枚图钉从高处落到地面上，可能钉尖朝上，也可能钉尖触地（图6-1）.

一支铅笔从桌上落下，笔尖可能摔断，也可能摔不断.

小亮到公交车站乘车，等汽车的时间可能不到5分钟，也可能超过5分钟.

今天全校出勤的学生人数，可能与昨天相等，也可能不相等.

这些问题事先都没有确定无误的答案. 想一想，这是为什么？与同学交流.



图 6-1 图钉



排球比赛

再例如：在日常生活中，经常可以见到各种体育比赛、各种电视大奖赛、各种抽奖活动等. 这些活动的结果，事先谁都不能准确地预知，其发生的可能性与个人的愿望无关. 正因为如此，才使得这些活动悬念丛生，跌宕起伏，魅力无穷.

你还能举出生活中事先无法准确预料结果的事件吗？

上面列举的事件，可能发生也可能不发生，事先无法确定，像这种可能发生也可能不发生的事件叫做**随机事件**（random event），也叫做**不确定事件**.

现实生活中也的确存在着一些可以准确预知将会发生或不会发生的事件.

“太阳从东方升起，从西方落下”、“过了初一是初二”等都是必然会发生的事件，称为**必然事件**. 而“在一个标准大气压下，温度为 -10°C 时冰雪会融化”、

“两位同班同学的学生证号码完全相同”等都是不可能发生的事件，称为**不可能事件**.

你还能举出几个现实中的必然事件和不可能事件吗？

必然事件和不可能事件, 结果都是确定的, 统称**确定事件** (definite event).

例1 将标有数字 1, 2, 3, 4, 5 的五个乒乓球放进一个不透明的袋子中, 从中任意摸出一个球, 叫做一次试验, 读出这个球上所标的数字. 分别指出下列事件是随机事件、必然事件, 还是不可能事件, 并说明理由.

- (1) 球上所标的数字不大于 5;
- (2) 球上所标的数字大于 5;
- (3) 球上所标的数字是 3;
- (4) 球上所标的数字是偶数;
- (5) 同时摸出两个球, 球上所标的数字之和等于 6.

解 事件 (1) 是必然事件. 因为球上的数字只能是 1, 2, 3, 4, 5 中的某一个数, 不论摸出哪一个球, 球上所标的数字都不大于 5, 也就是说, 在从袋子中任意摸出一个球的试验中, 事件“球上所标的数字不大于 5”一定会发生, 所以事件 (1) 是必然事件;

事件 (2) 是不可能事件. 因为不论摸出哪个球, 球上所标的数字都不会大于 5, 也就是说, 在从袋子中任意摸出一个球的试验中, 事件“球上所标的数字大于 5”不会发生, 所以事件 (2) 是不可能事件;

事件 (3) (4) (5) 都是随机事件. 因为从袋子中任意摸出一个球时, 球上的数字可能是 3, 也可能是 1, 2, 4, 5; 可能是偶数 2, 4, 也可能是奇数 1, 3, 5; 摸出两个球时, 球上所标的数字之和可能是 6, 也可能是 3, 4, 5, 7, 8, 9. 也就是说, 这三个事件都是可能发生也可能不发生的事件, 所以这三个事件都是随机事件.

你还能通过例 1 中的摸球试验, 举出几个随机事件和确定事件的例子吗?

在现实生活中,
随机事件比确定事件
的存在更加普遍.



练习

1. 下面的事件各属于随机事件、必然事件、不可能事件中的哪一类?

- | | |
|-------------------------|---------------|
| (1) 明年 8 月 5 日广东沿海没有台风; | (事件) |
| (2) 抛掷一枚硬币, 硬币落定时正面朝上; | (事件) |

- (3) 投出铅球后, 经过一段时间铅球落到地面上; (事件)
- (4) 从一副扑克牌中任意抽出两张, 都是“红桃A”; (事件)
- (5) 买一张电影票, 排号和座号都是奇数. (事件)

2. 选择题: 下列的事件中, 不可能事件是 ().
- (A) 金鱼离开水不久便死亡
- (B) 从一个只放有 6 个红球的袋子中, 摸出一个黑球
- (C) 一辆行驶中的公共汽车, 下一站恰有 3 人上车
- (D) 弟弟的个子比哥哥高



习题6.1



复习与巩固

1. 在下列事件中, 哪些是必然事件, 哪些是不可能事件, 哪些是随机事件?
- (1) 某医院明天会有 10 名患感冒的病人就诊;
- (2) 小亮明天早上经过第一个十字路口时遇到绿灯;
- (3) 任作一个三角形, 其内角和为 180° ;
- (4) 某电子公司 5 月份生产的产品都是一等品;
- (5) 从 1, 2, ..., 10 这 10 个连续自然数中任取两个数, 其平方和大于 200.

2. 举出必然事件、不可能事件和随机事件各两个实例.
3. 甲、乙两个射手 7 次打靶的成绩如右表. 你认为“下次的打靶成绩甲比乙好”是必然事件、不可能事件, 还是随机事件?

甲	乙
9	8
8	6
7	7
8	9
8	6
9	7
8	7

(单位: 环)
(第 3 题)



拓展与延伸

4. 将一枚图钉连续抛掷 10 次, 落定后, 分别记录钉尖朝上及钉尖朝下的次数.
- (1) 哪种情况出现的次数较多?
- (2) 如果你再将图钉抛掷 10 次, 出现钉尖朝上的次数与前 10 次抛掷的结果一定一样吗?
- (3) “将一枚图钉连续抛掷 10 次, 钉尖朝上与钉尖朝下出现的次数一样多”, 是什么事件?



探索与创新

5. 下列成语，哪些刻画的是必然事件？哪些刻画的是不可能事件？哪些刻画的是随机事件？

- | | |
|-----------|--------------|
| (1) 万无一失； | (2) 胜败乃兵家常事； |
| (3) 水中捞月； | (4) 十拿九稳； |
| (5) 海枯石烂； | (6) 守株待兔； |
| (7) 百战百胜； | (8) 九死一生。 |

你还能举出类似的成语吗？

6. “从长度分别为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 的 8 条线段中随机地抽取 3 条，用它们能够组成一个三角形”是什么事件？为什么？



守株待兔
(第5题)

6.2 频数与频率



实验与探究

(1) 取 6 个质地、大小都相同的乒乓球，将其中的两个标上字母 A，两个标上字母 B，其余两个分别标上字母 C，D，然后装进一个不透明的袋子里。摇匀后从中随机地摸出一个球，有几种可能发生的结果？如果把同一种可能发生的结果看做一个事件，哪个事件发生的可能性大，哪个事件发生的可能性小？

(2) 进行了一次摸球试验后，记下摸出的球上所标的字母，把球仍放回袋中。如果重复这样的摸球试验 50 次，你能猜出将会得到怎样的结果？

(3) 进行上面的试验 50 次，分别统计出标有各个字母的球被摸到的次数。

如果把上面 50 次摸球试验所出现的全部结果看做一个总体，按 4 种可能发生的的事件，将总体分为 4 组。把 50 次摸球试验中某个事件一共发生的次数叫做该事件发生的**频数** (absolute frequency)，把该事件发生的频数与摸球试验的总次数的比值，叫做该事件发生的**频率** (relative frequency)。

(4) 利用划“正”的方法，分别统计 (1) 中各个可能发生的的事件的频数，

并计算出相应的频率，把结果填入下面的频数、频率分布表的相应空格处：

组 别	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
划 记				
频数/次				
频 率				

(5) 观察你完成的频数、频率分布表，你能得到哪些信息？从而你体会频数、频率分布表对于描述试验的结果有什么作用？与同学交流.

频数、频率分布表能集中反映出在总体中各种结果所出现的次数和所占比重的大小.



(6) 分别计算上表中各组结果的频数之和与频率之和，你有什么发现？

可以发现，将 50 次摸球试验的结果分组后，各组的频数之和等于摸球实验的总次数，各组的频率之和等于 1.

一般地，将总体中的数据按同一个标准分组后，各组数据的频数之和等于总体中数据的个数，各组数据的频率之和等于 1.

例1 时代中学就“每年过生日时，你是否会向妈妈道一声‘谢谢’”这个问题对本校 66 名同学进行了问卷调查，结果如下：

否	是	是	有时	否	是	否	是	否	有时
有时	有时	否	否	有时	有时	是	否	有时	否
有时	否	否	有时	否	是	有时	有时	有时	否
否	否	有时	有时	是	是	有时	有时	否	否
是	否	是	否	是	否	是	是	否	是
否	是	否	有时	否	是	否	否	是	否
是	是	是	否	是	否				

(1) 整理上述结果，按“是”“有时”“否”将它们分组，列出相应的频数、频率分布表（频率精确到 0.01）；

(2) 根据(1)中各组的频率, 制作相应的扇形统计图.

解 (1) 将上述调查结果, 按“是”、“有时”、“否”分为三组, 分别统计各组的频数, 计算出频率, 得到下面的频数、频率分布表:

回答内容	是	有时	否
划 记	正正正正 ^一	正正正 ^下	正正正正正 ^下
频 数	21	17	28
频 率	0.32	0.26	0.42

(2) 回答“是”的频率为 0.32, 即这一部分同学的人数占样本总数的 32%. 在扇形统计图中相应的圆心角为

$$360^\circ \times 32\% \approx 115^\circ;$$

回答“有时”的在扇形统计图中相应的圆心角为

$$360^\circ \times 26\% \approx 94^\circ;$$

回答“否”的在扇形统计图中相应的圆心角为

$$360^\circ \times 42\% \approx 151^\circ.$$

于是, 得到右面的扇形统计图 (图6-2).

通过对以上调查结果的数据分析, 你有什么感想?

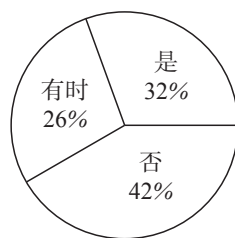


图 6-2



练习

1. 统计你班同学的出生月份 (不计年), 把结果进行整理, 按出生月份分组, 列出相应的频数、频率分布表 (频率精确到 0.01).



习题6.2



复习与巩固

1. 九年级一班对全班 40 名同学关于“自己的衣服谁来洗”进行了一次调查, 结果如下:

C A B A C D A A B A C C A B A B B A B
B D C A A D B A B A D C A A B C A A B C

其中 A 表示自己洗, B 表示有时自己洗, C 表示家里其他人帮助洗, D 表示送洗衣店洗. 列出四种结果相应的频数、频率分布表.

2. 下列数据, 是随机抽取的某居民小区 20 户居民的家庭人口数:

3, 4, 3, 3, 2, 5, 6, 6, 3, 3, 3, 5, 4, 3, 3, 3, 4, 6, 4, 3.

- (1) 按适当的标准, 将以上数据加以分组, 列出相应的频数、频率分布表;
- (2) 根据你的分组, 用扇形统计图表示出这 20 户居民家庭人口数的分布情况.

 拓展与延伸

3. 你能阅读下面的一段英文短文吗?

Every day we ask questions such as: ‘Is it going to rain today?’ ‘Will our football team win this weekend?’ ‘Will my best friend and I both be selected to represent our class?’

The answers to these questions are not straightforward.
这篇短文中共有 181 字符 (不含标点符号). 统计其中字母 e, t, s, z 出现的次数, 列出频数、频率分布表.

6.3 频数直方图

 观察与思考

小莹从气象网站上, 收集了今年 3 月上旬某一天我国 34 个城市的最低气温 (单位: $^{\circ}\text{C}$), 如下表所示:

城市	北京	哈尔滨	长春	沈阳	天津	呼和浩特	乌鲁木齐	银川	西宁	兰州	西安	拉萨	成都	重庆	贵阳	昆明	太原
最低气温 $x/^{\circ}\text{C}$	4	-1	-1	-1	4	-7	-3	-1	-4	6	4	0	10	10	10	11	0

城市	石家庄	济南	郑州	合肥	南京	上海	武汉	长沙	南昌	杭州	福州	台北	南宁	海口	广州	香港	澳门
最低气温 $x/^{\circ}\text{C}$	5	7	8	10	10	8	14	15	15	9	15	18	20	22	20	18	18

思考下列问题，并与同学交流：

(1) 如何根据表中的信息设计出一个关于上述城市当天最低气温的频数、频率分布表？

① 确定所有数据中最大值与最小值，并计算二者的差.

在上表中，各城市当天最低气温的最大值是 22°C ，最小值是 -7°C ，由此可知，当天最低气温数据的分布范围是 $-7^{\circ}\text{C} \sim 22^{\circ}\text{C}$ ，它们的差为 $22 - (-7) = 29 (^{\circ}\text{C})$.

② 确定组数、组距，并进行分组.

参照总体中数据的个数是 34，数据的最大值与最小值的差是 29，可以设定组数为 6. 由于总体中数据的最大值与最小值的差 $\div$ 组数 $= 29 \div 6 \approx 4.8$ ，为了分组方便，可取与 4.8 最相近的一个整数 5 作为组距（每组数据的上限与下限的差）. 于是可把总体数据按以下范围分为 6 组：

$-7 \leq x < -2$, $-2 \leq x < 3$, $3 \leq x < 8$,
 $8 \leq x < 13$, $13 \leq x < 18$, $18 \leq x < 23$.

其中 $-2, 3, 8, 13, 18$ 是各组的界限.

③ 列出相应的频数、频率分布表.

利用划记，统计各组中包含的最低气温数据的频数，并计算出相应的频率，填写下面的频数、频率分布表：

最低气温 $x/^{\circ}\text{C}$	$-7 \leq x < -2$	$-2 \leq x < 3$	$3 \leq x < 8$	$8 \leq x < 13$	$13 \leq x < 18$	$18 \leq x < 23$
划 记				正正	正	
频 数				9	4	
频 率				0.26	0.12	0.18



加油站

将数据进行分组时，组数的多少应适当，组数太少，不能充分显示数据的分布情况；组数太多，不仅繁琐，且容易把性质相近的同类数据分散到各组，从而也不能正确显示数据分布的特征和规律. 一般地，数据在 100 个以内，可按情况分为 5~12 组.

(2) 怎样根据列出的频数、频率分布表, 制作相应的条形统计图?

用横轴表示最低气温, 纵轴表示频数, 在横轴上先标出各组的上限和下限. 由于分组时各组的组距相等, 并且各组的界限既不重叠又不间断, 标注界限时应注意各组的组距相等, 自左向右气温由低到高连续排列, 相邻的两组之间没有间隔. 这样就在横轴上标出了首尾相连的6条线段. 注意由于这里横轴的原点没有标出, 所以纵轴的原点不是横轴的原点. 然后分别以各组的上下限为端点的线段为宽、以各组的频数为高, 向上分别作6个矩形条, 便得到图6-3.

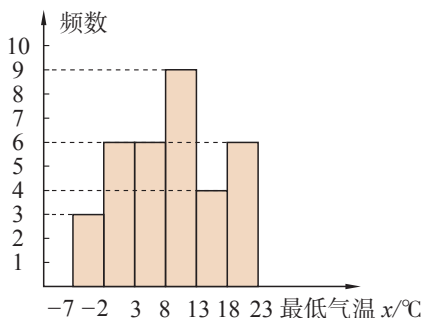


图 6-3

通过图6-3, 你能得到数据中蕴含的哪些信息? 你能看出总体中三月上旬34个城市的最低气温的分布情况吗? 与同学交流.



通过图 6-3, 可以直接比较各组的频数的差异, 即一个组内城市的个数与另一个组内城市的个数相差几个.

可以看出该天最低气温在 8°C ~ 13°C 之间的城市最多, 有 9 个城市, 而且该组相应的小矩形在直方图的中间位置, 这些城市都分布在我国地理纬度的中部地区和西南地区.



像图6-3这样根据频数的分布绘制的条形统计图叫做**频数直方图**.

例1 时代中学为了了解全校学生参加课外锻炼的情况, 抽样调查了50名学生一周内平均每天参加课外锻炼的时间(单位: min), 将抽查得到的数据分成5组, 下面是尚未完成的频数、频率分布表:

组 别	分 组	频数 (人数)	频 率
1	$10 \leq t < 20$	5	
2	$20 \leq t < 30$		0.22
3	$30 \leq t < 40$	20	
4	$40 \leq t < 50$		
5	$50 \leq t < 60$		0.04

- (1) 将表中空格处的数据补全，完成上面的频数、频率分布表；
- (2) 画出相应的频数直方图；
- (3) 这 50 名学生中，平均每天参加课外锻炼时间不少于 30 min 的有多少人？如果该校有 2 000 名学生，估计全校每天参加课外锻炼时间不少于 30 min 的人数.

解

(1) 由样本中数据的个数为 50，可求得第 1 组的频率为 $\frac{5}{50} = 0.1$ ，第 3 组频率为 $\frac{20}{50} = 0.40$ ；第 2 组的频数为 $50 \times 0.22 = 11$ ，第 5 组的频数为 $50 \times 0.04 = 2$.

由此可知，第 4 组频数为 $50 - (5 + 11 + 20 + 2) = 12$ ，频率为 $\frac{12}{50} = 0.24$.
将以上数据补入频数、频率分布表，得

组 别	分 组	频 数	频 率
1	$10 \leq t < 20$	5	0.1
2	$20 \leq t < 30$	11	0.22
3	$30 \leq t < 40$	20	0.40
4	$40 \leq t < 50$	12	0.24
5	$50 \leq t < 60$	2	0.04

- (2) 利用 (1) 中完成的频数分布表，在直角坐标系中画出相应的频数直方图 (图 6-4).
- (3) 这 50 名学生中平均每天参加课外锻炼时间不少于 30 min 的为第 3, 4, 5 组学生，合计为 $20 + 12 + 2 = 34$ (人)，该三组数据的频率为 0.68，由此可以估计全校学生平均每天参加课外锻炼时间不少于 30 min 的约为 $2\,000 \times 0.68 = 1\,360$ (人).

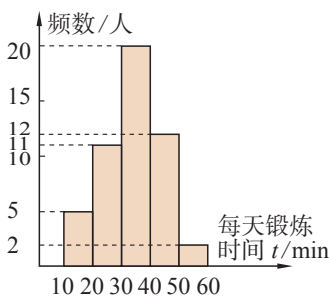


图 6-4



练习

1. 从九年级一班学生中选举 1 名代表参加市毕业生座谈会，选举结果如下表所示：

被选人	小莹	小亮	大刚	吴勇	李大为	合计
划 记	正正正	正正正正正	正	正	正	
频 数						
频 率						

请完成上面的频数、频率分布表，并画出频数直方图.

例2 九年级一班开展“孝敬父母，帮做家务”的活动，班主任老师统计了全班 50 名学生在上周中做家务的时间，并把结果分为如下的 5 组，制作了扇形统计图（图 6-5）：

A 组： $2.5\text{ h} \leq t < 3\text{ h}$ ，B 组： $2\text{ h} \leq t < 2.5\text{ h}$ ，
C 组： $1.5\text{ h} \leq t < 2\text{ h}$ ，D 组： $1\text{ h} \leq t < 1.5\text{ h}$ ，
E 组： $0.5\text{ h} \leq t < 1\text{ h}$.

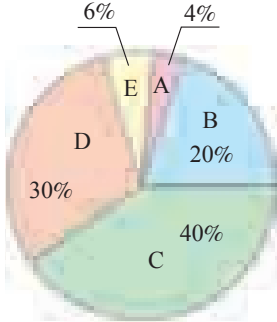


图 6-5

- (1) 请按照以上分组列出相应的频数、频率分布表，并画出频数直方图；
- (2) 估计该班学生在这次活动中做家务的平均时间；
- (3) 该班学生上周做家务时间的中位数落在哪个小组内？说明理由.

解 (1) 由题目中的信息，可知共分为 5 组，组距为 0.5 h. 各组的频率依次为 0.04, 0.2, 0.4, 0.3, 0.06；总体数据的个数为 50. 分别计算出各组的频数，得

A 组： $50 \times 0.04 = 2$ ；B 组： $50 \times 0.2 = 10$ ；C 组： $50 \times 0.4 = 20$ ；D 组： $50 \times 0.3 = 15$ ；E 组： $50 \times 0.06 = 3$.

由此可以列出频数、频率分布表：

组 别	做家务时间 t/h	频 数	频 率
A	$2.5 \leq t < 3$	2	0.04
B	$2 \leq t < 2.5$	10	0.2
C	$1.5 \leq t < 2$	20	0.4
D	$1 \leq t < 1.5$	15	0.3
E	$0.5 \leq t < 1$	3	0.06

根据上表，画出频数分布直方图（图6-6）.

（2）取各组做家务时间的下限与上限的中间值（组中值）近似地表示该组学生上周做家务的平均时间. 例如取E组数据的上限与下限的平均数 $\frac{0.5+1}{2} = 0.75$ （h）近似地表示E组学生上周做家务的平均时间，从而该班学生平均做家务的时间可按照加权平均数的计算方法，估计为

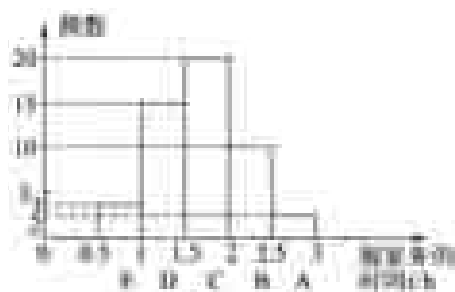


图 6-6

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{0.75 \times 3 + 1.25 \times 15 + 1.75 \times 20 + 2.25 \times 10 + 2.75 \times 2}{50} \\ &= 1.68 \text{ (h)}.\end{aligned}$$

因为50名学生每人做家务的时间并没有真正计入，所以这里 $\bar{x}$ 只是实际平均数的近似值.



（3）因为总体数据的个数为50，且在分组时将50个数据（学生做家务时间）按由大到小的顺序排列，所以该班学生上周做家务时间的中位数是第25名学生与第26名学生做家务时间的平均数，由频数、频率分布表可知，落入A，B两组的数据个数共 $2 + 10 = 12$ （个），落入C组的数据为20个，故中位数应落入C组内.



挑战自我

在上面问题（2）中，如果取该班学生做家务时间的上、下限的平均数，即 $\frac{0.5 + 3}{2} = 1.75$ （h），作为全班学生上周做家务的平均时间的估计值，你认为合理吗？为什么？



练习

1. 天泉村秋收前对玉米进行估产，从农田中随机抽取了 100 株玉米，分别称得每株玉米的产量如下（单位：kg）：
- 0.25, 0.14, 0.16, 0.18, 0.14, 0.15, 0.19, 0.20, 0.13, 0.10,
0.17, 0.14, 0.17, 0.16, 0.14, 0.09, 0.09, 0.14, 0.16, 0.15,
0.15, 0.25, 0.12, 0.18, 0.18, 0.20, 0.19, 0.17, 0.13, 0.10,
0.19, 0.18, 0.19, 0.12, 0.14, 0.11, 0.09, 0.10, 0.13, 0.12,
0.14, 0.22, 0.11, 0.24, 0.19, 0.13, 0.16, 0.19, 0.12, 0.13,
0.17, 0.12, 0.16, 0.22, 0.20, 0.13, 0.25, 0.17, 0.20, 0.10,
0.18, 0.16, 0.17, 0.09, 0.14, 0.13, 0.14, 0.15, 0.20, 0.12,
0.17, 0.15, 0.19, 0.15, 0.20, 0.09, 0.18, 0.22, 0.12, 0.12,
0.16, 0.17, 0.18, 0.23, 0.20, 0.12, 0.17, 0.18, 0.20, 0.10,
0.19, 0.17, 0.16, 0.17, 0.17, 0.12, 0.15, 0.13, 0.08, 0.16.
- （1）将以上数据适当进行分组，列出相应的频数、频率分布表，并画出频数直方图；
（2）从频数直方图中你能了解哪些信息？



习题6.3



复习与巩固

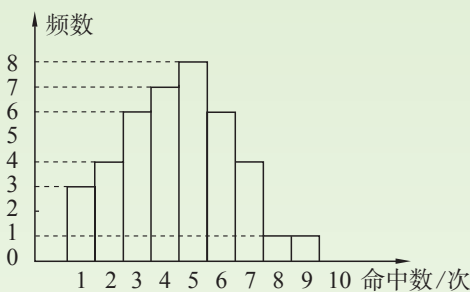
1. 某电信部门为了解用户使用家庭电话的情况，随机地抽取了 56 户在同一周内打出电话的次数：
- 80, 89, 72, 72, 10, 23, 13, 67, 28, 15, 66, 36, 12, 72, 63, 48, 25, 67,

28, 52, 42, 2, 53, 69, 78, 54, 17, 52, 7, 55, 33, 27, 50, 24, 2, 49, 57, 34, 23, 59, 17, 56, 44, 16, 62, 5, 51, 3, 61, 35, 58, 33, 64, 8, 50, 21.

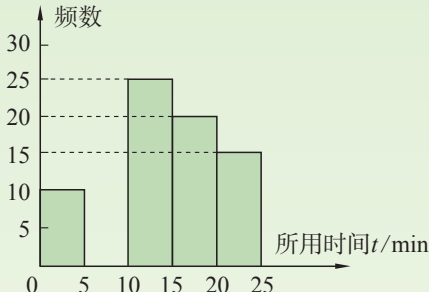
将上述数据适当进行分组，列出相应的频数、频率分布表，并画出频数直方图.

2. 时代中学部分学生举行投篮比赛，每人投篮 10 次. 如图所示是将比赛结果整理后，画出的频数直方图.

- (1) 共有多少学生参加比赛？
- (2) 投篮命中数在 5 次以上的学生与参赛人数的比是多少？
- (3) 投篮命中数的平均数、中位数、众数和方差分别是多少？



(第 2 题)



(第 3 题)

 拓展与延伸

3. 某银行为改进服务，随机调查了 100 名储户等待办理业务所用的时间 t (单位: min). 下面是这次调查统计分析得到的频数、频率分布表，上图为频数直方图.

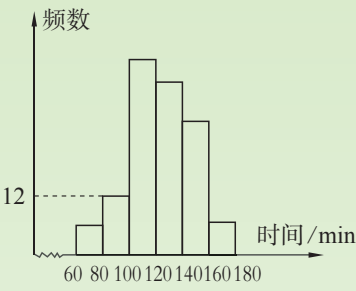
组 别	1	2	3	4	5
等待时间	$0 \leq t < 5$	$5 \leq t < 10$	$10 \leq t < 15$	$15 \leq t < 20$	$20 \leq t < 25$
频 数	10			20	
频 率		0.3	0.25		0.15

- (1) 在上表中填写所缺数据；
- (2) 补全频数直方图；
- (3) 据调查，顾客对等待办理业务时间的满意度如下表所示：

等待时间/min	顾客满意度
$0 \leq t < 10$	满意
$10 \leq t < 15$	基本满意
$15 \leq t < 25$	不满意

请结合频数、频率分布表或频数直方图画出该次抽样调查顾客满意度的扇形统计图.

4. 时代中学为了解九年级学生星期日参加户外活动的
时间, 随机抽取了部分同学进行调查, 并把结果分
为6组, 绘制了如图所示的频数直方图. 自左向右分
别代表第1, 2, …, 6组, 各组活动时间都包括下
限而不包括上限. 已知前两组频率之和为0.12, 活动
时间不少于80 min的同学占96%, 第2, 3, 4组的
频数之比为4 : 17 : 15. 根据以上信息, 回答下列问
题:



(第4题)

- (1) 这次共调查了多少人?
- (2) 活动时间不少于140 min的有多少人?

 探索与创新

5. 八位数12 345 679有两个特点: 一是各数位上所出现的数字不重复; 二是各数位上出现的数字中缺少数字“8”. 像这样的数, 人们称为“缺8数”, 它有一些奇妙的性质. 请你用计算器分别计算“缺8数”与几个整数的乘积:

$12\ 345\ 679 \times 1 =$ _____ , $12\ 345\ 679 \times 2 =$ _____ ,
 $12\ 345\ 679 \times 4 =$ _____ , $12\ 345\ 679 \times 5 =$ _____ ,
 $12\ 345\ 679 \times 7 =$ _____ , $12\ 345\ 679 \times 8 =$ _____ ,
 $12\ 345\ 679 \times 11 =$ _____ .

- (1) 观察上面每个乘式的积, 都是缺8数吗?
- (2) 把上面所有乘积中各数位上出现的数字看作一组数据, 分别统计数字1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0在这组数据中出现的频数, 填写下面的频数、频率分布表:

数 字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
划 记										
频 数										
频 率										

- (3) 观察上表, 你发现了什么结论? 从而你体会数据分析方法对于发现问题和解决问题有什么作用?

6.4 随机现象的变化趋势



实验与探究

(1) 你认为青少年的身高与体重有关系吗？如果有，它们之间的关系是正比例关系吗？是函数关系吗？

为了研究这个问题，九年级一班数学兴趣小组随机抽取了本班 13 名男生，测量出他们的身高（单位：cm）和体重（单位：kg），得到了下表中的两组数据：

身高/cm	153	147	153	145	170	174	165	170	159	180	172	162	170
体重/kg	41	45	48	42	60	71	52	64	56	68	67	48	51

(2) 为了研究这个样本的身高和体重之间的关系，怎样才能将上表中的两组数据直观地表示出来呢？与同学交流.



能把每人的身高和体重分别作为点的坐标，在直角坐标系中描出对应的各点，然后通过观察这些点的分布情况探究它们之间的关系吗？

如果要建立直角坐标系，怎样确定横轴和纵轴所代表的意义以及它们的度量单位呢？



(3) 分别找出表中身高与体重数据的最大值和最小值，你能由此确定 13 名男生身高与体重的范围吗？这对于我们画出直角坐标系有什么帮助呢？

上表中这些男生的身高范围是 145 cm ~ 180 cm，体重范围是 41 kg ~ 71 kg. 可以设想，在画直角坐标系时，应当适当选择度量单位，使身高和体重的范围在坐标轴上的位置居中，从而使根据表中的数据描出的各点，离坐标轴不至于

太远,以便于观察.对于这些范围之外的部分,由于没有已知的数据,不必留出过多空间.

(4) 根据(3)中的讨论,画出直角坐标系(图6-7).用横轴表示身高(cm),纵轴表示体重(kg).由于13名学生的身高数据的范围是145 cm~180 cm,可在横轴上先标出了一个比它略大一些的范围140 cm~190 cm.确定范围的端点后,将该线段5等分.将各分点自左向右依次标上刻度140,150,160,170,180,190.类似

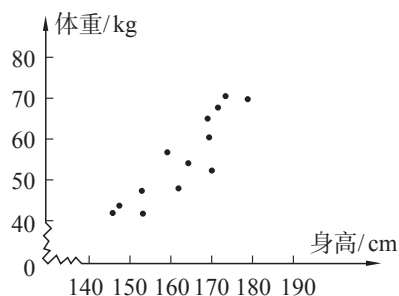


图 6-7

地,在纵轴上标记出40,50,60,70,80.横轴与纵轴的公共原点记为0.在两个坐标轴上,0与横轴上的刻度140以及纵轴上刻度40之间的部分通常画成破格线,以表示数值的连接.

(5) 在画出的直角坐标系中,将上表中每位男生的身高和体重数据作为一个有序数对,在坐标系中,描出上述13个有序数对所对应的点(图6-7).



加油站

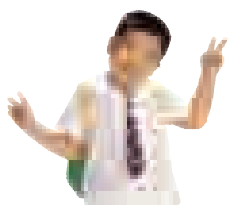
图6-7中,两个坐标轴的单位长度不同,表示的意义也不同.但是只要刻度之间的比例关系一致,坐标系中的点所表达的意义就是合理的.因此,在确定坐标轴的单位长度时,要注意具体问题具体分析.



观察与思考

(1) 观察图6-7,找出样本中个子最高的同学所对应的点,他的体重是多少?他的体重是样本中最重的吗?个子最矮的同学的体重是多少?他的体重是样本中最轻的吗?

(2) 在上述样本中,有没有身高相同的同学?如果有,他们的体重也相同吗?在直角坐标系中,你发现他们的数据所对应的点有什么特征?



我发现身高170 cm的有三位同学,他们的体重分别是51 kg, 60 kg, 64 kg.看来身高并不能确定体重,因此体重与身高之间不是函数关系.

在上面的问题中,如果把样本的身高看作一组随机变化的量,将样本的身高按从小到大的顺序排列,从图 6-7 可以看出样本的体重与身高之间具有某种相关关系.这些点的位置具有一定的随机性,但大体上分布在一个带形区域内.这就是说,这些男生的体重与身高之间的关系虽然不是函数关系,但随机抽样的数据显示,二者之间并非毫无关联,而有一定的规律,即体重随着身高的增加呈现一种线性的增长趋势.

(3) 在图 6-7 中,怎样用一条直线近似地表示体重随身高的增长趋势?

小亮和小莹在图 6-7 中分别画出了直线 a 和 b (图 6-8).比较他们所画出的直线,你认为哪条直线更合适一些?

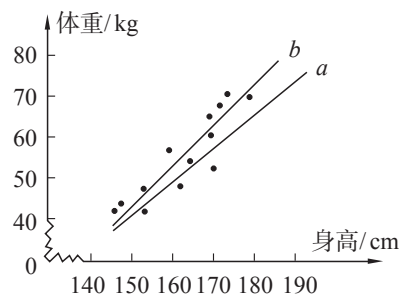


图 6-8

一方面,这些点的分布应大致分布在所画出的直线的两侧,对于直线 a 来说,有 10 个点在它的上方,有 3 个点在它的下方;而对于直线 b ,有 7 个点在它的上方,6 个点在它的下方;另一方面,各点到直线 b 的距离整体上比到直线 a 的距离要小.相比而言,直线 b 要比直线 a 更合适.



加油站

由于画出的直线只是近似地表示图中各点的变化趋势,所以实际上还可以画出很多条直线,有没有比直线 b 更“合适”的直线?怎样比较精确地确定“合适”的直线?这类问题将在高中阶段的学习中去解决.

这就是说,直线 b 能够更近似地代表图 6-8 中各点的分布,因此它比直线 a 能更好地反映样本中男生的体重与身高的相关关系.

例1 某超市随机抽取了 12 天的日利润与日营业额,如下表所示:

日营业额/万元	14.1	5.1	8.0	7.2	5.8	12.3	9.8	10.8	9.3	15.1	4.2	13.2
日利润/万元	2.8	1.0	1.4	1.3	1.4	2.2	2.0	1.8	1.9	2.3	1.1	2.3

(1) 在直角坐标系中,用横轴表示日营业额、纵轴表示日利润,描出上述 12 个数对对应的数据点;

(2) 在坐标系中,画出一条直线,使它能近似地反映样本中日利润与日营业额的相关关系;

(3) 估计这家超市的日营业额为16万元时, 日利润大约多少万元?

解

(1) 将12对数据对应的点描在如图6-9所示的直角坐标系中.

(2) 在这个坐标系中画出一条较“合适”的直线(图6-9).

(3) 在这条直线上取横坐标为16的点, 其纵坐标为2.8. 所以由此估计当这家超市日营业额为16万元时, 日利润约为2.8万元.

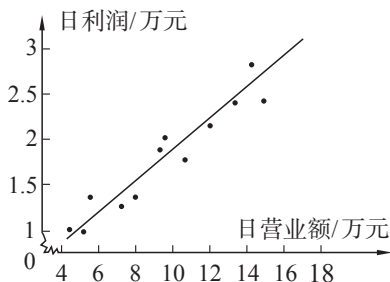


图 6-9



广角镜

随机现象中变量之间的相关关系

在客观世界中, 相互联系的随机现象中变量之间的相关关系存在两种不同的类型: 一种是变量之间具有严格的依存关系, 即对于某一个变量的取值, 另一个变量都有确定的值与它对应. 这种关系, 即通常所说的函数关系. 如在价格不变的情况下, 一种商品的销售额与商品销售量之间的关系; 在银行利率不变的情况下, 储户利息与本金的关系等. 另一种类型则是相关关系, 对于其中一个变量随机产生的数据确定以后, 另一个变量与它相关的值却不能完全确定, 然而它们之间又遵循某种客观规律. 例如粮食产量与作物的施肥量之间的关系, 在一定范围内, 施肥量多, 农作物的产量就高, 但是不能由施肥量完全确定农作物的产量; 人的年龄和他的身高、体重的关系, 家庭收入水平与支出的关系, 商店的销售额与顾客人数的关系等都属于这种类型. 对于这种相关关系进行分析时, 常常利用图象及某个函数关系的表达式作为研究随机现象之间关系的数学模型. 如本节的例子是用某个一次函数(其图象为直线)来近似表达学生体重与身高的关系以及超市日利润与营业额之间的关系. 当然客观世界随机现象之间的相关关系是非常复杂的, 仅用一次函数的模型是不够的, 有些情况还往往涉及其他类型的函数模型.

对于变量之间的相关关系的研究始于英国生物学家、统计学家高尔顿(Galton, 1822—1911). 1877年, 他在研究人类身高的遗传问题时, 发现矮个子父亲的儿子平均身高往往比父辈高, 但比本种族的平均身高矮; 高个子父亲的儿子平均身高比父辈矮, 但高于本种族的平均身高. 由此他得到儿子的身高有返回本种族平均身高的趋势. 他把这一现象称为“回归”, 后来又引进了线性回归、非线性回归等.

对随机现象之间相关关系的分析广泛地应用于工农业生产、科学研究、社会科学及经济管理等领域，是一种重要的统计方法.



练习

- 1. 在例 1 中，当产品日营业额为 9 万元时，日利润大约为多少万元？
- 2. 以下是某企业某种产品的销售额与所投入的广告费的数据资料：

广告费/万元	5	4	8	2	5	7
销售额/万元	50	40	70	30	60	70

在直角坐标系中，描出有序数对（广告费、销售额）对应的点，并试用一条直线近似地反映销售额与广告费之间的相关关系.

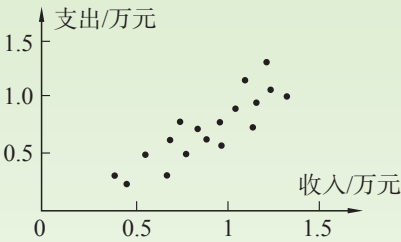


习题6.4



复习与巩固

- 1. 某小区随机抽查了 18 户居民在去年第四季度的收入与消费支出的情况，画出了如图所示的数据图. 在图中画出能近似地表示这些居民支出与收入的相关关系的一条直线.



（第 1 题）

- 2. 山青林场为了了解某种乔木的树高与胸径（指乔木离地面 1.3 m 处的直径）的关系，随机抽取了 10 株，统计了它们的树龄，并测量了它们的胸径，结果如下表所示：

树龄/年	15	10	10	35	30	25	25	20	35	15
胸径/cm	15.0	11.1	10.8	33.6	29.1	24.3	24.9	19.8	33.0	15.9

在直角坐标系中，描出表中各有序数对（树龄，胸径）对应的点. 画出能近似地反映胸径与树龄之间相关关系的一条直线，并利用这条直线估计树龄为 40 年的这种乔木的胸径.



拓展与延伸

- 3. 查阅 2001 ~ 2010 年我国进出口总量（单位：亿元）与国内生产总值（GDP）的资料，利用在直角坐标系中描点刻画二者的相关关系，并用直线近似地表示发展趋势.



探索与创新

4. 某厂产品的产量与单位成本在本年度前三季度的资料如下表所示：

月 份	产量 x /千件	单位成本 y /(万元/千件)
1	29	5.3
2	28	5.1
3	28.5	5.4
4	29.5	4.93
5	30	4.82
6	31	4.75
7	32	4.5
8	32.5	4.45
9	33	4.42

- (1) 在直角坐标系中，用横轴表示产量、纵轴表示单位成本，描出各有序数对（产量，单位成本）对应的点；
- (2) 画出能近似地表示产量与单位成本之间相关关系的一条直线. 观察这条直线，探索随着产量增加，单位成本发生怎样的变化；
- (3) 估计当产量为 34 千件时，单位成本是多少万元？
- (4) 所画的直线与本节例题中的直线有什么不同？

6.5 事件的概率



实验与探究

(1) 你做过掷币试验吗？任意抛掷一枚质地均匀的硬币，落定后朝上的一面有两种可能结果：或者是正面或者是反面. 猜一猜，出现正面朝上的可能性大还是反面朝上的可能性大？

我猜测出现正面朝上与出现反面朝上的可能性一样大，因为我曾做过两次掷币试验，结果是一次正面朝上，一次反面朝上.



(2) 你同意小亮的说法吗? 请你也做两次掷币试验, 看与小亮的试验结果是否一致? 试一试, 并与同学交流.

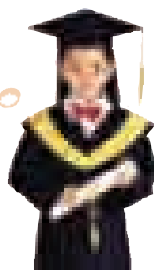


做两次掷币试验, 有的同学与小亮的结果一致, 有的不一致. 我抛掷的结果是两次都是正面朝上, 还有的同学两次都是反面朝上. 虽然我也猜测出现正面和反面的可能性一样大, 但看来只凭两次试验的结果不能说明这个结论.

(3) 为了验证任意抛掷一枚硬币后, 出现正面朝上与反面朝上的可能性相等, 你认为还需要做多少次试验? 做10次可以吗?

(4) 每人做10次抛掷硬币的试验, 记录出现正面朝上的次数, 并与同学交流试验的结果, 你发现每人的试验结果是否一样? 从而你认为能用10次抛掷的结果解释小亮的猜测吗?

抛掷一枚硬币, 落定后出现“正面朝上”和“反面朝上”都是随机事件, 每人抛掷10次, 这10次出现的结果也是随机的. 还不足以说明出现“正面朝上”和“反面朝上”的机会是否一样多. 为此, 必须做大量的重复试验.



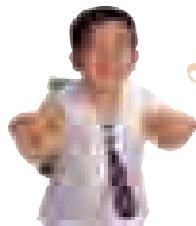
(5) 请大家重复进行50次掷币试验.

每两名同学作为一组. 试验时, 每人各做抛掷硬币试验25次, 同时另一人用划记法记录试验的次数和出现正面朝上的频数.

将全班各小组50次试验的结果在黑板上进行统计, 分别计算各组50次试验中出现“正面朝上”的频率 $\frac{m}{n}$, 把统计结果填入下表:

组别	1	2	3	4	5	...
试验次数 (n)	50	50	50	50	50	...
正面朝上的频数 (m)						...
正面朝上的频率 ($\frac{m}{50}$)						...

(6) 观察完成后的上表, 你发现各组试验的结果是否一致? 你能给出合理的解释吗? 你认为通过 50 次试验, 能说明掷币试验中出现正面朝上和反面朝上的可能性一样大吗? 如果还无法说明, 除了各组可以继续重复试验外, 利用表中已有的数据, 能进一步探索当试验次数继续增加时, 出现“正面朝上”与“反面朝上”的可能性一样大吗?



由于每次出现的结果都是随机的, 所以各组得到的数据不一致, 也都是随机的. 能不能按小组顺序逐次累加 2 个、3 个、4 个…小组的试验数据, 这不就相当于做了 100 次、150 次、200 次…试验了吗?

小亮的想法有些道理, 但需要改进, 按小亮的意见, 因为每次累加都把第 1 小组的数据算进去, 而其他小组的数据越靠后累加的次数越少, 这样利用数据不公平.



(7) 为了统计试验 100 次、150 次、200 次…的结果, 你能设计一个公平使用各组试验数据的方案吗? 与同学交流.

将全班各小组的编号分别写在纸签上, 放到一个不透明的袋子里, 并充分搅匀. 推选一名同学, 从袋子中先随机地抽出两个纸签, 分别读出纸签上小组的编号, 将这两个小组的试验数据相加, 填写在下表的左数第 1 列中:

试验次数 (n)	100	150	200	250	300	...
正面朝上的频数 (m)						...
正面朝上的频率 ($\frac{m}{n}$)						...

然后把这两个纸签卷好, 重新放回纸盒搅匀, 由另一名同学从袋子中随机抽取 3 个纸签, 得到三个小组的数据, 相加后填入表中左数第 2 列, 再把三个纸

签放回. 这样继续做下去, 随着数据的不断增加, 你发现频率 $\frac{m}{n}$ 有什么规律?

(8) 建立如图 6-10 所示的直角坐标系. 用横轴表示试验的次数, 纵轴表示频率 $\frac{m}{n}$, 按照 (7) 中列出的表格, 在坐标系中描出点 $(n, \frac{m}{n})$:

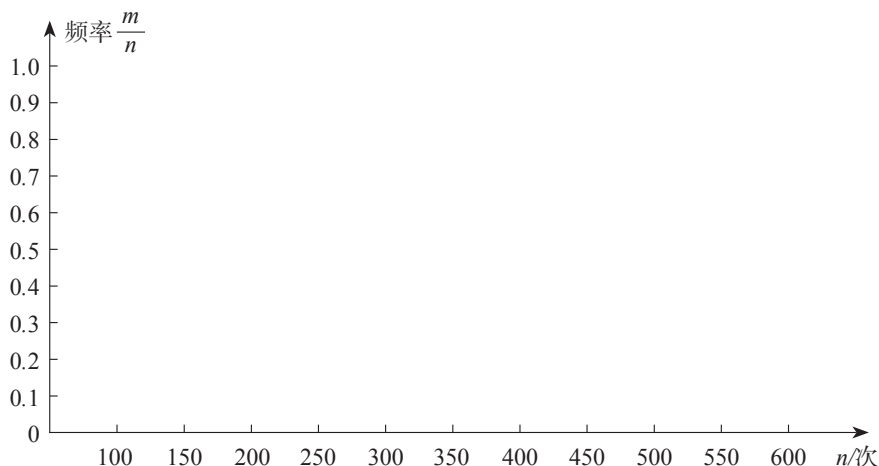


图 6-10

观察图 6-10 中描出的各点, 你发现通过大量的重复试验, 随着试验次数 n 的增加, 频率 $\frac{m}{n}$ 的变化情况有什么规律? 由此你能得出什么结论?

对于每一次掷币试验, “正面朝上”的结果可能发生也可能不发生, 但随着试验次数 n 的增加, “正面朝上”的频率 $\frac{m}{n}$ 总在一个固定的数值 $\frac{1}{2}$ 附近波动, 表现出一定的稳定性. 从而可以推断抛掷一枚质量均匀的硬币, 出现“正面朝上”的可能性为 $\frac{1}{2}$. 这就是说, 出现正面朝上和正面朝下是等可能性的.

(9) 类似地, 你还可以与同学们再做一个猜球游戏. 在一个不透明的袋子里放有质地和大小都相同的红色和白色的乒乓球, 共 6 个, 如果事先不知道其中有几个红球. 利用摸球试验, 即每次从袋子中摸出一个球, 看清它的颜色后再将球放回. 经过大量的重复试验, 能否利用事件“摸出红球”的频率, 估计出袋子里的红球个数? 试一试.

由于袋子中球的总数和红球的个数都是固定的, 通过大量的重复试验, 你会发现随着试验次数 n 的逐渐增加, 摸出红球的次数 m 与试验次数 n 的比值, 即

摸出红球的频率 $\frac{m}{n}$ 会表现出一定的稳定性, 并在某个固定的数值附近波动, 由此估计出袋子中红球的个数.

例如, 频率 $\frac{m}{n}$ 的值在 $\frac{1}{3}$ 附近波动, 由此可以知道事件“摸出红球”发生的可能性是 $\frac{1}{3}$, 于是可估计出袋子里的 6 个球中有 2 个红球, 由此还可推断另外 4 个是白球.

一般地, 一个事件发生的可能性的的大小可以用一个数来表示, 我们把这个数叫做这个事件发生的**概率** (probability), 通常记为 P (事件). 在进行大量重复试验时, 随着试验次数的增加, 一个随机事件发生的频率总在这个事件发生的概率附近波动, 显示出一定的稳定性. 从而可以用事件发生的频率估计事件发生的概率.

在掷币试验中, $P(\text{正面朝上}) = \frac{1}{2}$, 摸球试验中, $P(\text{摸出红球}) = \frac{1}{3}$.

一个事件发生的频率是已发生的, 也是可测的, 而这个事件发生的概率是某个客观存在的确定的数值, 但可能事先并不知道, 用频率来估计概率可以实现由已知去探求未知, 从偶然中去发现必然, 它蕴含了一种深刻的数学思想.



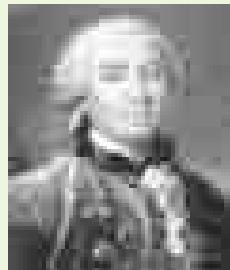
史海漫游

布丰的投针试验

我们知道, 圆周率 π 是一个无理数, 它等于圆的周长与其直径之比. 古代数学家曾在计算圆内接或外切正多边形的周长与圆的直径的比时, 发现当正多边形边数不断增加时, 这个比值越来越接近一个常数, 从而求出 π 的近似值. 然而, 你是否知道 π 的值还可以用一项“神奇”的投针试验而得到?

阅读下面的一则数学故事:

布丰 (Buffon, 1707—1788) 是法国数学家、自然科学家. 布丰经常搞出点有趣的实验让朋友们感到惊奇. 据说 1777 年的一天, 布丰又约朋友们去他家做客. 他拿出了一把小针, 在一张大的白纸上让一位朋友按相邻两条平行线的距离等于针长两倍的要



布 丰

求画满平行线. 然后, 布丰说: “请诸位把这些小针往纸上随便扔吧.” 于是客人们好奇地把小针一根根地往纸上乱扔. 然后布丰与大家一起统计出投针的次数共 2 212 次, 其中小针与平行线相交了 704 次, 用 2 212 除以 704, 得数为 3.142. 他笑着说: “这正是圆周率 π 的一个近似值!” 众宾客一片愕然: “圆周率 π ? 投针结果与 π 沾不上边啊?” 布丰满有把握地说: “诸位不必怀疑, 只要你有耐心, 投掷的次数比较多, 试验的次数与针落在平行线上次数的比值总会是 π 的一个近似值.” 这就是历史上著名的布丰“投针试验”.

这个试验揭示了频率与概率之间所存在的必然联系: 在纸上画出一组平行线, 用一根长度为线间距离一半的针随机地抛到纸上 (图 6-11), 如果用 n 表示投针的次数, 用 m 表示针与直线相交的频数, 频率为 $\frac{m}{n}$. 布丰证明, 针与直线相交的概率为 $\frac{1}{\pi}$, 当抛掷次数大量增加时, 频率 $\frac{m}{n}$ 在 $\frac{1}{\pi}$ 附近波动, 也就是说 $\frac{n}{m}$ 在 π 附近波动. 历史上, 还有不少数学家多次重复投针试验, 下表是他们的试验结果.

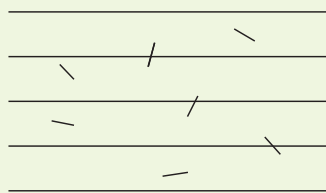


图 6-11

实验者	年代	投掷次数	得出 π 的近似值
沃尔夫	1850	5 000	3.159 6
史密斯	1855	3 200	3.155 3
德·摩根	1880	600	3.137
福克斯	1884	1 100	3.141 9
赖纳	1925	2 520	3.179 5

布丰投针试验是用几何形式表达概率问题的首例, 开创了用随机数据处理确定性数学问题的方法.



练习

- (1) 连续抛掷一枚均匀的硬币, 如果落定后, 3 次都是正面朝上, 那么第 4 次一定正面朝上吗? 一定反面朝上吗? 第 4 次出现正面朝上的可能性有多大?
- (2) 连续抛掷一枚均匀的硬币 10 次, 落定后, 如果出现 7 次正面朝上、3 次反面朝上, 能断定连续抛掷 100 次, 一定会有 70 次正面朝上、30 次反面朝上吗?

例 1

某林场要考察一种树苗移植后的成活率, 对这种树苗移植后成活情况进行跟踪调查, 并将结果经过整理后, 根据选取不同容量的样本得出的成活

频率，绘制成如图 6-12 所示的统计图，根据图 6-12 回答下面的问题：

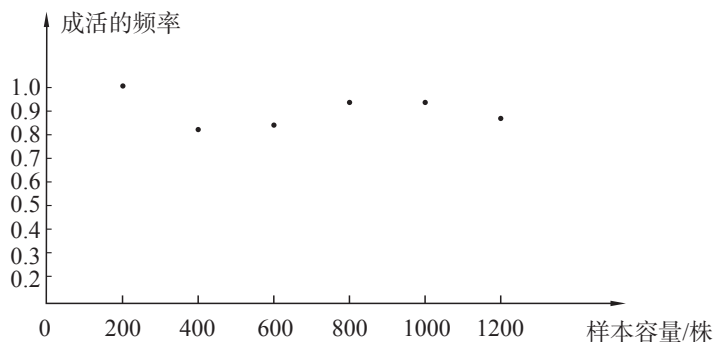


图 6-12

(1) 这种树苗成活的频率稳定在什么数值附近？成活率（成活的概率）估计为多少？

(2) 该林场已经移植这种树苗 5 万株，估计能成活多少万株？

(3) 如果计划成活 18 万株这种树苗，那么需要移植多少万株？

解 (1) 由图 6-12 可见，当样本的容量逐渐增大时，树苗移植后成活的频率逐渐稳定在 0.9 附近，由此可估计，这种树苗移植后的成活率为 0.9.

(2) 移植这种树苗 5 万株，估计能成活 $5 \times 0.9 = 4.5$ (万株).

(3) 如果计划成活 18 万株这种树苗，那么需要移植树苗 $18 \div 0.9 = 20$ (万株).



挑战自我

某种子站需要根据不合格种子所占比例，对新进的一批稻米种子进行定级，你能用频率估计概率的方法帮助种子站设计一个方案吗？



练习

1. 某工厂新生产的一种节能灯泡，设计使用寿命为 10 000 h，现从产品中抽取若干只，在同等条件下，进行使用寿命检验，规定使用寿命不少于 10 000 h 为合格品. 有关数据如下：

试验灯泡数/只	20	40	100	200	400	1 000
合格灯泡数/只	19	37	91	179	361	902
合格频率						

- (1) 计算各批灯泡的合格频率；
- (2) 根据频率的稳定值，估计这种灯泡的合格率（合格品的概率）（精确到0.1）.
2. 某农场从某品种玉米种子中抽取6批在同一条件下进行发芽实验，有关数据如下：

种子数/粒	100	400	800	1 000	2 000	5 000
发芽频数	85	298	652	793	1 604	4 005
发芽频率	0.850	0.745	0.815	0.793	0.802	0.801

这种玉米种子发芽频率稳定在什么数值？由此你估计这种玉米发芽率是多少？



习题6.5



复习与巩固

- 100枚图钉撒落在地上，共有63枚钉尖触地，其余的钉尖朝上. 你能由此估计一枚图钉落地时钉尖触地的概率大约是多少吗？
- 你能从用频率估计概率的观点解释日常用语中的治愈率、有效率、成活率、近视率、收视率、合格率等词汇的含义吗？你还能举出生活中类似的例子吗？
- 在一个不透明的袋子里装有8个白球，若干个黄球，它们除颜色外其余均相同. 小亮将球摇匀后，从袋子中随机摸出1个球，记下它的颜色，然后将球放回袋子中，摇匀后再重新摸球. 如此重复试验150次，共摸出黄球90次，你估计袋中黄球有多少个？
- 圆周率 π 是一个无限不循环小数，有人对 π 的前 n 位小数中数字6出现的频数作了统计，得出下表：

n	数字6出现的频数	数字6出现的频率
100	9	
200	16	
500	48	
1 000	94	
2 000	200	
5 000	512	

10 000	1 004	
50 000	5 017	
100 000	99 548	

- (1) 算出相应的频率，填入表中；
- (2) 估计 π 的各位小数中6出现的概率是多少？

5. 下面是某篮球运动员在5月份6场比赛中投篮的记录：

日 期	5月1日	5月2日	5月6日	5月12日	5月18日	5月30日
投篮次数	21	12	15	17	8	20
命中次数	10	5	6	7	3	8

你能由此估计出该运动员投篮时的命中率吗？

 拓展与延伸

6. 选择题：下列事件中，概率最大的是（ ），概率最小的是（ ）.
- (A) 抛掷一枚质地均匀的硬币，出现正面朝上的概率
- (B) 抛掷一枚骰子，掷出的点数为奇数的概率
- (C) 在一副扑克牌中随机地抽取一张，恰好是“红桃”的概率
- (D) 在不透明的袋子里装有除颜色外都相同的2个红球、1个黄球、3个白球，从中随机地摸出一个球，不是红球的概率
7. 连续抛掷一枚质地均匀的硬币3次，落定后都正面朝上，抛掷第4次时，落下后正面朝上的概率是多少？
8. 服装商店对一周内进入该店的顾客人次进行了统计，经整理后得出下表（单位：人次）.
- (1) 估计一名顾客进入该店后购买商品的概率是多少？
- (2) 估计哪一种性别的顾客进入该店后购买商品的可能性较大？

	购 买	不购买
男 性	505	1 352
女 性	1 529	9 203

 探索与创新

9. 养鱼专业户李大伯用下面的方法估计鱼塘中鱼的条数：
- (1) 从鱼塘中捕获 k 条鱼，每条鱼做上记号后，重新放回鱼塘；
- (2) 放养一段时间后，从鱼塘中捞出 m 条鱼；

(3) 统计这 m 条鱼中有原来做记号的鱼的数目, 设为 n , 便可估计出整个鱼塘中鱼的数量.

你能说出这种方法的道理吗? 估计这个鱼塘中共有鱼多少条?

6.6 简单的概率计算



交流与发现

(1) 利用大量的重复试验, 可以估计抛掷一枚硬币出现“正面朝上”的概率, 那么是否能够通过直接计算, 求出这一事件发生的概率呢?

在掷币试验中, 硬币落定后只有两种结果: 可能“正面朝上”, 也可能“反面朝上”. 由于硬币的质量是均匀分布的, 所以出现“正面朝上”和“反面朝上”的可能性相等, 计算比值 $\frac{\text{出现“正面朝上”的结果数}}{\text{掷币所有结果的总数}}$, 得到 $\frac{1}{2}$, 而 $\frac{1}{2}$ 恰为

在一次掷币试验中, 事件“正面朝上”所发生的概率.

(2) 在本章 6.5 节“实验与探究”问题(9)的摸球游戏中, 如果袋子里有 6 个乒乓球, 其中有 2 个是红球, 能利用(1)中的方法, 直接计算摸出一个球是红球的概率吗?

在摸球游戏中, 袋子中有 6 个乒乓球, 从中摸出 1 个球时, 每个球都可能被摸出, 并且每个球被摸出的可能性是相等的. 所以, 试验可能出现的结果共有 6 个, 这 6 个结果是等可能的. 其中摸出红球的结果有 2 个, 利用比值 $\frac{\text{摸出红球的结果数}}{\text{摸球所有结果的总数}}$, 得到 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, 而 $\frac{1}{3}$ 恰为一次摸球试验中, 事件“摸出红球”发生的概率.

(3) 在试验的结果只有有限个, 且结果是等可能的情况下, 由(1)(2), 如何根据试验的所有可能结果, 以及指定事件发生的所有可能结果, 计算指定事件发生的概率呢?

一般地，在一次试验中，如果共有有限个可能发生的结果，并且每种结果发生的可能性都相等，用 m 表示一个指定事件 E 包含的结果数， n 表示试验可能出现的所有结果的总数，那么事件 E 发生的概率可利用下面的公式计算：

$$P(E) = \frac{m}{n}.$$



上面的概率公式只适合于试验结果有限个且等可能的情况. 例如掷一枚图钉，只有两种可能结果：钉尖朝上、钉尖触地. 但这两种结果不是等可能的，所以求 $P(\text{钉尖朝上})$ 就不能用上面的公式.

例1 把英文单词“PROBABILITY”中的字母依次写在大小相同的 11 张卡片上，每张卡片上只能写其中的 1 个字母. 然后将卡片洗匀，从中随机抽取 1 张卡片，恰为写有字母 I 的卡片的概率是多少？

解 从 11 张卡片中随机抽取 1 张卡片的试验中，11 张卡片中取到每张的可能性是相同的，因此，共有 11 个等可能的结果，其中写有字母 I 的卡片有 2 张，抽取到写有字母 I 的卡片的结果有 2 个. 所以随机抽出一张，事件“抽取到写有字母 I 的卡片”的概率是 $P(\text{抽取到写有字母 I 的卡片}) = \frac{2}{11}$.

例2 如图 6-13，抛掷一枚骰子（6 个面上分别刻有 1, 2, 3, 4, 5, 6 个点的均匀的小正方体）. 落定后，

(1) 骰子朝上一面的“点数不大于 6”是什么事件？它的概率是多少？“点数大于 6”是什么事件？它的概率是多少？

(2) 骰子朝上一面的“点数是质数”是什么事件？它的概率是多少？



图 6-13

解 骰子落定后，朝上一面的点数共有 6 种可能的结果：1, 2, 3, 4, 5, 6，并且它们出现的可能性相同. 朝上一面的“点数不大于 6”是必然事件，它发生的结果数等于所有等可能结果的总数 6；“点数大于 6”是不可能事件，它发生的结果数是 0；“点数是质数”是随机事件，因为在数字 1~6 中，质数只有

2, 3, 5, 它包含的结果数是3. 所以,

$$(1) P(\text{点数不大于} 6) = \frac{6}{6} = 1;$$

$$P(\text{点数大于} 6) = \frac{0}{6} = 0;$$

$$(2) P(\text{点数是质数}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

一般地, 当事件 E 是必然事件时, $P(E) = 1$;

当事件 E 是不可能事件时, $P(E) = 0$;

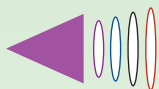
当事件 E 为随机事件时, $P(E)$ 在 0 与 1 之间.

总之, 任何事件 E 发生的概率 $P(E)$ 都是 0 和 1 之间 (包括 0 和 1) 的数, 即

一个事件 E 发生的概率 $P(E)$ 的取值范围是什么?



$$0 \leq P(E) \leq 1.$$



广角镜

比赛结果的预测

每四年一届的世界杯足球赛, 世人瞩目. 赛前, 许多国家的球迷及媒体搜集参赛队的比赛资料及近年的战绩, 对比赛结果进行预测.

比如, 甲、乙两队将在赛场上相逢. 赛前一名记者根据甲、乙两队近年来交战的情况作了如下的分析: “两队曾五次交锋, 甲队的战绩是三胜一平一负. 如正常发挥, 甲队获胜的希望很大”.

从概率的角度来预测, 甲获胜的概率只有 $\frac{3}{5}$. 如此看来, 用“很大”一词欠妥.

由于每人手中的资料不同, 预测的方法也有差异, 比赛双方临场发挥也会受到多种因素的影响, 经常出现比赛的结果与赛前的预测并不一致, 甚至大相径庭的情况. 有的队在整个赛程中, 连胜五场, 一直保持不败, 偏偏在第六场比赛中负于一匹“黑马”.

气象台预报明天降水的概率是10%, 后天是90%, 然而却有可能第二天下起雨来, 第三天并没有下雨.

买彩票中一等奖的概率是几百万分之一, 但却偏偏有人只买一张彩票就中了大奖.

万物都在变化. 根据过去、现在来预测随机事件发生的概率, 只能帮助人们做到“心中有数”, 但并不能提供确定无误的结论, 概率大的事件并不一定发生, 概率小的事件也不一定不发生. 这是由于随机现象的本质决定的.



练习

1. 一副扑克牌共 54 张，从中随机抽出 1 张，抽到“牌上点数为 2”的概率是多少？
2. 在一个不透明的纸袋中放有除颜色外都相同的 3 个红球、5 个白球、7 个黄球. 从暗箱中随机摸出 1 个球，摸到红球的概率是多少？摸到的球不是红球的概率是多少？



观察与思考

你玩过“剪刀、石头、布”的游戏吗？

小亮和小莹玩“剪刀、石头、布”游戏，游戏的规则是：两人同时出“剪刀、石头、布”中的一种手势，规定“剪刀”胜“布”，“布”胜“石头”，“石头”胜“剪刀”. 如果两人出的手势相同，则为平局，重新进行游戏. 思考下面的问题：



“剪刀、石头、布”游戏

(1) 如果二人都随机出一个手势，那么在第一次“出手”时，小亮获胜的概率多大？小莹获胜的概率呢？

两人出手一次看作一次试验，如果两人所出的手势用括号（小亮的手势，小莹的手势）表示，将所有可能出现的结果列举如下：

(剪刀，布)，(剪刀，石头)，(剪刀，剪刀)，(石头，剪刀)，(石头，石头)，(石头，布)，(布，剪刀)，(布，石头)，
(布，布).

共有 9 种不同的情况，而且它们都是等可能的.

其中事件“小亮获胜”的结果有 3 种，即（剪刀，布），（布，石头），（石头，剪刀）.

所以，小亮获胜的概率为

$$P(\text{小亮获胜}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

事件“小莹获胜”的结果也有 3 种，即（剪刀，石

列举试验所有可能出现的结果时，应注意做到不重不漏.



头), (石头, 布), (布, 剪刀). 所以小莹获胜的概率为

$$P(\text{小莹获胜}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

(2) 两人同时出手后, 出现平局的概率有多大?

事件“出现平局”的结果也有3种, 即(剪刀, 剪刀), (石头, 石头), (布, 布). 所以出现平局的概率为

$$P(\text{出现平局}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

(3) 假设两人经过 n 次出手, 皆为平局. 直到第 $n+1$ 次出手试验才决出胜负, 那么在第 $n+1$ 次出手时, 甲、乙两人获胜的概率分别是多大?

由于在第 $n+1$ 次时没有出现平局, 因此所有出现的结果只有6种:

(剪刀, 布), (剪刀, 石头), (石头, 剪刀), (石头, 布), (布, 剪刀), (布, 石头).

其中事件“小亮获胜”的结果仍然是3种, 所以小亮获胜的概率为

$$P(\text{第 } n+1 \text{ 次时小亮获胜}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

事件“小莹获胜”的概率为

$$P(\text{第 } n+1 \text{ 次时小莹获胜}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

(4) 由以上讨论, 你认为这个游戏对双方公平吗?

(5) 通过解决这个问题, 你体会到利用本节的公式来计算事件概率时, 包括哪几个步骤? 应注意哪些问题?

例3 某快餐店为了招揽顾客, 推出一种“转盘”

游戏: 一个圆形转盘被分成了12个圆心角都相等的扇形, 其中有2个扇形涂成红色, 4个扇形涂成绿色, 其余涂成黄色(图6-14). 顾客消费满200元后, 可以自由转动一次转盘. 如果转盘停止后, 指针落在绿色区域获得二等奖, 落在红色区域获得一等奖. 凭奖券顾客下次来店就餐时, 可分别享受九折、八折优惠.

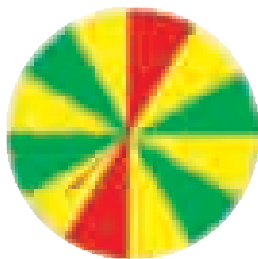


图 6-14

(1) 这个游戏一、二等奖的中奖率分别是多少?

(2) 这个游戏的中奖率是多少?

指针落在转盘的位置实际上有无限多个等可能的结果，将转盘等分为若干扇形后，就转化为只有有限多个等可能结果的情况，从而可以利用公式来计算概率。



解

由于 12 个扇形的圆心角彼此相等，所以自由转动一次转盘，作为一次试验，转盘停止后，指针落在 12 个扇形中任何一个的可能性是完全相同的，指针的位置共有 12 种不同的情况，即有 12 个等可能结果。

(1) “指针落入绿色的扇形区域”是一个事件，包含 4 个可能的结果，所以二等奖的中奖率

$$P(\text{指针落在绿色区域}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

同样地，“指针落在红色区域”这一事件包含 2 个可能的结果，所以一等奖的中奖率

$$P(\text{指针落在红色区域}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

(2) 当指针落在红色区域或绿色区域时中奖，因此

$$P(\text{中奖}) = \frac{2+4}{12} = \frac{1}{2}.$$

例4 你知道田忌赛马的故事吗？据《史记》

记载，战国时期，齐威王和他的大臣田忌各有上、中、下三匹马。在同等级的马中，齐威王的马比田忌的马跑得快，但每人较高等级的马都比对方较低等级的马跑得快。有一天，齐威王要与田忌赛马，双方约定：比赛三局，每局各出一匹，每匹马只赛一次，赢得两局者为胜^①。



^① 田忌赛马的故事出自《史记》卷六十五《孙子吴起列传第五》。原文是：“忌数与齐诸公子驰逐重射……孙子曰：‘今以君之下驷与彼上驷，取君上驷与彼中驷，取君中驷与彼下驷。’既驰三辈毕，而田忌一不胜而再胜，卒得王千金。”这里孙子指孙臏。

齐威王的马按上、中、下顺序出阵，假如田忌的马随机出阵，田忌获胜的概率是多少？

解 田忌的马随机出阵，共有 6 种可能的顺序：(上、中、下)，(上、下、中)，(中、上、下)，(中、下、上)，(下、上、中)，(下、中、上). 每种出阵的顺序的可能性相同. 其中，只有当田忌的马按下、上、中的顺序出阵时，田忌才能取胜，按其他方式出阵，均为齐威王取胜.



小资料

由于在实际赛马时，田忌采用了孙臆制定的战胜对方的最优策略，以弱胜强，不仅传为千古佳话，也成为近代数学的分支——“对策论”中的精彩案例.

所以如果田忌的马随机出阵，那么田忌取胜的概率只有 $\frac{1}{6}$.



练习

1. 一枚均匀的小正方体，把它的两个面涂成红色，两个面涂成黄色，其余的两个面分别涂成蓝色和白色，任意抛掷这枚小正方体，落定后，朝上一面为红色的概率是多少？如果把白色一面也改为红色，落定后，朝上一面为红色的概率将是多少？
2. 将正面分别写有 2, -3, 4, -5 的 4 张同样的卡片背面朝上摆放，随机地取出 2 张，卡片上的两数之和是负数的概率是多少？

例5

2 路公交车站每隔 5 min 发一班车. 小亮来到这个汽车站，候车时间不超过 1 min 的概率是多少？候车时间等于或超过 3 min 的概率是多少？

解

如图 6-15，画一条长为 5 个单位长度的线段，表示相邻两次发车的间隔时间. 用左端点表示上一班车开走的时刻，记为 0 min，右端点表示下一班车开走的时刻，记为 5 min.

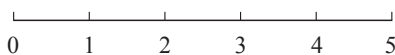


图 6-15

将线段五等分，分点顺次标上 1, 2, 3, 4 分别表示上一班车已开走的时刻，每一份表示长为 1 min 的时间段，小亮到达汽车站的时刻看作一个点，这个点落在线段中的哪一位置是随机的，因此他出现在每一小段时间中的概率是相等的.

当小亮在上一班车发车 4 min (不足 5 min) 后到达该汽车站时，他候车时

间不超过 1 min.

所以, $P(\text{候车时间} \leq 1 \text{ min}) = \frac{1}{5}$.

当小亮在上一班汽车发车 2 min 以内 (包括 2 min) 到达该汽车站时, 他候车时间等于或超过 3 min.

所以, $P(\text{候车时间} \geq 3 \text{ min}) = \frac{2}{5}$.

例6 某十字路口设有交通信号灯, 南北向信号灯的开启规律如下: 南北向绿灯开启 1.5 min 后关闭, 紧接着红灯开启 1 min, 按此规律循环下去. 如果不考虑其他因素, 当一辆汽车沿南北方向随机地行驶到该路口时, 遇到绿灯的概率是多少?



解 这个十字路口从绿灯开启到红灯关闭 (同时下一次绿灯开启) 共 2.5 min, 其中绿灯 1.5 min, 红灯 1 min.

画一条长度为 2.5 单位的线段 AB , 表示从绿灯开启到红灯关闭的间隔时间. 在 AB 上取点 C , 使 $AC = 1.5$ 单位 (图 6-16), 表示



图 6-16

绿灯开启的时间段. 汽车到达十字路口的时刻是随机的, 它出现在每一时刻的概率是相等的, 把这一时刻看作一个点, 该点落在线段 AC 上的概率是 $P(\text{点落在 } AC) = \frac{1.5}{2.5} = \frac{3}{5}$.

所以, 当一辆汽车沿南北方向随机地行驶到该路口时,

$$P(\text{遇到绿灯}) = \frac{3}{5}.$$



挑战自我

长 10 m 的绳子任意堆放在地上, 如果随机地剪成两段, 则每段长度不小于 3 m 的概率是多少?



智趣园

有趣的“等人问题”

小亮、大刚二人相约星期天上午 9:00~10:00 在新华书店门前见面, 以便共同

选购课外书籍. 他们约好: 若其中一人先到, 要等另一个人 20 min, 过时不再等候. 假定他们二人到达约定地点的时间都在约定的 1 小时以内, 且都是随机的. 试问他们见面的概率是多少?

这个问题看起来有点复杂, 可以利用画图帮助我们分析.

建立如图 6-17 所示的直角坐标系, 用 x, y 分别表示小亮、大刚二人在 9 时后到达约定地点的时间 (单位: min), 由已知条件 $0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60$.

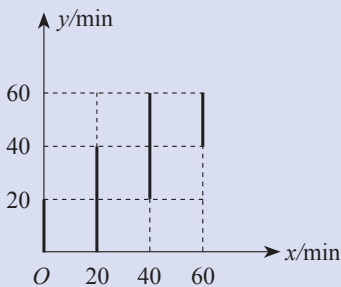


图 6-17

(1) 如果小亮 9:00 到达书店, 即 $x = 0$, 这时只有当大刚在 9:00~9:20 即 $0 \leq y \leq 20$ 的时间段内到达书店, 他们才能见面.

(2) 如果小亮 9:20 到达书店, 即 $x = 20$, 这时只有当大刚在 9:00~9:40 即 $0 \leq y \leq 40$ 的时间段内到达书店, 他们才能见面.

(3) 如果小亮 9:40 到达书店, 即 $x = 40$, 这时只有当大刚在 9:20~10:00 即 $20 \leq y \leq 60$ 的时间段内到达书店, 他们才能见面.

(4) 如果小亮 10:00 到达书店, 即 $x = 60$, 这时只有当大刚在 9:40~10:00 即当 $40 \leq y \leq 60$ 的时间段内到达书店, 他们才能见面.

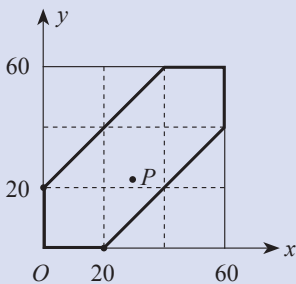


图 6-18

在图 6-17 中, 用粗实线分别表示小亮在 9:00, 9:20, 9:40, 10:00 到达书店且能见到大刚的时间段, 然后从左到右分别连接四条粗实线的上端点与四条粗实线的下端点, 便得到图 6-18 的一个六边形区域.

小亮和大刚分别在时间段 9:00~10:00 内到达书店的时刻 (x, y) 对应于图 6-18 中正方形内的点 $P(x, y)$, 由于他们各自到达书店的时刻是随机的, 所以点 P 在正方形内任何一处出现的可能性都是相同的. 只有当点 P 落在六边形区域内, 二人才能见面.

因为图 6-18 中所有的小方格数是 9, 六边形区域所占的小方格数是 5, 所以六边形区域占正方形面积的 $\frac{5}{9}$ (也可由 $\frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}$ 得出), 所以他们见面的概率等于 $\frac{5}{9}$.

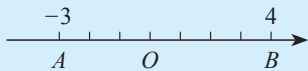


练习

1. 某广播电台“听众信箱”节目每晚 20:00~21:30 播出, 其间平均有 30 个热线电话接入, 每次通话时间约 2 min. 小亮在这个节目播出期间拨打热线电话, 他恰好拨通

的概率是多少?

2. 如图, 数轴上有两点 A, B , 在线段 AB 上随机地取一点 C , 则点 C 到原点 O 的距离不大于 2 的概率是多少?



(第 2 题)



习题 6.6



复习与巩固

- 在 100 件同类产品中有 95 件一等品, 从这些产品中任取 1 件恰为一等品的概率是多少?
- 如图, 密码锁有 3 个拨盘, 每个拨盘上都有 0~9 十个不同的数字. 转动拨盘后, 只有当显示的 3 位数恰好是设定的密码时, 才能将锁打开. 任意拨出一个 3 位数, 这时恰好把锁打开的概率是多少?
- 从正面分别写有 1, 2, 4, 6, 7, 8 的 6 张卡片中, 任意抽出 1 张, 得到下列结果的概率是多少?



(第 2 题)

- 卡片上的数是奇数;
- 卡片上的数是偶数;
- 卡片上的数小于 7.

4. 在如图所示的月历表中任取 1 天, 恰为下列情况的概率各是多少?

- 这一天是星期日;
- 这一天是星期一至星期五中的一天.

日	一	二	三	四	五	六
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

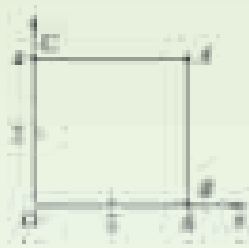
(第 4 题)

- 从一副扑克牌中去除“大王”、“小王”, 将牌洗匀, 然后从中随机摸出 1 张, 记下它的花色和数字, 再把牌放回, 洗匀后, 重复上面的试验, 如果连续摸牌 1 000 次,
 - 你估计摸出花色是“红桃”的次数大约是多少?
 - 你估计摸出牌面是“A”(不计花色)的次数大约是多少?
- 某火车站的显示屏, 显示列车班次的信息, 时间持续 2 min, 然后是 1 min 的广告, 接着重新显示列车班次 2 min, 如此循环下去. 某人到达该车站时, 显示屏上正好显示列车班次信息的概率是多少?
- 某单位查号台值班员上午 8~12 时平均每小时接待查询电话 36 个, 每个电话处理时间约 50 s. 张老师在这段时间内, 给该单位打查询电话, 恰好接通的概率是多少?



拓展与延伸

8. (1) 圆形转盘被分成 5 个扇形, 并分别涂上不同的颜色, 其中涂红色的扇形圆心角为 60° , 涂绿色的扇形圆心角为 30° , 涂蓝色的扇形圆心角为 120° , 涂黄色的扇形圆心角为 90° , 还有 1 个扇形涂成白色. 自由转动转盘, 停止后, 指针落在各个扇形中的概率分别是多少?
- (2) 一个袋子中装有除颜色外其他都相同的 5 种颜色的球, 其中有红球 2 个, 绿、蓝、黄、白色球各若干个. 如果随机摸出一个球是红、绿、蓝、黄、白色球的概率分别与 (1) 中指针落在相应的各色扇形中的概率相等. 估计袋子中绿、蓝、黄、白色的球各多少个?
9. 如图, 在直角坐标系中, 点 A 的坐标为 $(4, 4)$, 四边形 $COBA$ 是一个正方形, 连续两次掷一枚骰子, 把第 1 次、第 2 次朝上一面的数字分别作为一个点的横、纵坐标. 求这个点落在正方形 $COBA$ 上及其内部的概率.



(第 9 题)



探索与创新

10. 在本班同学中随机地挑选两名同学, 恰为同年出生的概率与恰为同一个月 (可以是不同年) 出生的概率哪个大? 在一个城市中任选两个人呢? 为什么?
11. 小亮与小莹玩一种“字母棋”游戏. 棋子共有 10 枚, 正面分别标有字母 A, B, C, D, 其中 A 棋 1 枚, B 棋 2 枚, C 棋 3 枚, D 棋 4 枚. 游戏规则为:
- ① 游戏时, 先将棋子反面朝上洗匀, 两人先后从中各摸 1 枚, 摸出的棋子不再放回;
 - ② 双方亮出自己摸出的棋子, A 棋胜 B 棋、C 棋, B 棋胜 C 棋、D 棋, C 棋胜 D 棋, D 棋胜 A 棋, 相同的棋子不分胜负.

回答下列问题:

- (1) 如果小莹先摸, 小莹摸到 C 棋的概率是多少?
- (2) 如果小莹先摸到 C 棋, 小莹恰能获胜的概率是多少?
- (3) 如果小莹先摸, 小莹先摸到哪种棋子获胜的概率最大?

6.7 利用画树状图和列表计算概率

如图6-19，甲、乙两村之间有 A，B 两条道路，小亮从甲村去往乙村，大刚从乙村去往甲村，二人同时出发. 如果每人从 A，B 两条道路中随机选择一



图 6-19

条，而且他们都不知道对方的选择，那么二人途中相遇的概率是多少？

为了列举出这个问题中所有可能的结果，以及二人相遇的所有可能结果. 可以利用画图帮助我们分析：由于小亮走道路 A 或 B 有两种可能，可画出同一点出发的两个箭头分别表示小亮走 A 或走 B. 当小亮走道路 A 时，由于大刚走道路 A 或 B 也有两种可能，所以在表示小亮走 A 的箭头前面再画出两个箭头，分别表示当小亮走道路 A 时大刚可能走道路 A 或道路 B. 同样地，在表示小亮走 B 的箭头前面再画出两个箭头，分别表示当小亮走道路 B 时，大刚可能走道路 A 或道路 B. 于是得到图 6-20.

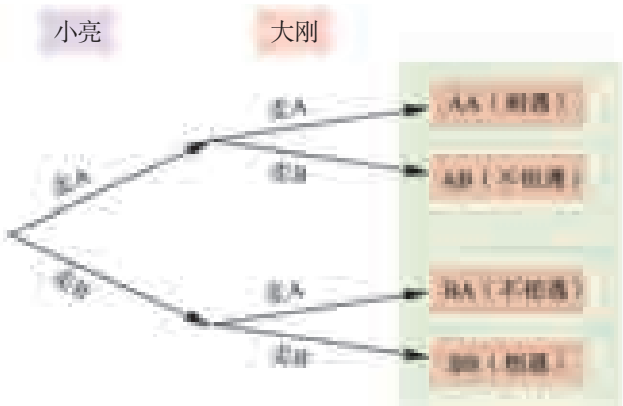


图 6-20

由图 6-20 可以直观地看出，这个问题的所有可能结果共有 4 个：AA，AB，BA，BB，分别表示小亮走道路 A，大刚走道路 A；小亮走道路 A，大刚走道路 B；小亮走道路 B，大刚走道路 A；小亮走道路 B，大刚走道路 B. 而且每个结果发生的可能性都相等，事件“两人相遇”包含其中的 2 个结果，即 AA，BB. 由已学过的概率计算公式，可得

$$P(\text{两人相遇}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

所以，两人相遇的概率是 $\frac{1}{2}$.

图 6-20 像一棵横倒的树，我们叫它**树状图** (tree derivation). 你体会利用画树状图对于列举出问题中的所有结果以及指定事件发生的所有可能的结果有哪些帮助？

在上面问题中，小亮与大刚所处的地位是相同的，你能将两人顺序交换，先考虑大刚所走的道路，画出相应的树状图吗？

上面的问题，还可以通过列表分析出所有等可能的结果：

大刚 \ 小亮	走 A	走 B
	走 A	走 B
走 A	AA	AB
走 B	BA	BB

表中上面的第 1 行表示小亮走道路 A 或 B 的两种可能，左边第 1 列表示大刚走道路 A 或 B 的两种可能，从而可在表中的其他 4 个位置列出本题所有等可能的 4 种结果：AA，AB，BA，BB，其中可找出“两人相遇”这一事件包含的结果共有 2 个. 于是

$$P(\text{两人相遇}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

树状图或列表能帮助我们所有等可能的结果直观地列举出来，做到既不重复也没有遗漏.



例1 在A, B两个盒子里各装入分别写有数字0, 1的两张卡片. 分别从每个盒子中随机取出1张卡片, 两张卡片上的数字之积为0的概率是多少?

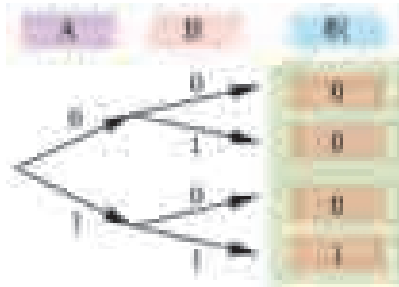


图 6-21

解 从A盒或B盒中任取1张卡片, 上面写有数字0或1的可能性相等, 利用树状图

(图6-21)可以看出, 两张卡片上的数字之积共有4个等可能结果, 从中可找出“两数之积为0”这一事件的结果有3个. 于是

$$P(\text{两数之积为0}) = \frac{3}{4}.$$

所以, 两张卡片上的数字之积为0的概率为 $\frac{3}{4}$.

你能通过列表分析所有等可能结果吗? 将对应的乘积填在下表中的空格处:

B \ A	0	1
0		
1		

$P(\text{两数之积为0}) = \underline{\hspace{2cm}}.$



挑战自我

小亮、小莹和大刚三人中要选派一人参加全年级的演讲比赛. 他们设计了一个游戏决定谁去参加:

随机抛掷两枚均匀的硬币, 落定后, 如果两枚都是正面朝上, 小亮参加; 如果都是反面朝上, 小莹参加; 如果一枚正面朝上、一枚反面朝上, 则大刚参加. 你认为这个游戏对他们三人公平吗? 为什么?



练习

1. 连续2次抛掷一枚质量均匀的硬币, 落定后, 两次都是正面朝上的概率是多少? 至少一次正面朝上的概率是多少?

2. 在本节例1中, 分别从每个盒子中任取1张卡片, 两张卡片上的数字之和为1的概率是多少?

例2 甲、乙两只不透明的袋子里装有除颜色外都相同的球. 甲袋装有红、蓝、黄色球各1个, 乙袋装有红、蓝色球各1个. 从每个袋子里分别随机地摸出1个球, 两个球恰为同色的概率是多少?

解 从甲袋中随机摸出1个球, 球的颜色有3个等可能的结果, 从乙袋中随机摸出1个球, 球的颜色有2个等可能的结果. 从两个袋子中各摸出1个球, 所有可能的结果可用树状图(图6-22)表示如下:

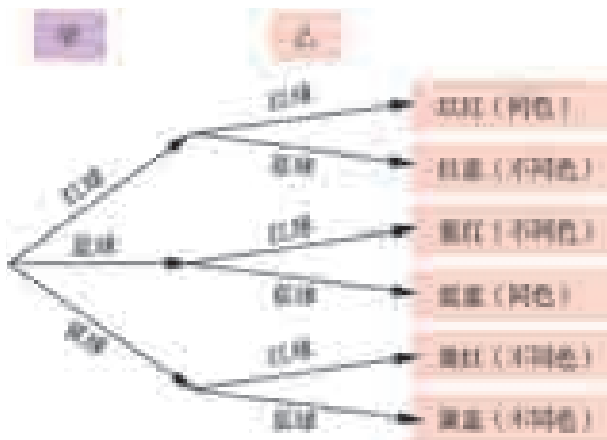


图 6-22

由图 6-22 可知, 共有 6 个等可能的结果, 其中事件“同色”包含 2 个结果, 于是

$$P(\text{同色}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

所以, 两个球恰为同色的概率为 $\frac{1}{3}$.

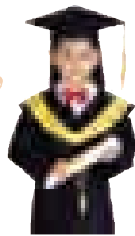
你能通过列表解答例2吗? 试一试.

例3 同时抛掷两枚骰子, 落定后, 两枚骰子朝上一面的点数之和可能是哪些数? 其中, 概率最大的是什么数? 概率最小的是什么数?

解 抛掷一枚骰子时, 点数 1, 2, 3, 4, 5, 6 出现的概率相等, 都是

$\frac{1}{6}$. 同时抛掷两枚骰子，一枚骰子上出现的点数不受另一枚的影响.

这个问题如果画树状图，需要先画出 6 个箭头，每个箭头又要引出 6 个箭头，过于繁琐. 可以通过列表列出所有可能的结果.



列出右边的表格，在表的左下角写上一个“+”号，然后在“+”号所在横行的每个小方格中，由左至右依次填入数字 1, 2, 3, 4, 5, 6，表示掷第 1 枚骰子可能出现的点数；然后在“+”号所在竖列的每个小方格中，从下往上依次填上数字 1, 2, 3, 4, 5, 6，表示掷第 2 枚骰子可能出现的点数. 将各行与各列中对应数字之和分别填入相应的小方格中.

6						
5						
4						
3						
2						
1						
+	1	2	3	4	5	6

观察你填好的表，可以发现抛掷两枚骰子，朝上一面的点数之和共有 36 个等可能结果，每个结果在表中各占一个小方格. 分别统计各个小方格中的点数之和及相应的小方格数，可列出下表：

点数之和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
小方格数	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

从上表可知，两个骰子的点数之和共有 11 种不同的情况，即和为 2, 3, …, 12，其中小方格的个数最多的有 1 种情况，为 6 个小方格，所对应的点数之和为 7；这就是说，事件“两个骰子的点数之和是 7”包含的可能结果数最多，有 6 个结果，而方格的个数最少的情况有 2 种，各只有 1 个小方格，分别对应的点数之和为 2 和 12，这就是说，事件“两个骰子的点数之和是 2”和“两个骰子的点数之和是 12”包含的可能结果数最少，各有 1 个结果.

所以，抛掷两枚骰子出现“点数之和为 7”的概率最大，是 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ ，而出现“点数之和为 2”以及“点数之和为 12”的概率最小，都是 $\frac{1}{36}$.



挑战自我

下午放学后，小亮、小莹和大刚到学校乒乓球室去打乒乓球. 当时只有一副空球桌，他们打算用“手心、手背”的方法决定哪两人先上场. 游戏规则是：三人同时伸手心或手背，如果恰好其中有两人伸出的手势相同，那么这两人上场，否则重新开始.

假如这三个人每个人伸出手心或手背都是随机的，经过一次伸手试验，小亮上场的概率是多少？



练习

1. 一个盒子里装有分别写有数字 1, 3, 5 的三张卡片，另一个盒子里装有分别写有 2, 4 的两张卡片. 现从两个盒子各任取一张卡片，卡片上的数字为相邻整数的概率是多少？
2. 一只盒子里放有分别是草莓味、柠檬味的两种糖各 1 块，另一只盒子里放有分别是草莓味、柠檬味、杏仁味的三种糖各 1 块，糖的外形相同. 小亮从两只盒子中各随机取出一块糖，两块糖恰是不同味的概率是多少？



习题6.7



复习与巩固

1. 连续两次掷一枚骰子，落定后，朝上一面的数字都是偶数的概率是多少？数字之积是 6 的概率是多少？
2. 有三张纸牌，分别写有数字 1, 2, 3，从中任取两张，求：
 - (1) 两张纸牌分别写有“1”和“2”的概率；
 - (2) 其中一张纸牌上写有“1”的概率.
3. 在 3 个乒乓球中有 2 个正品、1 个次品，从中任取 2 个，求两个球都是正品的概率.
4. 某旅游团计划在 3 天内游览 3 个景点 A, B, C，每天只能游览其中的 1 个景点. 将 A, B, C 分别写在 3 张纸条上，采用抽签的方法决定游览顺序.
 - (1) 共有几种不同的安排方案？
 - (2) 第 1 天游览景点 A，第 2 天游览景点 B，第 3 天游览景点 C 的概率是多少？
 - (3) 第 1 天游览景点 A 的概率是多少？
5. 在一个不透明的盒子里，共有 1 枚白色围棋子和 2 枚黑色围棋子，它们除颜色以外，

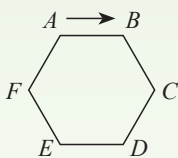
其他都相同.

- (1) 随机地从盒子里取出1枚棋子, 恰好是白色棋子的概率是多少?
 - (2) 随机地从盒子里取出1枚棋子, 不放回, 再取第2枚棋子, 恰好是“一黑一白”的概率是多少?
 - (3) 随机地从盒子里取出1枚棋子, 看到颜色后, 放回盒子里摇匀, 再取出第2枚棋子, 恰好是“一黑一白”的概率是多少?
6. 甲、乙二人报名参加运动会100米比赛. 预赛分A, B, C三组进行, 运动员通过抽签决定参加哪个小组. 甲、乙恰好分到同一个组的概率是多少? 恰好都分到A组的概率是多少?

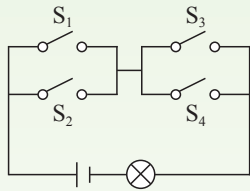


拓展与延伸

7. 小亮从家里到学校要经过两个设置有红绿灯的路口. 第1个路口红绿灯的转换时间是: 红灯60秒、绿灯30秒; 第二个路口红绿灯的转换时间是: 红灯50秒、绿灯50秒. 路口之间红绿灯的转换互不相关. 小亮上学时两次都遇到绿灯的概率是多少?
8. 一枚棋子放在如图所示的正六边形 $ABCDEF$ 的顶点 A 上, 通过摸球确定这枚棋子下一步走到正六边形的哪个顶点的位置. 规则是: 在一个不透明的袋子中标号分别是1, 2, 3的三个相同的小球, 搅匀后, 从中随机摸出1个, 记下标号后放回袋中搅匀, 然后从袋中再随机摸出1个. 两次摸出的小球的标号之和是几, 棋子就按顺时针方向沿正六边形的边走到第几个顶点的位置, 叫做走一步. 棋子走一步到达哪个顶点的可能性最大? 求出棋子走到该点的概率.



(第8题)



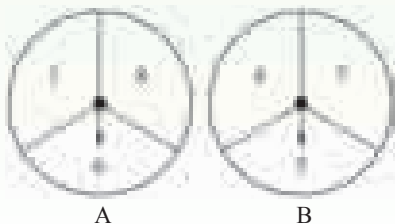
(第9题)

9. 如图, 随机地闭合开关 S_1, S_2, S_3, S_4 中两个, 能够使灯泡发光的概率是多少?



探索与创新

10. 如图, A, B是固定箭头的两个转盘. 均被分成三个面积相等的扇形, 转盘A上的扇形分别写有数字1, 6, 8, 转盘B上的扇形分别写有数字4, 5, 7. 如果你和小亮各选择其中一个转盘, 同时将它们转动, 规定如果转盘停止时, 箭头指的数字较大者获胜. 你会选择哪个转盘? 说明理由.



(第10题)

11. 一个不透明的袋子里共放有2个红球和3个白球, 它们除颜色外, 其余都相同.

(1) 从袋子中随机地摸出1个球, 摸到红球的概率是多少?

(2) 小亮想: “如果随机地从袋子里同时摸出两个球, 那么摸出两个红球的概率是上面问题(1)的答案的2倍”. 小亮的想法正确吗? 说明理由.



回顾与总结

1. 本章学习了哪些内容? 总结一下, 并与同学交流.
2. 什么是随机事件? 什么是必然事件? 什么是不可能事件? 举例说明.
3. 什么是频数? 什么是频率? 频数与频率有怎样的关系?
4. 怎样绘制频数直方图? 举例说明, 利用频数直方图能解释数据中蕴涵的哪些信息.
5. 什么叫做一个事件发生的概率? 当经过大量的重复试验, 一个随机事件发生的频率总是逐渐稳定在该事件发生的概率附近, 从而可以用频率估计概率. 你能举例说明吗?
6. 在一次试验中, 有 n 个等可能的结果, 如果其中事件 E 包含 m 个结果, 怎样计算事件 E 发生的概率?
7. 画树状图和列表在分析事件的所有等可能的结果以及指定事件发生的所有结果时起什么作用?
8. 举出生活实际中变量之间相关关系的例子, 在本章中你是如何利用坐标系中的直线研究某些随机现象的变化趋势以及随机现象之间的相关关系的?
9. 学过本章后, 你有哪些收获和体会?



综合练习



复习与巩固

1. 天气预报说: “明天本市下雨的概率是 80%”. 你认为这句话的含义是下面说法中的哪一种?
 - (1) 明天本市 80% 的地区下雨;
 - (2) 明天本市 80% 的时间下雨;
 - (3) 有 80% 的人认为明天本市下雨;
 - (4) 在多次类似于明天的天气条件下, 其中约 80% 的天数会下雨.
2. 时代中学生物兴趣小组对校内树木的种类和棵数作了统计, 结果如下:

杨树	81棵	槐树	62棵
枫树	35棵	柳树	28棵
法桐	68棵	松柏树	79棵

按照上面的分组及数据，列出频数、频率分布表，画出频数直方图.

3. 20名同学参加电脑汉字输入速度测试，成绩如下（单位：字/分）：

98, 101, 92, 102, 98, 94, 95, 97, 96, 128,
98, 95, 92, 96, 95, 94, 99, 95, 112, 126.

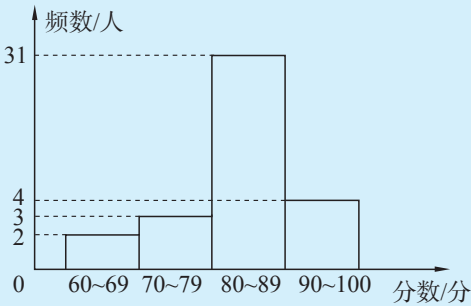
将上面的数据适当分组，列出频数、频率分布表，并画出频数直方图.

4. 某公用电话亭任意抽取了100名顾客的通话时间. 如果通话不足1 min，按1 min计时，超过1 min、不足2 min，按2 min计时，依此类推. 统计结果如下：

通话时间/min	1	2	3	4	5	5以上
人数/人	36	25	12	9	7	11

按通话时间分成6组，列出频数、频率分布表，画出频数直方图.

5. 时代中学九年级举行安全知识竞赛，有3人得100分. 竞赛成绩（得分为整数）的频数直方图如右图所示. 回答下列问题：



（第5题）

- （1）共有多少名学生参加比赛？
- （2）分布在90分~100分这一组的频率是多少？
- （3）这次测试成绩的众数在哪个小组中？
- （4）如果80分以上（含80分）为优良，那么优良率是多少？

6. 判断题：已知抛掷一枚硬币正面朝上的概率是 $\frac{1}{2}$ ，下列说法中错误的是

- （1）抛掷这枚硬币10次，“出现有5次正面朝上”是必然事件.
- （2）抛掷这枚硬币10次，“10次正面朝上”是不可能事件.
- （3）大量重复抛掷这枚硬币，平均100次中出现正面朝上50次.
- （4）通过抛掷这枚硬币确定谁先发球的比赛规则对双方是公平的.

7. 某电视机厂对生产的电视机进行抽样检测，得到的数据如下表所示：

抽取台数 (n)	50	100	200	300	500	1 000
优等品数 (m)	40	92	192	285	478	954
优等品频率 ($\frac{m}{n}$)						

- (1) 分别计算表中相应的优等品频率;
- (2) 估计该厂生产的电视机优等品的概率是多少(精确到0.01)?
8. 一栋教学楼共有15间教室,新来的管理员将各教室门锁的钥匙混在了一起,难以分辨.如果从中随机地取1把钥匙,能打开九年级一班教室门锁的概率是多少?
9. 某城市的固定电话号码由8位数字组成,其中以6 220开头的电话用户号码共2 865个,如果任意写出一个以6 220开头的8位数,这个数恰为该市一个电话用户号码的概率是多少?
10. 某电视台20:00时后平均每播送18 min 节目便插播1 min 广告,这期间随机地打开电视机收看该台,恰好遇到广告的概率是多少?
11. 一部书有上、中、下三册,将它们的顺序随机排放,自左至右恰好为上、中、下的概率是多少?
12. A 盒内装有除颜色外都相同的2枚黑色棋子和1枚白色棋子,B 盒内装有除颜色外都相同的1枚黑色棋子和2枚白色棋子.小亮从A和B两个盒子中各随机地取出1枚棋子,这两枚棋子同色的概率是多少?
13. 小亮从语文、数学、外语3本课本中随机地抽取1本,又在这3门课的作业本中随机地抽取1本,课本和作业本恰为同一门课的概率是多少?
14. 在10~99的整数中随机地取一个整数,这个整数是4的倍数的概率是多少?



拓展与延伸

15. 某社会调查部门抽样调查了龙泉镇6户居民月人均生活费及食品类开支占个人生活费的比重,结果如下表所示:

人均生活费/(元/月)	386	423	590	597	724	900
食品类开支占生活费比重/%	66.8	63.7	58.9	56.1	52.1	47.7

- (1) 在直角坐标系中,用横轴表示月人均生活费,纵轴表示食品类开支占生活费的比重;
- (2) 描出表中数对对应的数据点;
- (3) 画出能近似地表示食品类开支占生活费的比重与月人均生活费关系的一条直线.
16. 学校对九年级男生进行一次“引体向上”测试,将学生成绩按连续做0次~4次、5次~9次、10次~14次、15次~19次以及20次以上(含20次)分为5组.已知前3组的频率分别为0.05, 0.15, 0.25,第4,5组的频数分别为30, 25.回答下列问题:
- (1) 前3组的频数分别是多少?
- (2) 参加本次测试的学生共有多少人?

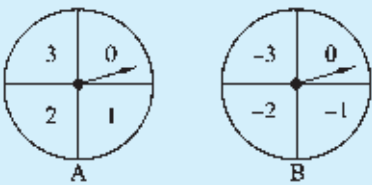
- (3) 如果连续做10次以上(含10次)为及格,那么此次测试的及格率是多少?
- (4) 画出频数直方图.

17. 一枚鼓形象棋棋子的正面刻有“兵”字,它的反面是平的.抛掷这枚棋子,假定侧面不能立住,落定后只有两种可能,即“兵”字朝上和“兵”字朝下.为了估计“兵”字朝上的概率,小亮和小莹连续做了棋子抛掷试验.试验数据如下表所示:

累计实验次数	20	40	60	80	100	120	140	160
“兵”字朝上的频数			38	47			78	
“兵”字朝上的频率	0.7	0.45			0.52	0.55		0.55

- (1) 请将上表补充完整;
 - (2) 画出“兵”字朝上的频数直方图;
 - (3) 估计抛掷这次棋子“兵”字朝上的概率.你能解释这枚棋子质量的分布是否均匀吗?
18. 从山下到山顶有A, B, C三条道路,其中道路C是单向的,即从山顶不能沿道路C走到山下,道路A, B是双向的.如果小亮开始上山时,小莹开始下山,两人分别从3条道路中随机地选1条,求他们途中相遇的概率.

19. 如图,有两个可以自由转动的转盘A, B, 盘面都被分为4等份,并在每份分别标有相应的数字.自由转动A, B两个转盘,停止后,将两个指针所指数字相加.



(第19题)

- (1) 两数之和为零的概率是多少?
 - (2) 在两数之和的所有情形中,概率最大的是哪种情形?
 - (3) 在两数之和的所有情形中,概率最小的是哪种情形?
20. 某公司历年在某市纯销售额的多少,主要决定于该市消费品购买力的大小.已知最近9年内该公司的纯销售额和消费品购买力资料如下:

年度序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
纯销售额/亿元	0.19	0.22	0.23	0.25	0.29	0.30	0.35	0.39	0.41
消费品购买力/亿元	1.8	1.9	2.2	2.5	3.1	3.5	4.0	4.4	4.8

- (1) 在直角坐标系中,用横轴表示消费品购买力,纵轴表示纯销售额,描出上述10个数据对应的数据点;
- (2) 在直角坐标系中,画出一条直线,使它能近似地反映样本中纯销售额与消费品购买力的相关关系;

(3) 估计当消费品购买力为 5.2 亿元时, 纯销售额是多少亿元?

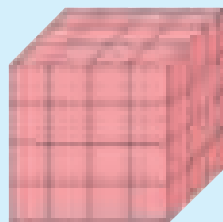


探索与创新

21. 有一个边长为 a 的正三角形纸板, 用针随机地在纸板上扎一小孔, 如果针孔在纸板上任何一处的可能性都相等, 求针孔到正三角形三个顶点距离都大于 $\frac{a}{2}$ 的概率.
22. 甲、乙、丙三人相互随机地传球, 由甲发球.
- (1) 求经过 3 次传球后, 球回到甲手中的概率;
 - (2) 经过 4 次传球, 球回到甲手中的概率是多少? 从发球到甲的手中有哪几种可能的传球方式?
23. 从分别标有数字 2, 3, 4, 5, 6, 7 的 6 张扑克牌中, 每次随机地抽取两张, 记录牌面上两个数字之和, 再将两张牌放回. 然后重复上述试验, 所得到的数据如下表所示:

牌面数字之和	5	6	7	8	9	10	11	12	13
频 数	6	7	12	13	18	12	11	6	7

- (1) 一共试验了多少次?
 - (2) 对应于牌面数字之和为 6, 9, 12 的频率各是多少?
 - (3) 你估计牌面上两数字之和是多少的概率最大? 两数字之和是多少的概率最小?
 - (4) 你能用较简单的方法, 分别直接计算出牌面数字之和为 5, 9, 13 的概率吗?
24. 如图, 把一个木制正方体的表面都涂成红色, 分别在它的从同一个顶点出发的三条棱上等距离地垂直切割三次, 将正方体分割成 64 个小正方体. 从这些小正方体中随机地取出一个. 求取出的小正方体
- (1) 三面涂有红色的概率;
 - (2) 两面涂有红色的概率;
 - (3) 各个面都没有涂红色的概率.



(第 24 题)



综合与实践

质数的分布



观察与思考

你还记得什么是质数吗？

一个大于1的整数，如果除了它本身和1以外，不能再被其他整数整除，这样的数叫做质数。例如2，3，5，7，11都是质数，质数也称为素数。1到10之间有4个质数，11到20之间有4个质数，21到30之间有2个质数。你能找出50以内的所有质数吗？试一试，与同学交流。

如果要找出100之内、200之内、1000之内的所有质数，你能找出来吗？



利用质数的定义，一个
个地试，太麻烦了！

古希腊数学家埃拉托塞尼（Eratosthenes，约前276～约前195）发明了一种简便可行的方法——筛法，它像用筛子把石块从沙子里筛出来一样，能把质数从正整数中“筛”出来。

例如，要求出100之内的全部质数，你可以按下面的步骤做：

- （1）写出100以内的全部正整数；
- （2）划去1，因为1不是质数；
- （3）圈起2，2是最小的质数，然后划去所有2的倍数；
- （4）圈起下面第一个未被划去的数3，划去所有3的倍数；
- （5）圈起下面第一个未被划去的数5，划去所有5的倍数；
- （6）继续上述过程，直至100之内的所有数，要么被圈起，要么被划去（如图1）。

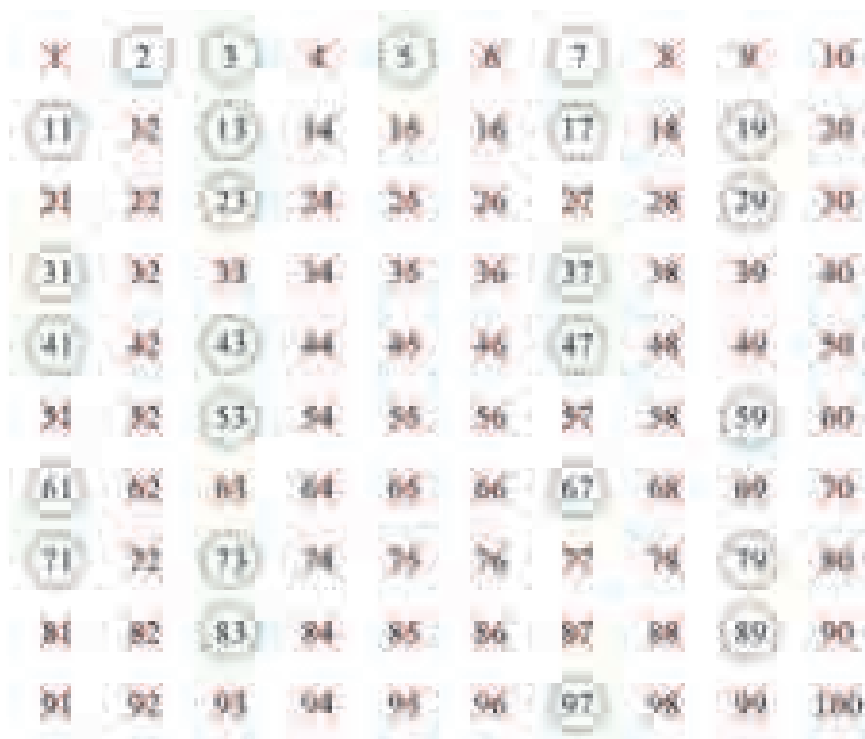


图 1

这样，圈起的数便是 100 以内的所有质数，共有 25 个。

想一想，为什么这样得到的数是 100 以内的所有质数？



实验与探究

两人一组，完成以下工作：

(1) 利用筛法找出 500 以内的所有质数. 有兴趣的同学可以找出 1 000 以内的所有质数.

(2) 分别统计数段 1 ~ 100, 101 ~ 200, 201 ~ 300, 301 ~ 400, 401 ~ 500 中质数出现的频数.

(3) 分别算出这 5 个数段中质数出现的频率.

(4) 列出频数、频率分布表.

(5) 画出频数直方图 (图 2).

(6) 上述 5 个数段中，哪个数段质数出现的频率最高？

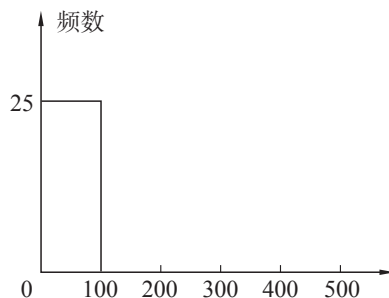


图 2



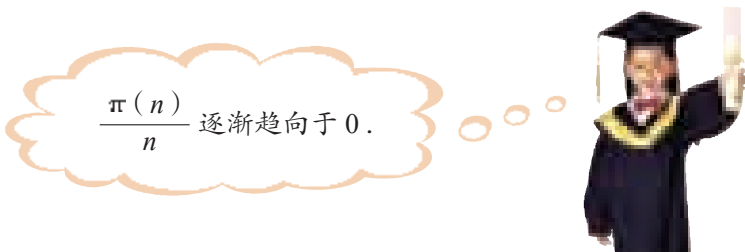
交流与发现

(1) 观察“实验与探究”(5)中得到的频数直方图,你发现在图中的5个数段中,随着数的增大,质数的分布越来越密集还是越稀少?

(2) 用 $\pi(n)$ 表示不超过正整数 n 的质数的个数,即在 n 以内的质数出现的频数,则 $\frac{\pi(n)}{n}$ 是 n 以内的质数出现的频率,完成下表:

n	10	100	500	1 000	10^5	10^6	10^9
频数 $\pi(n)$					9 593	78 498	50 847 478
频率 $\frac{\pi(n)}{n}$				0.168	0.096		

随着 n 的逐渐增大,你猜测频率 $\frac{\pi(n)}{n}$ 的变化趋势是什么? 如果 n 继续增大呢?



(3) 观察图 1, 在 50 以内你能最多找出几个连续整数它们都不是质数? 在 100 以内呢? 请你猜测, 能有 100 个连续的整数, 它们都不是质数吗? 说明理由.

事实上, 我们可以用下面的方法找出任意有限个连续的正整数, 它们都是合数. 如果想找出 n 个这样的合数, 可以先找到整数

$$N=2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n \times (n+1),$$

那么 n 个连续的整数

$$N+2, N+3, \cdots, N+n, N+(n+1)$$

都是合数. 也就是说, 它们之中没有一个质数, 因为它们分别可被 $2, 3, \cdots, n, n+1$ 整除. 因此, $2 \times 3 \times \cdots \times 100 \times 101+2, 2 \times 3 \times \cdots \times 100 \times 101+3, \cdots, 2 \times 3 \times \cdots \times 100 \times 101+100, 2 \times 3 \times \cdots \times 100 \times 101+101$ 便是 100 个连续的合数.

这就说明,随着正整数的增大,质数的分布越来越稀少.但是,质数有无限多个,不存在最大的质数.而人们所知道的质数却是有限的,到2005年,已发现的最大质数有9 152 052位.

质数还有许许多多有趣的性质.请你查询有关的资料,并与同学交流.



习题



复习与巩固

- 算出1~40, 41~80, 81~120, 121~160, 161~200各数段中质数出现的频数;
 - 分别算出这个数段质数出现的频率;
 - 列出频数、频率分布表;
 - 画出频数直方图;
 - 这5个数段中哪个数段质数出现的频率最高?
- 相差2的两个质数叫做孪生质数,如17和19, 41和43.求出200以内的孪生质数出现的频数和频率(一对孪生质数计为2个质数).



探索与创新

- 对每个不等于1的正整数 n ,都可以分解为若干个质数的积,即

$$n = p_1 p_2 \cdots p_k \quad (k \geq 1),$$

其中 $p_1, p_2, \dots, p_k$ 都是质数(可以相同),所以对于每个不等于1的正整数 n ,如果 n 不是质数,那么必定 n 有一个因数是质数.有人用这个性质说明质数有无限多个:

“假设质数只有有限多个,设全部质数是 $p_1, p_2, \dots, p_n$.将它们相乘后再加1,便得到正整数

$$m = p_1 p_2 \cdots p_n + 1.$$

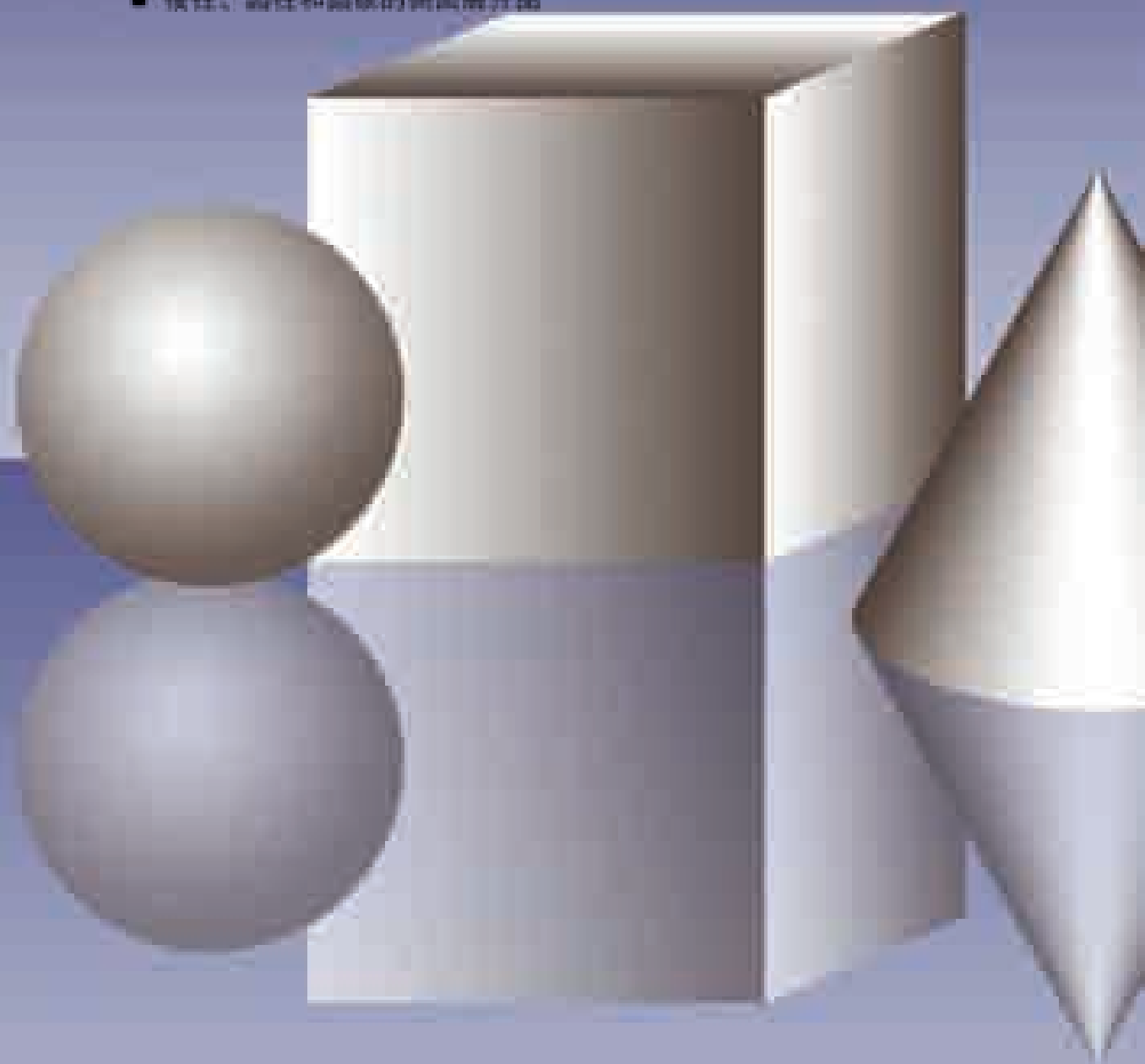
m 大于 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 中任何一个,即 m 大于所有质数,所以 m 不是质数.而且 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 中任何一个都不能整除 m ,即任何质数不能整除 m ,因此 m 也是质数,这与 m 不是质数矛盾.所以质数有无限多个”.

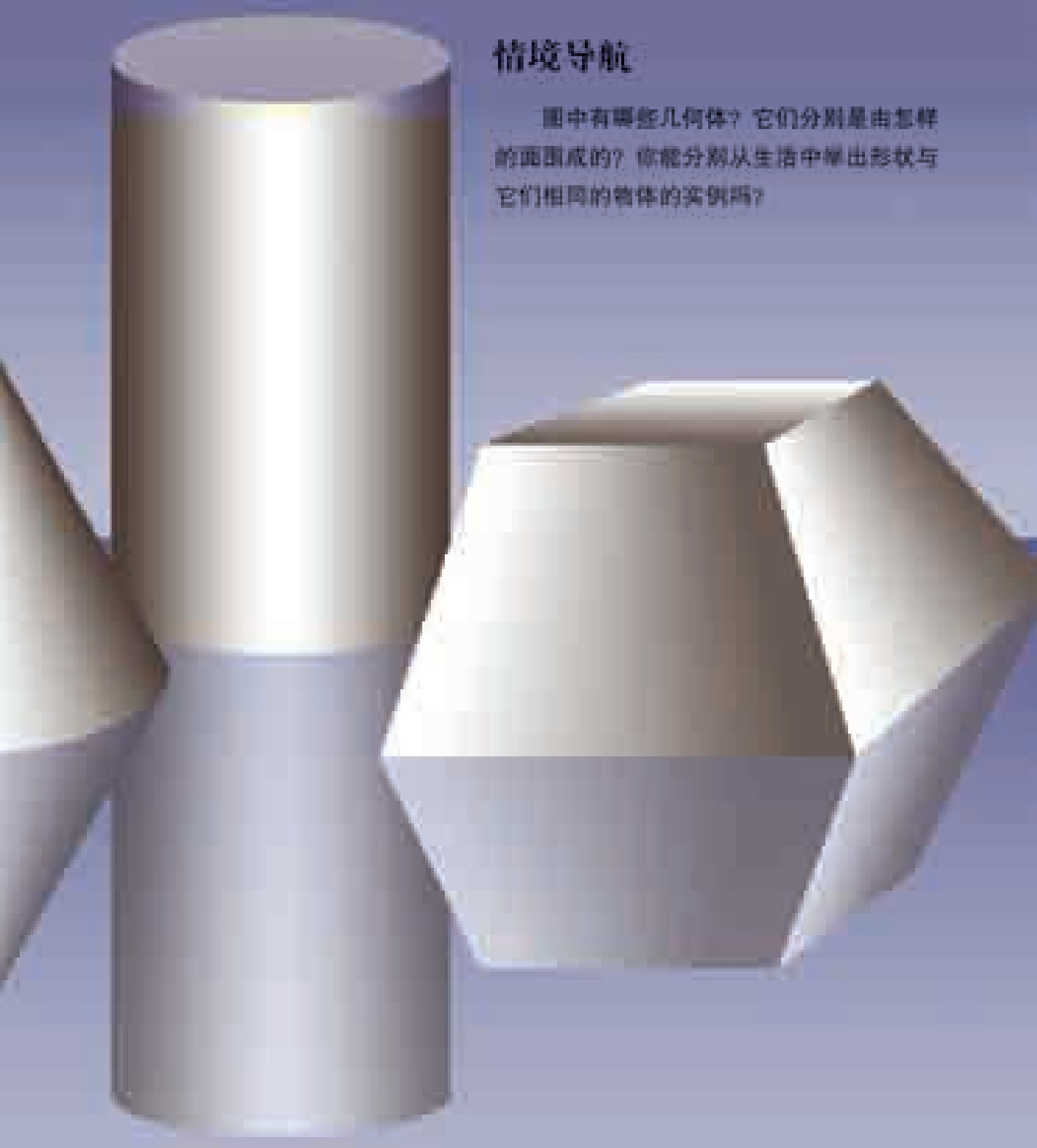
- 你认为这个证明正确吗?
- 写出100以内所有可以表示为不同质数乘积加1形式的质数来,如 $7 = 2 \times 3 + 1$, $23 = 2 \times 11 + 1$, $67 = 2 \times 3 \times 11 + 1$ 等.不超过100的这种质数的频数是多少?这种质数在不超过100的所有质数中出现的频率是多少?

第 7 章 空间图形的初步认识

内容提要

- 几种常见的几何体
- 棱柱、圆柱和圆锥的侧面展开图





情境导航

图中有哪些几何体？它们分别是由怎样的面围成的？你能分别从生活中举出形状与它们相同的物体的实例吗？

7.1 几种常见的几何体



观察与思考

(1) 图 7-1 中的每个几何体各有多少个面？每个面分别是什么图形？

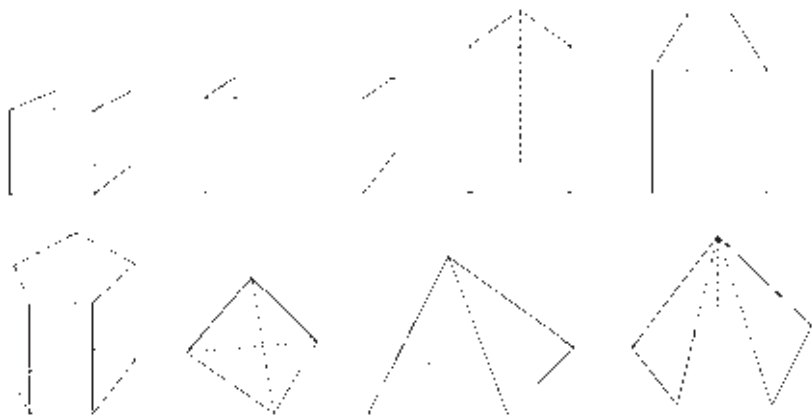
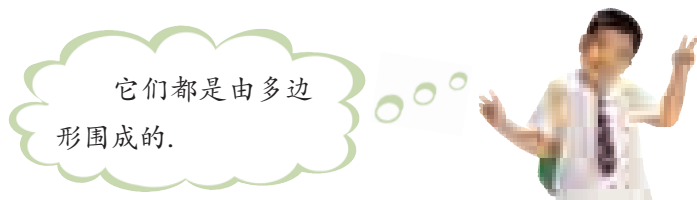


图 7-1

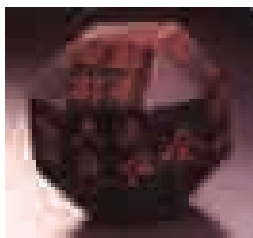
(2) 这些几何体有什么共同特征？



像这样，由多边形围成的几何体叫做**多面体**（polyhedron）。围成多面体的多边形的边叫做多面体的**棱**，多边形的顶点叫做多面体的**顶点**。

图 7-2 是在陕西出土的西魏时期（535 ~ 557）制作的文物“煤精组印”，它的形状是一个多面体，由 26 个面围成，其中有 18 个面是正方形、8 个面是正三角形。

(3) 图 7-3 是体育比赛使用的道次桩。它的形状是多面体吗？每个道次桩有多少个面？多少条棱？多少个顶点？



煤精组印
图 7-2



道次桩
图 7-3

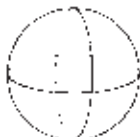
- (4) 你还能举出生活中多面体形状的物体的实例吗? 与同学交流.
- (5) 下面三种几何体(图7-4)是多面体吗? 为什么? 它们有什么共同特征?



圆柱



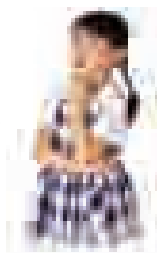
圆锥



球

图 7-4

围成它们的面不是多边形, 所以不是多面体. 它们都有一个面是曲面.



- (6) 你过去学过哪些几何体的表面积公式和体积公式? 你能用字母将它们分别表示出来吗?

例1

四颗人造地球卫星在各自的轨道上运行. 在某一时刻, 测得每一颗人造卫星与其他三颗人造卫星的距离都相等. 请你说出这一时刻四颗人造地球卫星的相对位置. 如果用火柴棒演示这一时刻四颗卫星的相互位置, 至少需要多少根火柴棒?

解

四颗人造地球卫星这一时刻所在的位置用点 A, B, C, D 表示. 由题意知, 这四个点中, 每个点与其他三点的距离都相等, 即 $AB = BC = CD = DA$, 因此, 点 A, B, C, D 中, 以每三个点为顶点的三角形即 $\triangle ABC, \triangle ACD, \triangle ABD, \triangle BCD$, 它们都是全等的正三角形. 在空间中, 它们围成一个所有棱长都相等的四面体. $A, B, C,$

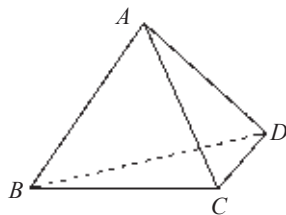


图 7-5

D 是这个四面体的四个顶点 (图 7-5). 由于这个四面体有六条棱, 所以至少需要 6 根火柴棒才可演示这一时刻四颗人造卫星的相互位置.

例2 一个蓄水池分为深水区及浅水区, 图 7-6 是该蓄水池的纵断面示意图, 它的横断面是矩形. 如果以固定流速向空池内注水, 在图 7-7 中, 能反映池内最大水深 h 与注水时间 t 之间函数关系的图象是哪一个?

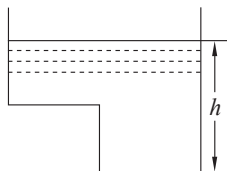


图 7-6

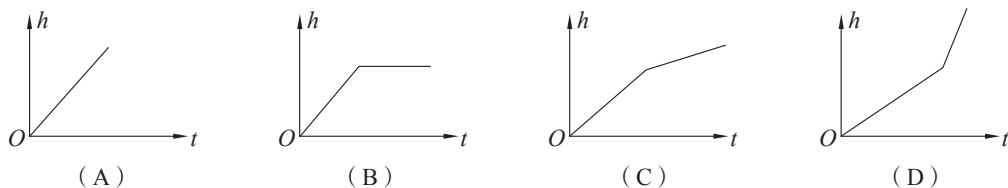


图 7-7

解 根据这个蓄水池纵断面和横断面的形状, 可以想象这个蓄水池的形状是由长方体 ① 和长方体 ② 组合而成 (图 7-8), 长方体 ② 在长方体 ① 的上方, 且 ② 的底面积大于 ① 的底面积. 注水过程中, 水先注入 ①, 随着注水时间 t 的增加, 当水注满长方体 ①, 开始注入长方体 ② 时, 由于注水速度固定, 水面高度 h 上升的速度比向 ① 注水时变慢. 所以在图象中, 此时应出现一个分段点. 也就是说, 在整个注水过程中, 最大水深 h 是注水时间 t 的分段函数.

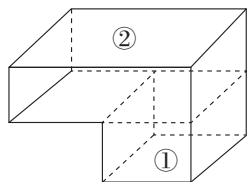


图 7-8

由此可见, 图象 (C) 能够反映 h 与 t 之间的函数关系. 而图象 (A) 表示注水时, 水深 h 上升的速度始终是均匀的; 图象 (B) 表示当水注满长方体 ① 后, 水面高度不再上升; 图象 (D) 表示当水注满长方体 ① 后, 水面高度上升的速度加快, 因此都不正确.



挑战自我

你能数出图 7-2 中煤精组印共有多少条棱、多少个顶点吗? 与同学交流.



练习

1. 用一个平面截一个球, 所得的截面是什么形状的图形?
2. 用一个平面截一个正方体, 所得到的截面可能是什么形状?

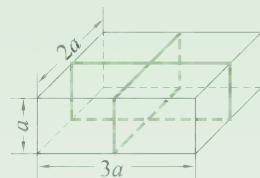


习题7.1

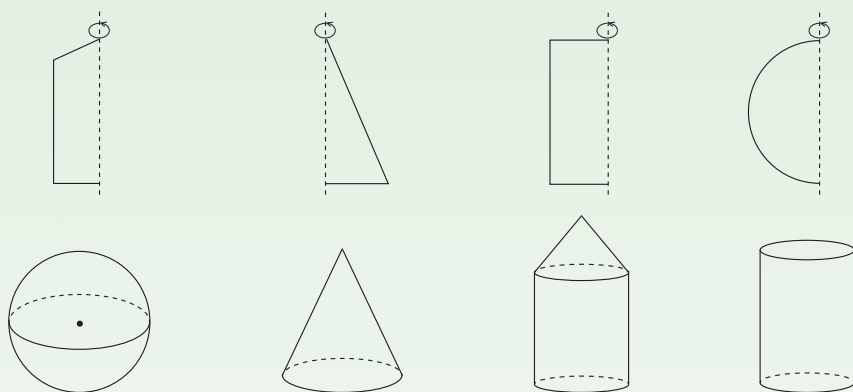


复习与巩固

1. 把一个长、宽、高分别是 $3a$, $2a$, a 的礼品盒打包, 打包的方式如图所示. 打包带的长度至少是多少?
2. 下图第二排中的立体图形分别是由第一排的哪个平面图形旋转后得到? 请用线分别把它们连起来.



(第1题)



(第2题)

3. 选择题: 在雨地里放置一个无盖的容器, 如果雨水均匀地落入容器, 容器内水面高度 h 与时间 t 的函数图象如图所示, 那么这个容器的形状可能是 ().



(第3题)



(A)



(B)



(C)



(D)



拓展与延伸

4. 大刚放学后发现没有把家庭作业中的一个图形画下来, 便打电话向小亮求助, 小亮面对图中的立体图形应怎样向大刚描述?



(第4题)

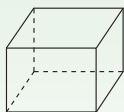


探索与创新

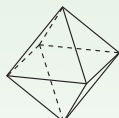
5. 瑞士数学家欧拉 (Euler, 1707-1783) 发现并证明了多面体的顶点数 V 、面数 F 、棱数 E 之间存在一个有趣的关系式, 这个关系式被后人称为欧拉公式. 观察下面画出的多面体, 解答下列问题:



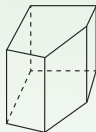
四面体



长方体



八面体



五棱柱

(第5题)

(1) 完成表格中的空格:

多面体	顶点数 V	面数 F	棱数 E
四面体	4	4	
长方体	8	6	12
八面体		8	12
五棱柱	10	7	

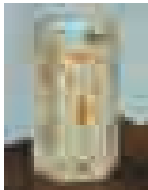
你发现各个多面体顶点数 V 、面数 F 、棱数 E 之间存在的关系式是 _____;

(2) 一个多面体的面数比顶点数多 8, 且有 30 条棱, 这个多面体是几面体?

(3) 一个玻璃饰品的外形是多面体, 它的表面是由三角形和八边形两种多边形围成, 且一共有 24 个顶点, 每个顶点处都有 3 条棱. 这个玻璃饰品是几面体?

7.2 直棱柱的侧面展开图

生活中, 有许多物体呈棱柱的形状 (图 7-9). 你还能举出棱柱形状的物体的例子吗?



笔筒



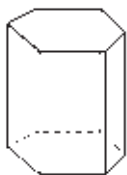
石料



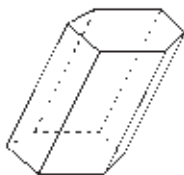
三棱镜

图 7-9

棱柱分为直棱柱和斜棱柱（图 7-10），本书只研究直棱柱.



直棱柱



斜棱柱

图 7-10



观察与思考

(1) 长方体是直棱柱吗？在如图 7-11 所示的长方体中， $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 分别是它的下底面和上底面，它们的形状和大小有什么关系？

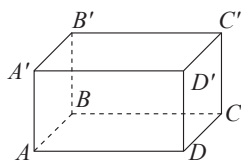


图 7-11

(2) 在如图 7-12 所示的直棱柱中，五边形 $A'B'C'D'E'$ 是它的上底面. 你能说出它的下底面是几边形吗？它的上、下底面的形状和大小有什么关系？

直棱柱的底面是几边形就叫做直几棱柱，如长方体也叫做直四棱柱，图 7-12 中的棱柱叫做直五棱柱，图 7-10 中的直棱柱叫做直六棱柱. 在棱柱中，除上、下底面以外，其他的面叫做它的侧面. 相邻两个侧面的公共边叫做棱柱的侧棱.

(3) 长方体有几个侧面？各个侧面都是什么图形？长方体有几条侧棱？相邻的两条侧棱有什么关系？直五棱柱和直六棱柱呢？

由 (1) (2) (3)，你能概括出直棱柱有哪些性质吗？

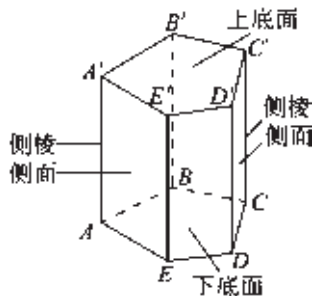
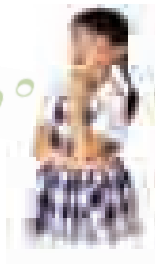


图 7-12

直棱柱的上、下底面是全等的多边形，各个侧面都是矩形. 侧棱数、侧面数都等于底面的边数，相邻的两条侧棱平行且相等.



(4) 图 7-13 中的“六扇屏”是由 6 个全等的矩形屏扇依次相连而成的，如果将它按照图 7-14 中所示的方式围起来，你发现这 6 个矩形围成一个怎样的立

体图形？如果把一个直六棱柱沿它的一条侧棱剪开，再将各个侧面铺在同一个平面内，得到一个怎样的图形？

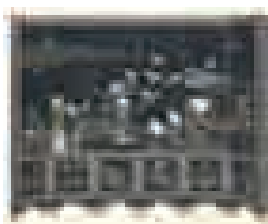


图 7-13



图 7-14

同样地，把一个直三棱柱沿着它的一条侧棱剪开，将各个侧面铺在同一个平面内，得到一个怎样的图形？直四棱柱、直五棱柱呢？

一般地，将一个直棱柱沿它的一条侧棱展开，将各个侧面铺在同一个平面内，所得到的图形叫做这个直棱柱的侧面展开图. 直棱柱的侧面展开图是矩形，矩形的宽等于直棱柱的侧棱长，矩形的长等于直棱柱底面的周长.

(5) 如果用 c 表示直棱柱的侧棱长， l 表示直棱柱底面的周长， $S_{\text{侧}}$ 表示直棱柱的侧面积，你能写出直棱柱侧面积的计算公式吗？

例1 已知直四棱柱的底面是菱形，它的一条边长为 3，一个角为 60° ，直四棱柱的侧棱长为 6. 求出它的表面积.

解 由题意可知，该直四棱柱的侧面展开图是一个宽为 6、长为 12 的矩形.

$$\therefore S_{\text{侧}} = 6 \times 12 = 72.$$

该直四棱柱的底面 $ABCD$ 如图 7-15 所示. 已知 $AB = 3$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，所以 $AC = AB = 3$ ，

$$BO = AB \cdot \cos \angle ABO = 3 \cdot \cos 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

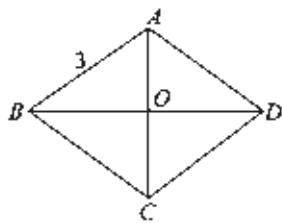


图 7-15

$$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2} (AC \cdot BD) = \frac{1}{2} (3 \times 3\sqrt{3}) = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore S_{\text{表}} = S_{\text{侧}} + 2S_{\text{菱形}ABCD} = 72 + 9\sqrt{3}.$$



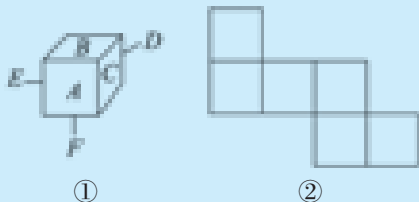
挑战自我

有一块 $50 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ 的铁片，准备用它加工一些棱长为 10 cm 的无盖正方体铁盒，请画图说明怎样下料才能使加工成的盒子数最多，最多可加工几个？

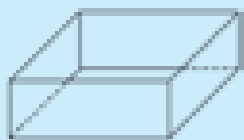


练习

1. 图①是一个正方体, 各个面上按图①所示分别标有字母 A, B, C, D, E, F . 如果将这个正方体沿它的某些棱剪开, 然后各个面都铺在同一个平面上, 能得到图②吗? 如果能, 请在图②中的各个面上分别填上相应的字母. 如果有几种不同的填法, 请画图说明.



(第1题)



(第2题)

2. 如图, 一个无盖的长方体盒子表面积为 S , 底面为边长为 a 的正方形. 求它的体积.

例2

某种长方体形肥皂在出厂前按每组 4 块进行打包, 肥皂的尺寸为 $3\text{ cm} \times 6\text{ cm} \times 9\text{ cm}$.

- (1) 你能设计出几种打包方式? 画图说明.
- (2) 在你设计的打包方式中, 哪一种方式打包最节省包装材料?

解

(1) 例如有以下 6 种不同的打包方式, 图示如下:

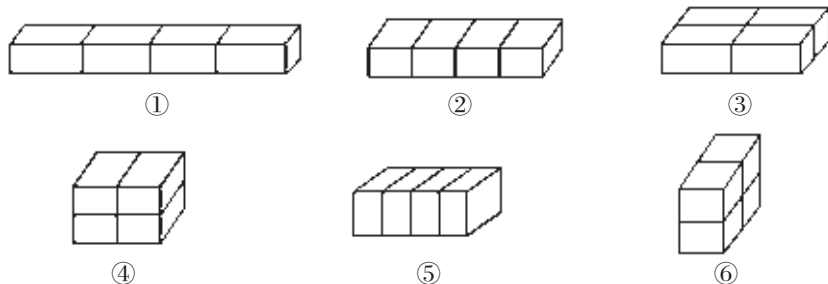


图 7-16

(2) 分别计算图 7-16 ①~⑥ 长方体的表面积, 得

- ① $2 \times (4 \times 6 \times 9) + 2 \times (4 \times 3 \times 9) + 2 \times (3 \times 6) = 684 (\text{cm}^2)$;
- ② $2 \times (4 \times 6 \times 9) + 2 \times (3 \times 9) + 2 \times (4 \times 3 \times 6) = 630 (\text{cm}^2)$;
- ③ $2 \times (4 \times 6 \times 9) + 2 \times (2 \times 3 \times 9) + 2 \times (2 \times 3 \times 6) = 612 (\text{cm}^2)$;
- ④ $2 \times (2 \times 6 \times 9) + 2 \times (2 \times 3 \times 9) + 2 \times (4 \times 3 \times 6) = 468 (\text{cm}^2)$;
- ⑤ $2 \times (6 \times 9) + 2 \times (4 \times 3 \times 9) + 2 \times (4 \times 3 \times 6) = 468 (\text{cm}^2)$;

$$\textcircled{6} 2 \times (2 \times 6 \times 9) + 2 \times (4 \times 3 \times 9) + 2 \times (2 \times 3 \times 6) = 504 (\text{cm}^2).$$

在上述长方体的表面积中, 长方体 ④ 和 ⑤ 的表面积最小, 所以按图 7-16 ④ 或 ⑤ 所示的方式包装, 最节省包装材料.

例3 如图 7-17, 一只苍蝇停落在一个无盖的棱长为 1 m 的正方形箱子

的顶点 D' 处. 藏在箱子底部的点 B 处的一只蜘蛛发现了这只苍蝇.

(1) 如果蜘蛛沿着 $BB' - B'A' - A'D'$ 的路径去捕捉苍蝇, 需要爬行多少路程?

(2) 如果蜘蛛沿着 $BA' - A'D'$ 的路径去捕捉苍蝇, 需要爬行多少路程?

(3) 蜘蛛沿箱子内壁上的哪条路径去捕捉苍蝇, 爬行的路程最短? 最短路程是多少?

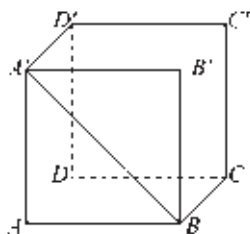


图 7-17

解 (1) 如图 7-17, BB' , $B'A'$, $A'D'$ 是该正方体的三条棱,

所以, 路径 $BB' - B'A' - A'D'$ 的长为

$$BB' + B'A' + A'D' = 1 + 1 + 1 = 3 (\text{m}).$$

即这时蜘蛛需要爬行 3 m 长的路程.

(2) 如图 7-17, BA' 是正方形 $ABB'A'$ 的对角线. 在 $\text{Rt}\triangle A'AB$ 中, 由勾股定理, 得

$$BA' = \sqrt{AB^2 + AA'^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} (\text{m}).$$

所以, 路径 $BA' - A'D'$ 的长为

$$BA' + A'D' = (\sqrt{2} + 1) (\text{m}).$$

即这时蜘蛛需要爬行 $(\sqrt{2} + 1)$ m 长的路程.

(3) 将这个箱子的侧面沿侧棱 CC' 展开, 便得到这个箱子的侧面展开图 (图 7-18).

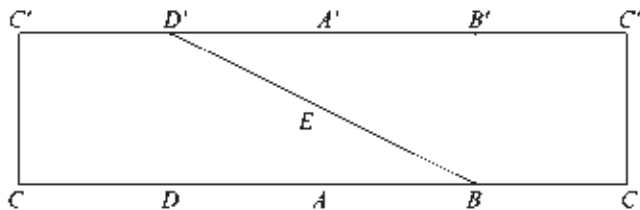


图 7-18

图 7-18 中, 由基本事实“两点之间, 线段最短”可知, B , D' 两点的最短路径为线段 BD' , 设 BD' 与 AA' 的交点为 E , 由 $\text{Rt}\triangle EAB \cong \text{Rt}\triangle EA'D'$, 可知 $AE = A'E$, 即 E 为 AA' 的中点.

如图 7-19, 取 AA' 的中点 E , 分别连接 BE , ED' , 此时, 路径 $BE-ED'$ 的长 (图 7-18) 为

$$BD' = \sqrt{BD^2 + DD'^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ (m)}.$$

所以, 蜘蛛沿路径 $BE-ED'$ 爬行的路径最短, 最短路程为 $\sqrt{5}$ m.

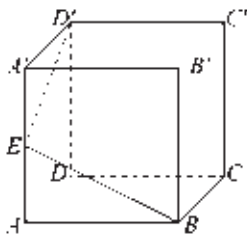


图 7-19

通过几何体的表面展开图, 可以把空间图形的问题转化为平面图形的问题来解决.



你还能画出从 B 点沿箱子内壁到达 D' 点的另外一条最短路径吗?



智趣园

杜登尼的“苍蝇和蜘蛛问题”

杜登尼 (Dudeney, 1857—1930) 是英国著名的谜题创作者, 被誉为近代趣味数学的开创人之一. 他也提出了一个“苍蝇和蜘蛛问题”, 并刊登在 1903 年的英国报纸上. 据说, 这道谜题对世界难题爱好者的挑战长达四分之三世纪.

杜登尼的“苍蝇和蜘蛛问题”是这样的: 一个长方体形的房间, 宽和高都是 12 英尺^①, 长为 30 英尺. 有一只蜘蛛在朝前一面正方形内墙壁的中间, 距离天花板 1 英尺的点 A 处, 一只苍蝇停在对面内墙壁的中间, 距离地板 1 英尺的点 B 处 (图 7-20). 为了捉到苍蝇, 蜘蛛沿墙壁或天花板或地板爬行的最短路径是怎样的? 最短路径的长是多少?

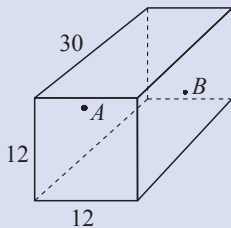


图 7-20

你可能一眼就看出一条貌似最短的路径: 从点 A 向上, 沿天花板到达点 B 的正上方, 再沿对面墙壁向下到达点 B . 这条路径长为 $1 + 30 + 11 = 42$ (英尺). 还有一条路径是从点 A 向下, 沿地板到达点 B 的正下方, 沿对面墙向上到达点 B . 这条路径也是 42 英尺. 你千万不要忙着下结论: 最短路径长为 42 英尺. 这道题的有趣和奇妙之处就在于真正最短的路径恰恰不是你想的这两条!

设想把房间的六个面按图 7-21 的方式展开到同一个平面上, 从图中可以看出,

① 英尺是英制长度单位, 1 英尺 = 0.304 8 m.

$$AC = 1 + 30 + 1 = 32, BC = 6 + 12 + 6 = 24, AB = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40 \text{ (英尺)}.$$

显然, 这条路径比你想要的两条路径要短. 这时, 蜘蛛爬行的实际路径是从点 A 沿点 A 所在正方形墙面向左上方到天花板, 然后沿天花板向左前方爬行至左墙, 再沿左墙斜下至地板, 又沿地板向右前方爬到对面墙壁再沿对面墙壁斜上到达点 B . 这就是蜘蛛捉到苍蝇的最短路径, 你能在图 7-20 中把它画出来吗?

这个长方体的表面展开图有多种不同的形式, 图 7-22 是其中的几种. 在每个展开图中, 连接 AB 都可以得到一条路径, 但这些路径的长都大于 40 英尺. 因此你可以体会该题的难度, 并感受到在寻求几何体表面上两点间的最短路径问题的答案时, 选择最合适的表面展开图是多么重要!

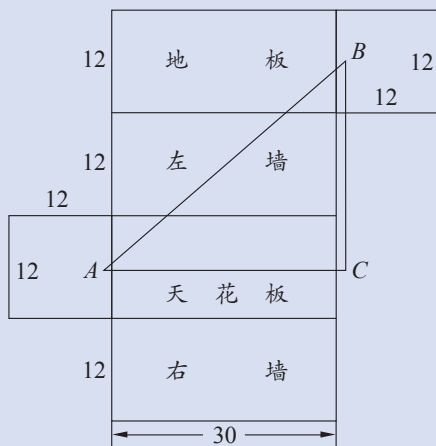


图 7-21

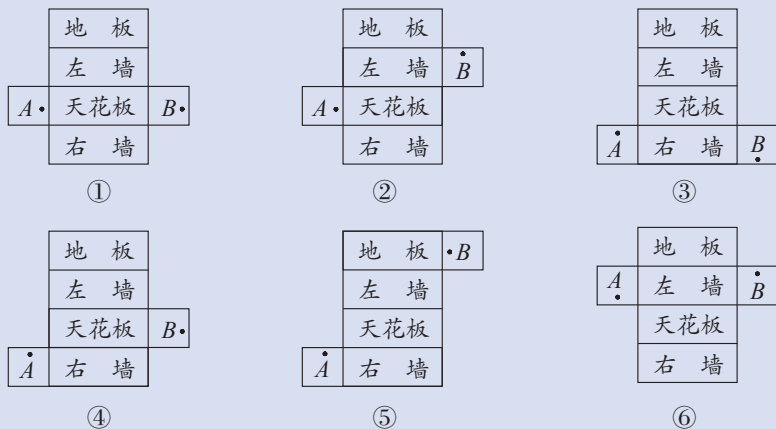
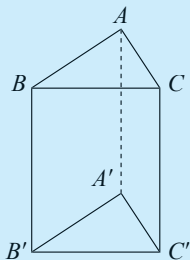


图 7-22



练习

- 如图, 已知直三棱柱中, $AB = 8 \text{ cm}$, $BC = 10 \text{ cm}$, $AC = 6 \text{ cm}$, 直三棱柱的侧棱 $AA' = 15 \text{ cm}$. 求该直三棱柱的表面积.
- 已知一个长方体长为 4 cm , 宽为 5 cm , 高为 5 cm , 求:
 - 长方体所有棱长之和;
 - 长方体的表面积.



(第 1 题)

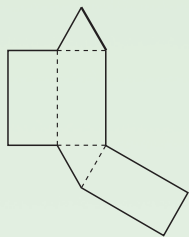


习题7.2



复习与巩固

1. (1) 如图是一个直三棱柱的表面展开图, 其中用粗实线标出的各边分别与哪条边原来是同一条棱? 请在图中用不同颜色的彩笔把它们分别标出来;

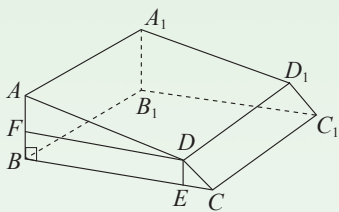


- (2) 如果这个直三棱柱的底面是边长为 5 cm 的正三角形, 侧棱长为 10 cm. 这个三棱柱的表面积是多少?

(第 1 (1) 题)

2. 一个直四棱柱的侧面展开图是边长为 40 cm 的正方形, 它的底面也是正方形. 求这个直四棱柱的表面积.
3. 有两块规格为 21 cm × 15 cm 的矩形纸板, 分别以它的长和宽作为底面的周长, 围成两个底面是正三角形的直三棱柱的侧面. 哪种围法围成的棱柱的体积较大?

4. 如图是一个蔬菜种植大棚的示意图. 其中, $AB = 3$ m, $BC = 6$ m, $AA_1 = 28$ m, $\angle BCD = 45^\circ$, $AB \perp BC$, $DE = 1$ m, 面 ADD_1A_1 和 DCC_1D_1 都用钢架制成并用塑料薄膜覆盖. 已知墙体及其他设备的造价为 3 200 元, 钢架及塑料薄膜的平均价格为 50 元/m², 修建一个这样的蔬菜大棚总造价为多少元 (精确到 1 元)?

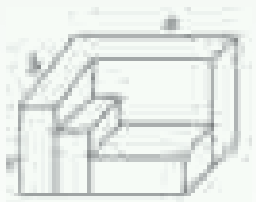


(第 4 题)

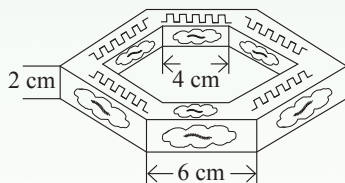


拓展与延伸

5. 为了计算图中几何体的表面积, 除已标出的数据 a , b , c 外, 你认为还需要补充哪些数据? 用你补充的数据求出它的表面积. 对比棱长分别为 a , b , c 的长方体的表面积, 你发现了什么?
6. 有人在古玩市场出售一只被称为是印加遗物的“护身符”(如图), 这个环状物外形可以看作是从一个直六棱柱形中挖去一个直六棱柱后的剩余部分, 两个直六棱柱的底面都是正六边形, 其尺寸如图所示. 据记载, 这种印加遗物的体积应当等于它中间被挖去的直六棱柱的体积, 否则就是赝品. 你能帮助购买者鉴定它的真伪吗?

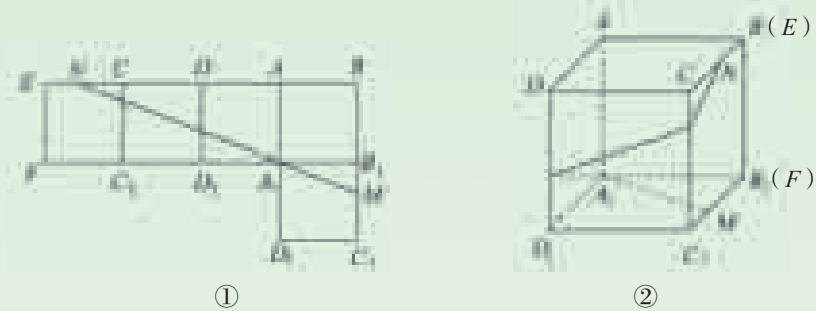


(第 5 题)



(第 6 题)

7. 如图, 图①是由五个边长为1的正方形纸片连接而成的, 过点 A_1 的直线 MN 分别与 BC_1 , BE 交于点 M , N , 且图①被直线 MN 分为面积相等的上、下两部分.



(第7题)

- (1) 求 $\frac{1}{BM} + \frac{1}{BN}$ 的值;
- (2) 分别求线段 BM , BN 的长;
- (3) 将图①按图②所示的方式折成一个无盖的正方体纸盒, 使点 B 与点 E 重合, 点 B_1 与点 F 重合, 求图②中点 M 与点 N 之间的距离.



探索与创新

8. 一个可用电加热的浴盆呈直六棱柱形, 它的底面是边长为 0.8 m 的正六边形, 浴盆中已放有 高为 0.8 m 的水, 水温为 32°C . 在说明书的表格中列出了不同体积的水升温 10°C 需要的时间. 请计算要将这些水加热至 42°C 时所需要的大约时间 (精确到 1 min).

温度升高 10°C 所需的时间

水的体积 / L	1 000	1 100	1 200	1 300	1 400	1 500	1 600	1 700
加热时间 / min	11	12	13	14	15	16	17	18

9. (1) 收集一些商品的长方体形的空包装纸盒, 分别计算它们的体积和表面积;
- (2) 将这些盒子沿它的某些棱拆开, 观察它们是怎样裁剪和粘接起来的. 选择其中的两个盒子按适当的比例尺画出它们的表面展开图;
- (3) 取一块 A4 纸大小的矩形纸板, 根据 (2) 中的发现, 裁剪、折叠出一个无盖的长方体形的盒子 (粘接部分不计), 并计算出它的体积;
- (4) 与同学比较谁制作的纸盒体积较大, 分析怎样能作一个体积更大一些的长方体形的盒子.

7.3 圆柱的侧面展开图



观察与思考

如图 7-23 ①, 将矩形 $OAA'O'$ 以它的一条边 OO' 为轴旋转一周, 所得到的立体图形是一个圆柱. 由矩形的边 OA , $O'A'$ 旋转所成的面分别是圆柱的下底面与上底面, 矩形的边 AA' 旋转所成的面是圆柱的侧面. 线段 AA' 叫做圆柱的**母线**.

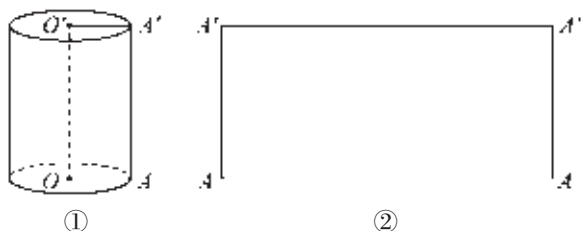


图 7-23

思考下面的问题:

- (1) 圆柱的高与母线有什么关系?
- (2) 将圆柱的侧面沿它的母线剪开, 然后铺在平面上, 得到一个怎样的图形 (图 7-23 ②)?
- (3) 比较圆柱和它的侧面展开图, 你发现侧面展开图的两边与圆柱的底面周长和母线有怎样的关系?
- (4) 由 (3), 如果已知圆柱的底面圆的半径为 r , 母线长为 l , 那么圆柱的侧面积等于多少?

圆柱的侧面展开图是一个矩形, 它的一边是圆柱的母线, 另一边的长等于底面圆的周长. 圆柱侧面积等于圆柱的侧面展开图的面积, 即 $S_{\text{侧}} = 2\pi rl$, 其中 r 是圆柱的底面半径, l 是圆柱的母线长.

例1 如图 7-24, 要用钢板制作一个无盖的圆柱形水箱, 它的高为 2.5 m、容积为 10 m^3 . 求需用钢板的面积 (不计加工余量, 精确到 0.1 m^2).

解 由题意可知, $h = 2.5 \text{ m}$, $V = 10 \text{ m}^3$. 设水箱底面半径为 r (m), 由 $V = S_{\text{底}} \cdot h = \pi r^2 h$, 得

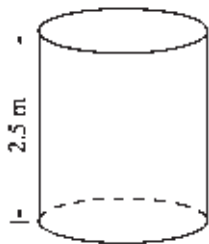


图 7-24

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi h}} \approx \sqrt[3]{\frac{10}{3.14 \times 2.5}} \approx 1.13 \text{ (m)}.$$

$$S_{\text{侧}} = 2\pi rh \approx 2 \times 3.14 \times 1.13 \times 2.5 \approx 17.75 \text{ (m}^2\text{)}.$$

$$S_{\text{底}} = \pi r^2 \approx 3.14 \times 1.13^2 \approx 4.01 \text{ (m}^2\text{)}.$$

$$S_{\text{表}} = S_{\text{侧}} + S_{\text{底}} \approx 17.75 + 4.01 \approx 21.8 \text{ (m}^2\text{)}.$$

所以, 共需钢板约 21.8 m^2 .

例2

如图 7-25, 在一个高与底面直径相等的圆柱内放置一个体积最大的球. 已知球的体积公式为 $V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi r^3$, 表面积公式为 $S_{\text{球}} = 4\pi r^2$, 其中 r 为球的半径. 求该球与它的外切圆柱的体积的比及它们的表面积之比.

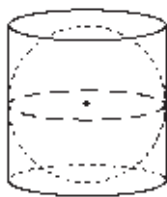


图 7-25

解

设圆柱的体积为 $V_{\text{圆柱}}$, 圆柱的全面积为 $S_{\text{圆柱}}$, 圆柱的底面半径为 r , 那么圆柱的高等于 $2r$, 圆柱内放置的体积最大的球的半径等于 r .

$$\because V_{\text{圆柱}} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3, \quad V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

$$\therefore \frac{V_{\text{球}}}{V_{\text{圆柱}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi r^3} = \frac{2}{3}.$$

$$\because S_{\text{圆柱}} = 2S_{\text{底}} + S_{\text{侧}} = 2\pi r \cdot 2r + 2\pi r^2 = 6\pi r^2, \quad S_{\text{球}} = 4\pi r^2,$$

$$\therefore \frac{S_{\text{球}}}{S_{\text{圆柱}}} = \frac{4\pi r^2}{6\pi r^2} = \frac{2}{3}.$$

由例 2 可知, 球的体积等于它的外切圆柱的体积的 $\frac{2}{3}$; 球的表面积也等于它的外切圆柱表面积的 $\frac{2}{3}$. 这就是古希腊数学家阿基米德在 2 300 年前发现并证明的“圆柱容球定理”.

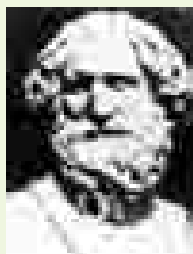


史海漫游

“数学之神”阿基米德

阿基米德 (Archimedes, 前 287 ~ 前 212) 被认为是人类文明史上与牛顿、高斯并列的三位最伟大的数学家之一, 素有“数学之神”的美誉. 阿基米德出生于古希腊西西里岛的叙拉古, 早年曾在位于埃及的当时世界上最大的科学文化中心亚历山大城跟随欧几里得的弟子学习数学.

阿基米德的研究范围非常广泛,他在数学、天文学、物理学诸领域均有卓越贡献,仅保留下的专著就有10种之多.他利用计算圆的外切与内接正96边形周长求得圆周率在 $\frac{22}{7}$ 和 $\frac{223}{71}$ 之间,即在3.142 9和3.140 8之间.这个结果在数学史上是最早的.他用原始的积分法的思想计算出球和柱体的体积及表面积,论述了阿基米德螺线引出的面积和切线问题,发现并证明了抛物线与直线围成弓形的面积等一系列定理.他的关于抛物线、双曲线和椭圆旋转所形成的立体图形的许多研究结果,成为微积分学的早期萌芽.在天文学上,他发明并制作了天象仪.更可贵的是阿基米德提出了地球环绕太阳旋转的观点,先于哥白尼一千八百年.在物理学方面,阿基米德发现并创立了著名的浮力原理、杠杆定律、平面图形的重心求法等.



阿基米德

值得一提的是,圆柱容球定理是阿基米德的最得意之作,所以在他去世后,人们在他的墓碑上刻绘了“圆柱容球”的几何图形(图7-25).



练习

1. 一个圆柱的侧面展开图是一个正方形,求这个圆柱的表面积与侧面积之比.
2. 已知圆柱侧面积为 $32\pi \text{ cm}^2$,母线长4 cm,求它的底面半径.

例3

如图7-26,一个圆柱体的底面周长为24 cm,母线 AB 为4 cm, BC 是上底的直径.一只蚂蚁从下底面的点 A 处出发爬行到上底面的点 C 处.

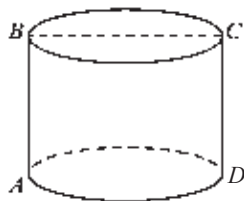


图7-26

(1) 如果它沿圆柱体的侧面爬行,其最短路径长是多少(精确到0.1 cm)?

(2) 如果将蚂蚁“沿圆柱体的侧面”改为“沿圆柱体的表面”,(1)中的答案还是最短路径吗?

(3) 当圆柱体底面半径 r 变化,而母线长 h 不变时,试比较沿圆柱体侧面由 A 处爬行到 C 处的最短路径与沿母线 AB 再沿上底面直径 BC 爬行到 C 处的路径的长短.

需要通过侧面展开图,转化为平面图形问题来解决.



解 (1) 将圆柱体的侧面沿母线 AB 剪开, 得到它的侧面展开图矩形 ABB_1A_1 (图 7-27).

由已知, $BB_1 = 24 \text{ cm}$.

$$\therefore BC = \frac{1}{2} BB_1,$$

$$\therefore BC = 12 \text{ cm}.$$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = 4 \text{ cm}$.

由勾股定理, 得

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 12^2} \approx 12.6 \text{ (cm)}.$$

由于圆柱的侧面展开图是平面图形, A, C 是该平面内的两点, 在 A, C 两点的连线中, 线段 AC 最短, 所以, 蚂蚁从点 A 沿着圆柱体侧面爬行到点 C 时, 如果沿着路径 AC 爬行 (图 7-28), 爬行的路径最短, 最短路径约为 12.6 cm .

(2) 因为底面圆的周长为 24 cm , 所以底面圆的直径

$$BC = \frac{24}{\pi} \approx 7.6.$$

蚂蚁由 A 处先沿母线 AB 爬到 B 处, 再沿上底面直径 BC 爬到 C 的路径长为

$$AB + BC \approx 4 + 7.6 = 11.6 < 12.6.$$

所以, 如果将蚂蚁“沿圆柱侧面”改为“沿圆柱的表面”, (1) 中的答案不再是最短路径.

(3) 当圆柱体底面半径 r 变化, 圆柱体母线长 h 不变时, 设沿圆柱体侧面从 A 处到 C 处的最短路径长为 l_1 , 由图 7-27, 可知

$$l_1 = \sqrt{h^2 + \pi^2 r^2}.$$

设路径 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 的长为 l_2 , 则

$$l_2 = h + 2r.$$

设 $d = l_1^2 - l_2^2$, 则

$$\begin{aligned} d &= (h^2 + \pi^2 r^2) - (h + 2r)^2 \\ &= (\pi^2 - 4)r^2 - 4hr. \end{aligned}$$

其中 h 为常量, d 是 r 的二次函数, 它的图象 (图

7-29) 与 r 轴交于点 $O(0, 0)$ 和点 $A(\frac{4h}{\pi^2 - 4}, 0)$.

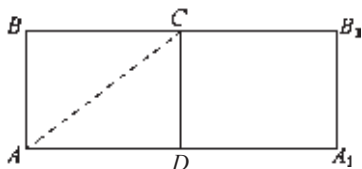


图 7-27

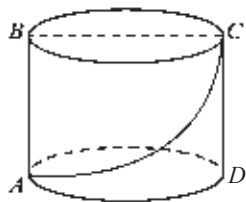


图 7-28

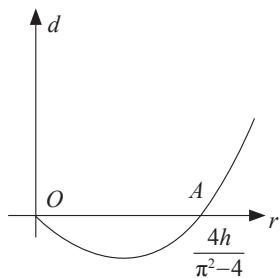


图 7-29

(1) 当 $0 < r < \frac{4h}{\pi^2 - 4}$ 时, $d < 0$, 即 $l_1^2 < l_2^2$, 此时 $l_1 < l_2$;

(2) 当 $r = \frac{4h}{\pi^2 - 4}$ 时, $d = 0$, 此时 $l_1 = l_2$;

(3) 当 $r > \frac{4h}{\pi^2 - 4}$ 时, $d > 0$, 即 $l_1^2 > l_2^2$, 此时 $l_1 > l_2$.



挑战自我

(1) 在例3中, 如果蚂蚁从点 A 出发沿圆柱的侧面爬行到点 C , 再沿侧面继续爬回到点 A , 最短路径的长是多少?

(2) 在例3中, 如果蚂蚁从点 A 出发沿圆柱的侧面爬行穿过母线 CD 后到达点 B , 最短路径的长是多少?



智趣园

圆柱螺旋线

有一道我国古代数学问题: “枯木一根直立地上, 高二丈, 周三尺, 有葛藤自根缠绕而上, 七周而达其顶, 问葛藤之长几何?” 你能解决这个问题吗?

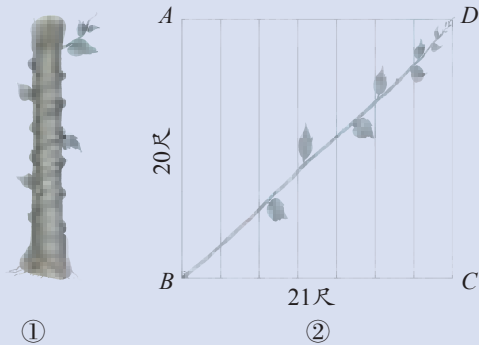


图 7-30



图 7-31

把枯木看作是一个圆柱体 (图7-30 ①), 它的底面周长为 3 尺. 侧面展开图是一个宽 3 尺、长 20 尺的矩形. 将 7 个这样的矩形按图 7-30 ② 中的方式并排而放, 得到一个长 21 尺、宽 20 尺的矩形 $ABCD$, 于是对角线 BD 的长即为葛藤的长.

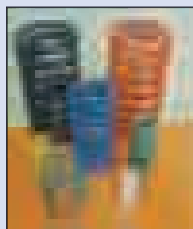
$$BD = \sqrt{21^2 + 20^2} = 29.$$

所以葛藤的长为 29 尺.

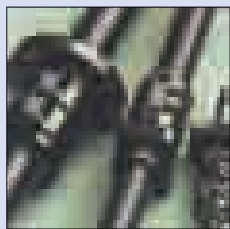
如图 7-31, 把一张直角三角形的纸卷到一个圆筒上, 直角三角形的斜边沿圆柱面

形成的空间曲线叫做圆柱螺旋线. 葛藤在枯木上缠绕形成的曲线正是一条圆柱螺旋线.

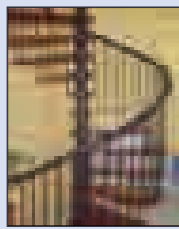
圆柱螺旋线在生活和生产实际中的应用很广泛. 例如弹簧、机器零件中的螺栓的螺纹、楼房中旋转形的楼梯的形状都是圆柱螺旋线 (图 7-32).



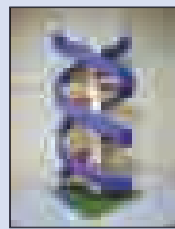
弹簧



螺栓



螺旋楼梯

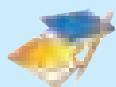


DNA 双螺旋结构

图 7-32

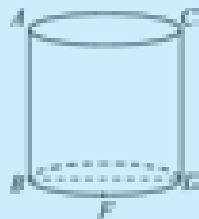
图 7-33

DNA 是一种纪录着生物遗传信息的大生物分子, 它存在于一切生物体的细胞核内. 科学家们发现 DNA 是双螺旋结构 (图 7-33), 它的形状是两条圆柱螺旋线.



练习

1. 已知圆柱的底面半径为 5 cm、高为 10 cm, BD 为下底面的一条直径, AB , CD 为母线, 求圆柱侧面上由点 A 沿圆柱侧面到下底面 $\widehat{BD}$ 的中点 F 的最短路径长 (精确到 0.1 cm).



(第 1 题)



习题 7.3



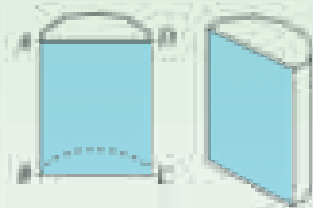
复习与巩固

1. 圆柱形油桶的高为 1.2 m、底面半径为 0.4 m, 要将 100 个这种油桶的外侧面刷上防锈漆, 每平方米费用是 2 元, 总费用大约多少元 (精确到 1 元).
2. 两个圆柱的高相等, 其中一个圆柱的底面积与另一个圆柱的底面积的比为 2 : 1, 求这两个圆柱的侧面积的比.
3. 一个长 4 cm、宽 3 cm 的矩形分别绕它的长和宽所在的直线旋转一周, 所得到的两个圆柱体的侧面积相等吗? 体积相等吗? 如果不相等, 哪个大?
4. 用一张边长为 20 cm 的正方形硬纸片围成一个圆柱形的侧面, 求这个圆柱的底面直径 (精确到 0.1 cm).



拓展与延伸

5. 如图, 经过圆柱形木块的轴将它剖开, 剖面是矩形 $ABCD$. 已知 $AD = 10\text{ cm}$, $AB = 15\text{ cm}$, 求“半个”圆柱形木块的表面积 (精确到 0.1 cm^2).
6. 圆柱形易拉罐的母线长为 10 cm , 侧壁厚度和底部厚度都是 0.02 cm , 顶部厚度是 0.06 cm . 设易拉罐底面半径为 $x\text{ (cm)}$, 制造一只易拉罐用铝 $y\text{ (g)}$, 铝的比重为 2.7 g/cm^3 , 求 y 与 x 之间的函数表达式.

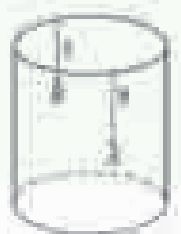


(第5题)



探索与创新

7. 如图, 一个透明的无盖圆柱筒形容器的底面直径为 10 cm , 在其内壁距上沿 5 cm 处的点 B 处有一滴蜂蜜, 在外壁点 B 正对着的另一面距上沿 8 cm 的点 A 处有一只甲虫. 如果筒壁厚度忽略不计, 甲虫由点 A 爬到点 B 处, 至少要爬行多长的路程 (精确到 0.1 cm).



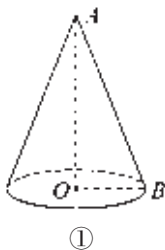
(第7题)

7.4 圆锥的侧面展开图

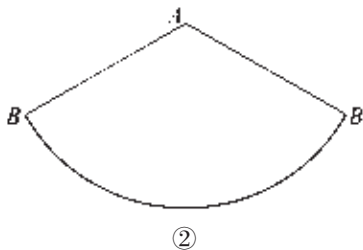


观察与思考

如图 7-34 ①, 将 $\text{Rt}\triangle OAB$ 以它一条直角边 OA 为轴旋转一周, 所得到的立体图形是一个圆锥. 另一条直角边 OB 旋转所成的面是圆锥的底面, 斜边 AB 旋转所成的面是圆锥的侧面, 点 A 叫做圆锥的顶点, 线段 AB 叫做圆锥的**母线**, AO 叫做圆锥的**高**.



①



②

图 7-34

思考下面的问题:

(1) 圆锥的高、底面半径与母线之间有什么关系?

(2) 将圆锥的侧面沿母线剪开, 然后铺在平面上, 得到一个怎样的图形(图 7-34②)?

(3) 比较圆锥和它的侧面展开图, 你发现圆锥的母线与侧面展开图的半径有什么关系? 圆锥的底面周长与侧面展开图中扇形的弧长有怎样的关系?

(4) 由(3), 如果已知圆锥的底面半径为 r 、母线长为 l , 那么圆锥的侧面积等于多少?

圆锥的侧面展开图是以圆锥的顶点为圆心、以母线为半径的扇形, 扇形的弧长等于圆锥底面的圆周长. 圆锥侧面积等于圆锥的侧面展开图的面积, 即 $S_{\text{侧}} = \frac{1}{2}cl = \pi rl$, 其中 c 是圆锥的底面圆的周长, r 是底面圆的半径, l 是圆锥的母线长.

例1 如图 7-35, 已知圆锥形工件的底面直径是 80 cm、母线长 50 cm.

(1) 求侧面展开图的圆心角, 并画出侧面展开图;

(2) 求圆锥的侧面积(精确到 1 cm^2).

解

(1) 由题意可知, 圆锥的侧面展开图的扇形半径为 50 cm, 扇形弧长为 $80\pi \text{ cm}$.

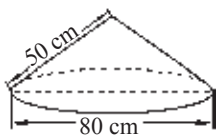


图 7-35

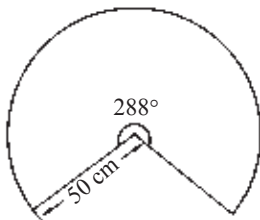


图 7-36

$$\therefore \text{扇形圆心角的度数 } n = \frac{180 \times 80\pi}{50\pi} = 288 (\text{度}).$$

画出半径为 50 cm, 圆心角为 288° 的扇形, 便得到该圆锥的侧面展开图(图 7-36).

$$(2) S_{\text{侧}} = \frac{1}{2} \times 50 \times 80\pi \approx 6\,283.$$

所以, 这个圆锥的侧面积约为 $6\,283 \text{ cm}^2$.

例2 如图 7-37, 已知圆锥的底面直径为 2、高为 $2\sqrt{2}$.

求圆锥的母线长及表面积.

解 连接圆锥的顶点 A 与底面圆心 O .

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, 由题意可知

$$AO = 2\sqrt{2}, OB = 1.$$

由勾股定理, 得

$$AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3.$$

$$S_{\text{侧}} = \frac{1}{2} cl = \frac{1}{2} \times 2\pi \times 3 = 3\pi,$$

$$S_{\text{底}} = \pi r^2 = \pi \times 1^2 = \pi.$$

$$\therefore S_{\text{表}} = S_{\text{侧}} + S_{\text{底}} = 3\pi + \pi = 4\pi.$$

所以, 这个圆锥的母线长为 3、表面积为 4π .

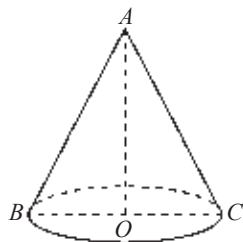


图 7-37



练习

1. 已知圆锥的侧面积为 14π , 母线长为 7, 求圆锥的表面积.
2. 已知圆锥的底面半径为 5 cm, 母线长为 9 cm, 求它的侧面展开图的圆心角及侧面积.

例3 如图 7-38, 将半径为 1、圆心角为 90° 的扇形薄铁片 OAB 卷成一个圆锥的侧面, 小亮认为卷成后圆锥的高等于扇形的圆心 O 到弦 AB 的距离 OC . 小亮的看法正确吗? 如果不正确, 圆锥的高与 OC 哪个大?

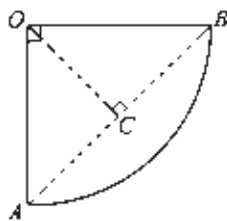


图 7-38

解 如图 7-38, 在 $\text{Rt}\triangle OAC$ 中,

$$OA = 1, \angle AOC = 45^\circ,$$

$$\therefore OC = OA \cdot \cos \angle AOC = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

扇形 OAB 所围成圆锥的侧面如图 7-39 所示, O' 为底面的圆心, $O'A$ 为底面的半径, OO' 为圆锥的高, 母线 $OA = 1$. 由于 OC 在扇形的侧面上, 因此 OC 不是圆锥的高 OO' , 小亮的看法不正确.

$\therefore$ 底面 $\odot O'$ 的周长等于图 7-38 中 $\widehat{AB}$ 的长,

$$\therefore 2\pi \cdot O'A = \frac{1}{4} \times 2\pi \times 1,$$

$$\text{解得 } O'A = \frac{1}{4}.$$

在 $\text{Rt}\triangle OO'A$ 中,

$$\text{圆锥的高 } OO' = \sqrt{OA^2 - O'A^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\therefore OC < OO'.$$

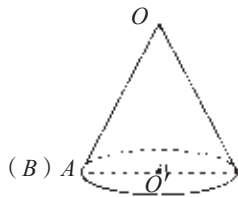


图 7-39

例4 如图 7-40, 一顶帐篷的上半部是圆锥形, 下半部是圆柱形. 已知圆柱的底面半径为 2.4 m、母线长 1.6 m, 圆锥的高为 1 m.

(1) 制作一顶这样的帐篷 (接缝不计) 大约需要用多少帆布 (精确到 0.1 m^2)?

(2) 帐篷的容积大约是多少 (精确到 0.1 m^3)?

解 (1) 圆柱底面周长 $l = 2\pi \times 2.4 \approx 15.07$,

$$\therefore S_{\text{圆柱侧}} = lh \approx 15.07 \times 1.6 = 24.11.$$

在 $\text{Rt}\triangle SOD$ 中, $SO = 1$, $OD = 2.4$, 由勾股定理, 得

$$SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = \sqrt{1^2 + 2.4^2} = 2.6.$$

$$\therefore S_{\text{圆锥侧}} = \frac{1}{2} \cdot l \cdot SD \approx \frac{1}{2} \times 15.07 \times 2.6 \approx 19.59.$$

$$\therefore S_{\text{圆柱侧}} + S_{\text{圆锥侧}} \approx 24.11 + 19.59 = 43.7.$$

所以, 制作一顶这样的帐篷大约需要用帆布 43.7 m^2 .

$$(2) V_{\text{圆柱}} = \pi r^2 h \approx 3.14 \times 2.4^2 \times 1.6 \approx 28.95.$$

$$V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h \approx \frac{1}{3} \times 3.14 \times 2.4^2 \times 1 \approx 6.03.$$

$$\therefore V_{\text{圆柱}} + V_{\text{圆锥}} \approx 28.95 + 6.03 \approx 35.0.$$

所以, 帐篷的容积大约 35.0 m^3 .

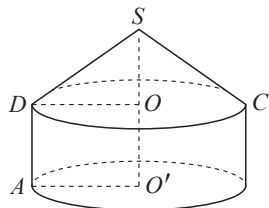
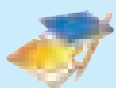
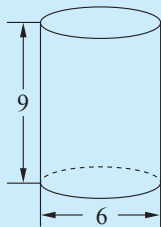
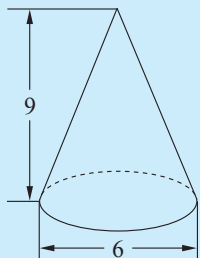


图 7-40



练习

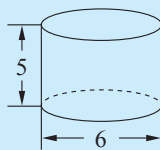
1. 选择题：如图，左边的圆锥的侧面积最接近右边的圆柱（ ）的侧面积。



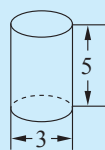
(A)



(B)



(C)



(D)

(第1题)

2. 一个等腰直角三角形的三角尺，它的斜边长为 8 cm，以斜边所在直线为轴旋转一周，求得到的几何体的侧面积（精确到 0.1 cm^2 ）。

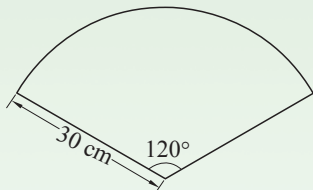


习题7.4



复习与巩固

- 圆锥的底面半径为 40 cm、高为 60 cm，求它的侧面积和表面积（精确到 0.1 cm^2 ）。
- 圆锥的侧面展开图是直径为 10 cm 的半圆，求圆锥的体积。
- 如图，圆锥的侧面展开图是圆心角为 120° 、半径为 30 cm 的扇形。求这个圆锥的表面积（精确到 0.1 cm^2 ）和体积（精确到 0.1 cm^3 ）。
- 已知扇形圆心角为 240° 、母线长为 x ，将扇形围成一个圆锥的侧面，写出这个圆锥底面面积 S 与母线长 x 之间的函数表达式。
- 直角三角形的两条直角边的长分别为 3 和 4，分别以它们所在的直线为轴旋转一周，求所得到的立体图形的表面积。
- 如图，一个圆锥内接于一个圆柱，它们的底面半径为 r 、高为 h ，求圆柱的侧面积与圆锥的侧面积的比以及圆柱的体积与圆锥体积之比。当 $h = 2r$ 时，这两个比值各是多少？



(第3题)



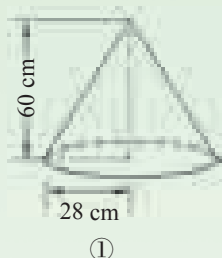
(第6题)



拓展与延伸

7. 如图①，圆锥的底面半径为 28 cm、高为 60 cm. 将两个这样的圆锥的侧面展开图粘成

一个扇形(图②),再把它卷成一个新的圆锥的侧面,这个新圆锥的体积是多少(精确到 0.1 cm^3)?

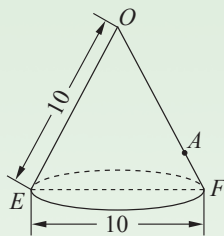


①



②

(第7题)



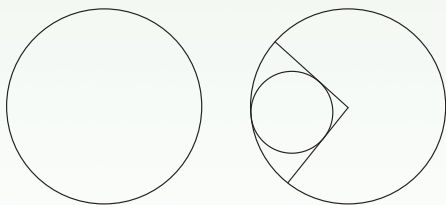
(第8题)

8. 如图是一个底面直径为 10, 母线 OE 长也为 10 的圆锥. A 是母线 OF 上的一点, $FA = 2$. 从点 E 沿圆锥侧面到点 A 的最短路径长是多少?



探索与创新

9. 要制作一个底面直径为 20 cm、母线长 12 cm 的圆锥形烟囱帽, 现有四块矩形板料, 尺寸分别为: $12 \text{ cm} \times 35.4 \text{ cm}$, $22.4 \text{ cm} \times 32 \text{ cm}$, $24 \text{ cm} \times 22.4 \text{ cm}$, $24 \text{ cm} \times 28 \text{ cm}$, 请从中选择大小最合适的一块.
10. 如图, 有一张半径为 18 的圆形纸片, 打算从这张纸片上裁剪出一个扇形, 用它制作圆锥的侧面, 再用剩下的部分剪出一个最大的圆, 作为这个圆锥的底面. 求制作出的圆锥的表面积.



(第10题)



回顾与总结

- 本章学习了哪些内容? 总结一下, 并与同学交流.
- 多面体是由_____围成的几何体. 直棱柱是一种特殊的多面体, 它的上下底面是_____的多边形, 各个侧面都是_____形.
- 圆柱是由_____绕它的_____旋转而成; 圆锥是由_____绕它的_____旋转而成.
- 直棱柱、圆柱、圆锥的侧面都可以展开成平面图形.
直棱柱的侧面展开图是_____;
圆柱的侧面展开图是_____;
圆锥的侧面展开图是_____.
- 利用直棱柱、圆柱、圆锥的侧面展开图, 如何计算这些几何体的侧面积、表面积和体积?

6. 你发现直棱柱与圆柱的侧面展开图、侧面积公式及体积公式有哪些共同之处?
7. 通过认识直棱柱、圆柱、圆锥以及它们的侧面展开图, 你对平面图形与空间图形、直与曲的相互转化有哪些认识?
8. 通过本章的学习, 你有哪些收获?

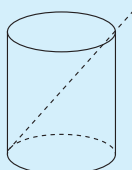


综合练习



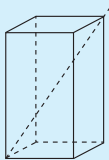
复习与巩固

1. (1) 如图①, 将一根长为 20 cm 的细木筷斜放在一个高 15 cm, 底面半径为 4 cm 的无盖圆柱形杯子内. 木筷露在杯子外面的部分至少有多长?
- (2) 如果将 (1) 中的筷子斜放在一个高 15 cm、底面边长为 7 cm 的正方形的无盖的长方体的容器内 (图②). 木筷露在容器外面的部分至少有多长 (精确到 0.1 cm)?

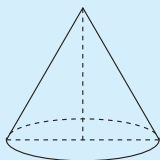


①

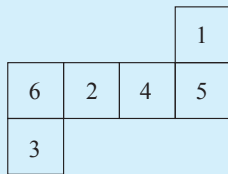
(第 1 题)



②



(第 2 (1) 题)

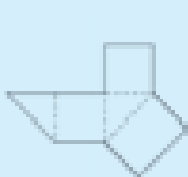


(第 2 (2) 题)

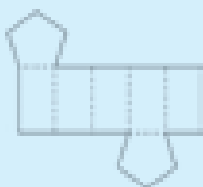
2. 选择题:

- (1) 如图, 小莹要用纸片制成一个高 4 cm、底面周长为 6π cm 的圆锥形漏斗模型, 如果不计接缝和损耗, 则所需纸片的面积是 ();
 (A) $12\pi \text{ cm}^2$ (B) $15\pi \text{ cm}^2$ (C) $18\pi \text{ cm}^2$ (D) $24\pi \text{ cm}^2$
- (2) 把如图所示的平面图形沿线折叠成一个各面带有数字的正方体, 则相交于同一个顶点的三个面上的数字之和最小是 ().
 (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

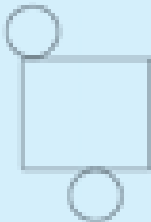
3. 下列图形分别是哪种几何体的表面展开图? 试画出这些几何体的草图.



①



②



③



④

(第 3 题)

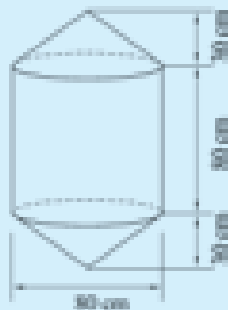
4. 用一块边长为 60 cm 的正方形薄铝片制作一个无盖的长方体容器, 使它的底面积为 $1\,600\text{ cm}^2$.

(1) 请你设计一种符合要求的制作方案, 画出草图, 并附以简单的文字说明;

(2) 求该容器的容积.

5. 以边长为 a 的正方形的一个顶点为圆心, 以这个正方形的边长为半径画弧, 得到一个扇形. 再将这个扇形围成一个圆锥面, 求圆锥的高.

6. 锚标浮筒是打捞作业中用来标记锚或沉船位置的, 它的上、下两部分是圆锥, 中间部分是一个圆柱 (如图). 按图中标出的尺寸, 计算它的表面积 (精确到 1 cm^2).



(第 6 题)

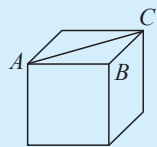
拓展与延伸

7. 一个无盖的棱长为 1 的正方体形纸盒 (图

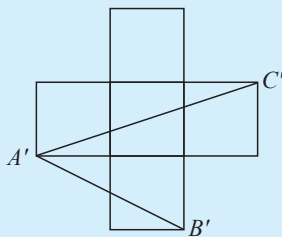
①) 的表面展开图如图 ② 所示.

(1) 在该展开图中, 可画出的最长线段的长是多少? 这样的线段可画几条?

(2) 比较图 ① 中的 $\angle BAC$ 与图 ② 中的 $\angle B'A'C'$ 的大小.



①



②

(第 7 题)

8. 图 ① 是三个竖直摆放的形状和大小都相同

的几何体 (下底面是圆, 单位: cm), 将它们拼成图 ② 所示的新几何体, 求新几何体的体积.



①

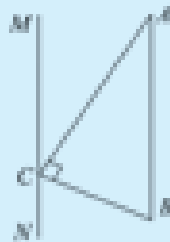


②

(第 8 题)

9. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 10\text{ cm}$. 直线 MN 过点 C 且平行于 AB , 以 MN 为轴, 将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 旋转一周, 求所得几何体的表面积 (精确到 0.1 cm^2).

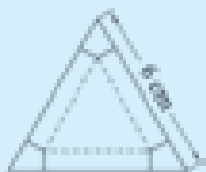
10. 如图, 有一块边长为 6 cm 的正三角形纸板, 在它的三个顶点处分别截去一个全等的四边形, 再沿图中的虚线折起, 做成一个无盖的直三棱柱形纸盒, 使它的侧面积等于底面积.



(第 9 题)

求：(1) 纸盒的高；

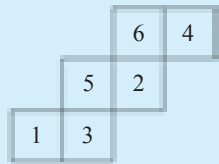
(2) 截去部分的面积与原三角形纸板面积的比.



(第10题)

探索与创新

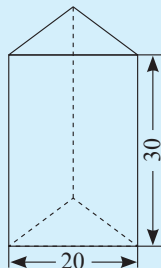
- 一个质地均匀的正方体六个面上分别标有数字1, 2, 3, 4, 5, 6, 如图是这个正方体的表面展开图. 任意抛掷这个立方体, 落定后朝上一面的数恰好等于朝下一面的数的2倍的概率是多少?
- 如图是供滑板爱好者使用的U型场地的示意图, 该场地可以看作是从一个长方体中挖去了半个圆柱而成, 它的纵断面图中半圆的半径为4 m, 其边缘 $AB = CD = 20$ m, 点 E 在 CD 上, $CE = 2$ m. 一名滑板爱好者从点 A 滑到点 E , 他滑行的最短路线的长约为多少 (精确到0.1 m)?



(第11题)

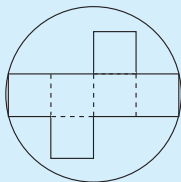


(第12题)



(第13题)

- 有一个底面为正三角形的直三棱柱形的包装盒如图①所示. 为了生产这种包装盒, 需要先画出表面展开图纸样.
 - 画出这个直三棱柱的表面展开图, 并标注尺寸;
 - 求出包装盒的侧面积和表面积 (精确到0.1).
- 从一张直径为10 cm的圆形纸片上剪下如图①所示的纸片, 再将纸片沿虚线折叠成正方体 (图②) 形状. 这个纸盒的表面积是多少?

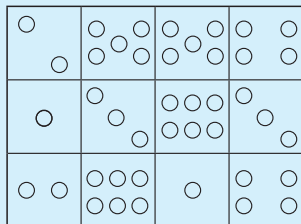


①



②

(第14题)



(第15题)

- 如图是一张画有12个正方形格子的纸, 每个格子中画有若干圆圈. 小亮要用这张纸粘成一个正方体骰子模型, 使正方体相对面圆圈的个数分别是1和6, 2和5, 3和4. 你认为应剪掉哪几个正方形格子? 请用笔在要剪掉的正方形格子上打“×” (不必写理由).

第 8 章 投影与识图

内容提要

- 中心投影
- 平行投影
- 简单物体的三视图





情境导航

这是我国研制的新型战斗机。上面的三个图是从不同方向观察飞机得到的。你能说出它们分别是从哪个方向观察到的吗？由上面的三个图，你能想象出飞机的形状吗？



8.1 中心投影

生活中,我们经常看到阳光或灯光下的物体会在地面或墙壁上留下它的影子.

你玩过手影游戏吗?在灯光下做出某种手势,能在墙壁上看到它的有趣的影子.你能根据图 8-1 中的两种手势,猜出它们的影子各像什么动物吗?亲自在灯光下试一试,看看你猜得对不对.

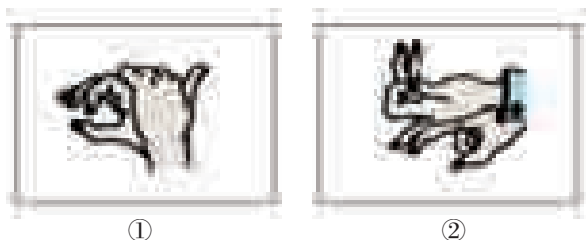


图 8-1

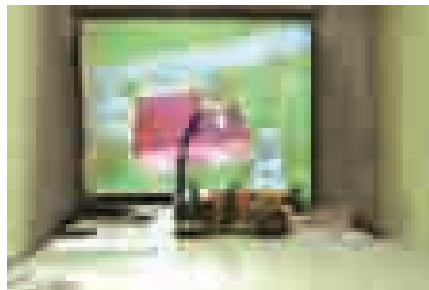
不同的手势可以看作空间中的不同物体,通过光线的照射,可以在墙面上留下不同的影子,物体与它的影子之间是否存在某种必然的联系呢?



在光线的照射下,空间中的物体落在平面内的影子能够反映出该物体的形状和大小,这种现象叫做**投影**(projection)现象.

人们通过大量的投影现象,总结它的几何规律,抽象出了一种由空间图形产生平面图形的方**法**——投影法.投影法是用一组射线(称为**投射线**)通过空间图形射向预定平面(称为**投影面**)上而得到平面图形的方**法**.

图 8-2 是课堂上使用的实物投影仪,它可以把展示台上的立体实物,通过灯泡发出的光线投影到银幕上,供大家观看,这里银幕是投影面,灯光是投射线.



实物投影仪

图 8-2

灯泡发出的光线可以看做是从一点发出的. 在点光源下形成的物体的投影叫做**中心投影** (central projection), 点光源叫做**投影中心**.



实验与探究

在图 8-3, 图 8-4 和图 8-5 中, O 是投影中心, 箭头方向表示投射线的方向, H 是投影面.

(1) 想一想, 点 A 在投影面 H 内的中心投影是什么图形 (图 8-3)?

(2) 取一根细竹签, 在灯泡和桌面的位置都相对固定时, 观察在灯光下竹签投到桌面上的影子, 你发现竹签的影子是什么形状? 它们的长是否相等? 然后改变竹签与桌面所成的角度, 你发现它的影子的形状和大小是否发生了变化? 由此你想象一条线段的中心投影会是什么图形? 线段的长度与它的中心投影的长度的大小有怎样的关系? 当改变线段与投影面所成的角度时, 线段的中心投影的形状和大小是否发生改变?

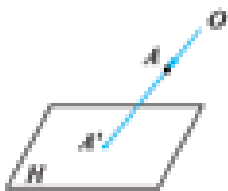


图 8-3

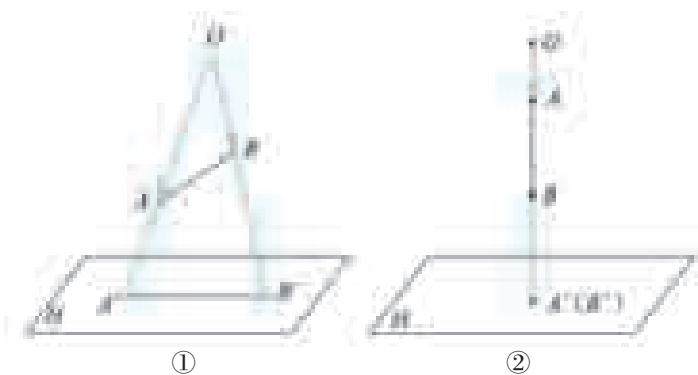


图 8-4

如图 8-4, 当线段 AB 的端点不在同一条投射线上时 (图 8-4 ①), 点 A, B 在投影面 H 内的投影分别是点 A', B' , 这时线段 AB 在 H 内的投影是以 A', B' 为端点的线段 $A'B'$. 线段 $A'B'$ 的长度可能大于 AB , 可能等于 AB , 也可能小于 AB , 改变线段 AB 与投影面所成的角度, 它的投影 $A'B'$ 的长度会发生变化. 当线段 AB 的端点在同一条投射线上时 (图 8-4 ②), 点 A, B 在投影面 H 内的投影 A', B' 重合. 这时线段 AB 在面 H 内的投影是一个点.

(3) 取一张平行四边形的纸片, 在灯泡和桌面位置都固定时, 观察纸片在灯光下投在桌面上影子的形状, 并比较纸片的面积与影子面积的大小. 由此你能

想象，一个平行四边形的中心投影是什么图形？平行四边形的面积与它的中心投影的面积的大小有什么样的关系？

如图 8-5，当 $\square ABCD$ 平行于投影面 H 时，它在面 H 内的投影是与它相似的平行四边形，此时投影的面积大于平行四边形的面积（图 8-5 ①）；当平行四边形倾斜于投影面时，投影 $A'B'C'D'$ 的形状和大小会发生改变，可能是与它不相似的四边形（图 8-5 ②），它的面积可能大于 $\square ABCD$ 的面积，也可能等于或小于矩形 $ABCD$ 的面积，还可能是一条线段（图 8-5 ③），但不会是一个点。



图 8-5

（4）当纸片与桌面平行时（图 8-5 ①），改变灯泡到纸片的距离，或纸片与桌面间的距离，观察纸片在桌面上影子的形状和大小有什么变化。

一般地，在中心投影下，当一个平面图形与投影面平行时，这个平面图形在投影面上的投影是与它相似的平面图形，其相似比等于投影中心到平面图形的距离与投影中心到投影面的距离之比。因此在实际生活中，利用中心投影的原理，通过调整光源到被投影图形的距离或调整图形到投影面的距离，便可以按需要的比例，在投影面上得到放大后的图形。这就是幻灯机、投影仪的工作原理。



挑战自我

观察图 8-5，你发现相交线的中心投影还是相交线吗？平行线的中心投影还是平行线吗？相等线段的中心投影仍然相等吗？



练习

1. 夜间小亮在马路上按一个方向行走, 当他走近一盏路灯, 然后又离开这盏路灯时, 小亮影子会发生怎样的变化?
2. 在灯光下, 小亮和大刚影子等长, 能说明他们身高相等吗? 为什么?
3. 一个正方形的中心投影可能是什么图形? 一个正方体的中心投影一定是正方形吗? 请分别说明.



习题8.1

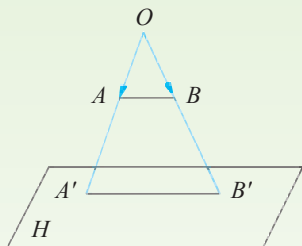


复习与巩固

1. 大刚站在路灯下的影子如图所示. 试用一条线段表示大刚站立的位置.
2. 如图, 设点 O 为投影中心, 长度为 2 的线段 AB 平行于它在面 H 内的投影 $A'B'$. 已知点 O 到直线 AB 的距离为 3, 直线 AB 与 $A'B'$ 距离为 5, 求 $A'B'$ 的长.



(第 1 题)



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图, 圆桌正上方的灯泡发出的光线照射桌面后, 在地面上形成圆形的影子. 已知灯泡距地面 3 m, 桌面的直径为 2 m, 桌面距地面 1 m, 求地面上桌面影子的面积. 当灯泡下落 1 m 时, 地面阴影部分的面积增加多少?

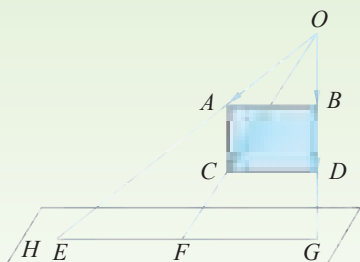


拓展与延伸

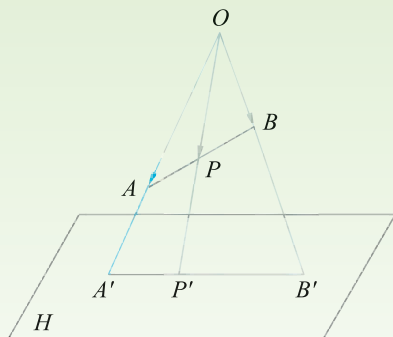
4. (1) 小亮在路灯下朝着远离路灯的方向匀速行走, 他头顶落在地面上的影子前进的速度也是匀速的吗? 为什么?

(2) 在路灯下, 如果小亮在地面上走的路线是一个正方形, 他头顶的影子运动的路线也是一个正方形吗? 如果小亮走的路线是一个圆呢?

5. 如图, O 是投影中心, 线段 AB 在投影面 H 内的投影为 EG . 已知 $AB \parallel EG$, 投射射线 $OG \perp EG$, 垂足为 G , $AB = 4 \text{ cm}$, $OB = 3 \text{ cm}$, $OG = 9 \text{ cm}$, 将线段 AB 沿投射射线 OG 方向平移 3 cm 至 CD , 线段 CD 的投影为 FG . 求 EF 的长.



(第5题)



(第6题)



探索与创新

6. 如图, O 为投影中心, P 为 AB 的中点, AB 与它在平面 H 内的投影 $A'B'$ 不平行, 点 P 的投影点 P' 是 $A'B'$ 的中点吗? 为什么?

8.2 平行投影

阳光下, 房屋、树木、石凳等物体都可以在地面上或墙壁上找到它们的影子 (图 8-6), 当你在庭院里散步时, 脚下会留下你的身影, 蝴蝶在空中飞舞, 地面上也留下它的影子. 对于这些你最熟悉的投影现象, 你是否考虑过物体在阳光下与灯光下的影子有没有不同?

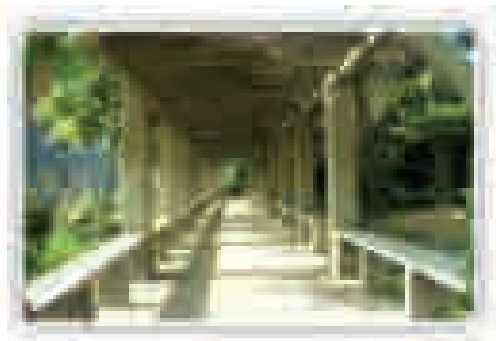


图 8-6

照射到物体上的太阳光线可以看作平行光线. 投射线互相平行的投影叫做平行投影 (parallel projection).



实验与探究

在图 8-7、图 8-8 和图 8-9 中，箭头的方向表示平行投影投射线的方向， H 是投影面。

(1) 想一想，在平行投影下，点 A 在投影面 H 内的投影是什么图形（图 8-7）？



图 8-7

(2) 如果阳光斜射在地面上，一根悬空的细竹竿在地面上的影子是什么形状？比较竹竿的长和它的影子的长，然后改变竹竿与地面所成的角度，你发现影子的形状和大小是否会发生改变？由此你想象一条线段的平行投影会是什么图形？经过平行投影，线段的投影的长度是否会发生改变？当改变线段与投影面所成的角度时，线段的投影的形状和大小是否会发生改变？

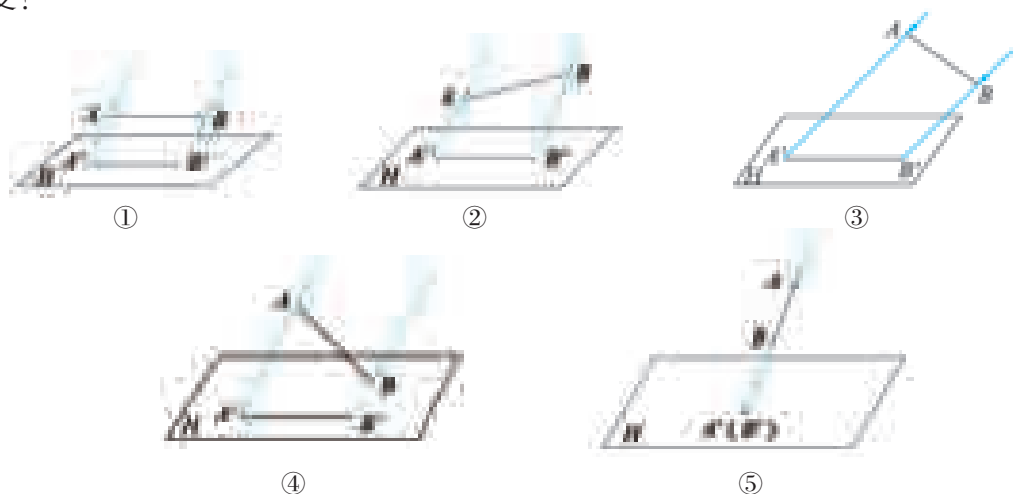


图 8-8

如图 8-8，在平行投影下，当线段 AB 平行于投影面 H 时（图 8-8 ①），点 A, B 在投影面 H 内的投影是点 A', B' ，线段 AB 的投影 $A'B'$ 是一条线段，此时四边形 $AA'B'B$ 是平行四边形，因此 $A'B' \parallel AB$ 。

当线段 AB 倾斜于投影面 H 时，线段 AB 的投影 $A'B'$ 仍是一条线段，此时线段 $A'B'$ 与 AB 不平行，线段 $A'B'$ 可能小于线段 AB （图 8-8 ②），可能大于线段 AB （图 8-8 ③），也可能等于线段 AB （图 8-8 ④）。

当线段 AB 的端点在同一条投射线上时，点 A, B 的投影 A', B' 重合，此时线段 AB 的投影是一个点（图 8-8 ⑤）。

(3) 如果阳光斜射在地面上, 一张矩形纸片在地面上的影子会是什么形状?

你会发现, 当矩形纸片与地面平行时, 矩形纸片的影子仍是矩形, 而且与原矩形全等 (图 8-9 ①).

当矩形纸片与阳光光线平行时, 纸片的影子是一条线段 (图 8-9 ②).

不论矩形纸片处于其他什么位置, 它在阳光下的影子, 总是平行四边形, 特别地, 也可能是矩形 (图 8-9 ③④), 但不会是一个点或其他图形.

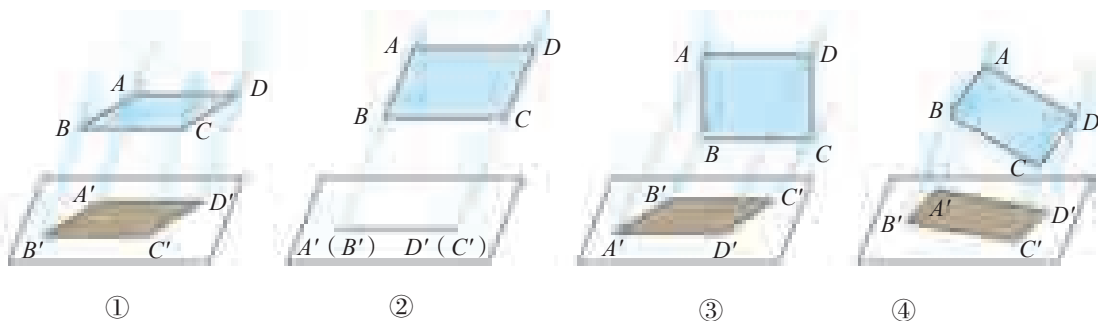


图 8-9



练习

1. 如果阳光倾斜射在地面上, 一张三角形纸片在地面上的影子可能是什么图形?
2. 如果阳光倾斜射在地面上, 一张圆形纸片在地面上的影子一定是圆吗? 一个球的影子呢? 请你试试看.



观察与思考

在我国北方, 无论上午、中午和下午, 晴天时阳光总是倾斜地照射在地面上. 想一想, 地球上的居民能不能看到阳光垂直照射在地面上的情况? 这时, 一个物体在地面上的影子会出现哪些可能的情况?

投射线与投影面垂直时的平行投影, 叫做**正投影** (orthographic projection). 正投影是特殊的平行投影, 因此点的正投影仍然是点; 线段的正投影可能是线段, 也可能是一个点.

正投影还有哪些特殊性质呢?

(1) 图 8-10 分别表示线段 AB 与投影面 H 的平行、倾斜和垂直三种不同的位置关系. 在这三种情况下, 你发现线段正投影的形状和大小分别有什么规律?



图 8-10

平行长不变, 倾斜
长缩短, 垂直成一点.



(2) 图 8-11 分别表示平面图形 P 与投影面 H 的平行、倾斜和垂直三种位置关系. 在这三种情况下, 你发现平面图形 P 的正投影 P' 的形状和大小分别有什么规律?

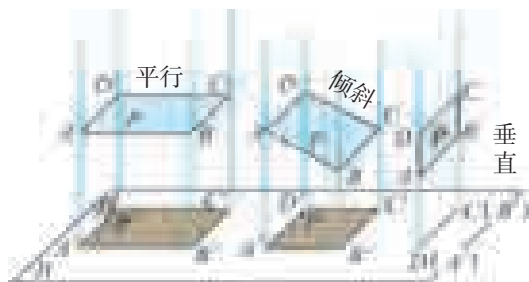


图 8-11

当平面图形 P 平行于投影面 H 时, P 的正投影 P' 是与 P 全等的平面图形, 这就是说, 把一个平面图形 P 进行正投影, 它的形状和大小都保持不变.

当平面图形 P 倾斜于投影面 H 时, 它的正投影 P' 的形状、大小均发生改变.

当平面图形 P 垂直于投影面 H 时, P 的正投影是一条线段.

你能简单地总结平面图形正投影的规律吗?

平行形不变, 倾斜
形改变, 垂直成线段.



(3) 长方体 $ABCD-EFGH$ 与一个竖直的投影面 V 的相对位置如图 8-12 所示, 图中箭头所指的方向是投射线的方向, 长方体的一个面 $ABCD$ 平行于投影面 V . 你能说出此时长方体的各个面的正投影吗?

长方体中, 与投影面 V 平行的两个相对的面 $ABCD$, $EFGH$ 的正投影是矩形 $A'B'C'D'$, 它与矩形 $ABCD$, $EFGH$ 全等, 与投影面 V 垂直的四个面的正投影

都是线段, 其中面 $ABFE$ 的正投影是线段 $A'B'$, 面 $CDHG$ 的正投影是线段 $C'D'$. $A'B'$, $C'D'$ 的长与长方体的长 AB 相等; 面 $BCGF$ 的正投影是线段 $B'C'$, 面 $ADHE$ 的正投影是线段 $A'D'$. $B'C'$, $A'D'$ 的长与长方体的高 AD 相等.

长方体的正投影是由它的各个面的正投影所组成的, 图 8-12 中, 长方体 $ABCD-EFGH$ 在投影面 V 内的正投影是矩形 $A'B'C'D'$.

可以想象物体投影的形状和大小与物体相对于投影面的位置有关. 例如, 如果改变图 8-12 中长方体与投影面 V 的相对位置, 它的正投影不一定是矩形.

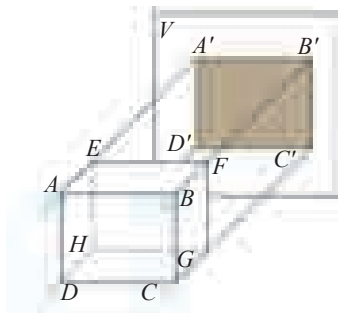


图 8-12



练习

1. 回答下列问题:

- (1) 球的正投影是什么图形?
- (2) 正方体的正投影一定是正方形吗?

2. 图 8-12 中, 长方体 $ABCD-EFGH$ 的各条棱在面 V 内的正投影分别是什么?

例1

如图 8-13, 直三棱柱 $ABC-DEF$ 的底面是正三角形, 按图中所示的方式摆放, 箭头所指的方向是投射线的方向.

(1) 分别说出这个直三棱柱的三个侧面和两个底面在水平投影面 H 内的正投影的形状和大小;

(2) 画出这个直三棱柱在水平投影面 H 内的正投影.

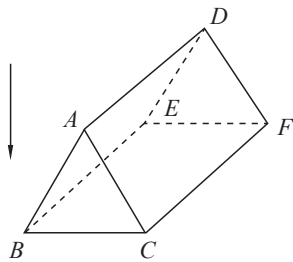


图 8-13

解

(1) 根据正投影的规律, 侧面 $ABED$ 与 $ACFD$ 在水平投影面 H 内的正投影是有一条公共边的两个矩形, 这条公共边是直三棱柱的侧棱 AD 在平面 H 内的投影, 两个矩形的长都等于底面正三角形的边 BC 的一半, 侧面 $BCFE$ 的正投影与上述两个矩形拼成的矩形重合. 底面 ABC 与 DEF 的正投影分别是两条线段, 且长度都与底面正三角形的边 BC 相等, 并分别与棱 BC 与 EF 的正投影重合.

(2) 由 (1) 可以得到该直三棱柱在水平投影面 H 内的正投影的画图步骤:

① 画矩形 $B'C'F'E'$ ，使 $B'C' = BC$ ， $B'E' = BE$ 。

② 取 $B'C'$ 的中点 A' ， $E'F'$ 的中点 D' ，连接 $A'D'$ （图 8-14）。

图 8-14 就是图 8-13 中的直三棱柱在水平投影面 H 内的正投影。

例2 一个圆柱按图 8-15 所示的方式摆放。

（1）分别说出该圆柱在竖直投影面 V 和水平投影面 H 内的正投影的形状和大小；

（2）分别画出圆柱在竖直投影面 V 和水平投影面 H 内的正投影。

解 （1）该圆柱在竖直投影面 V 内的正投影，是一个矩形，其高等于圆柱母线的长，其长等于底面的直径。

该圆柱在水平投影面 H 内的正投影，是一个与底面半径相等的圆。

（2）由（1）可以得到该圆柱分别在竖直投影面 V 和水平投影面 H 内的正投影的画图步骤：

① 在竖直投影面 V 内，画高等于圆柱的母线、长等于圆柱底面直径的矩形（图 8-16）。

② 在水平投影面 H 内，画半径等于底面半径的圆（图 8-17）。

图 8-16、图 8-17 分别是图 8-15 中圆柱在竖直投影面 V 和水平投影面 H 内的正投影。

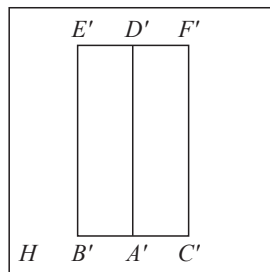


图 8-14

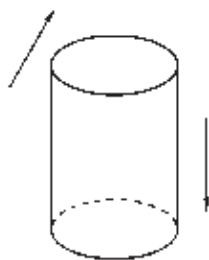


图 8-15

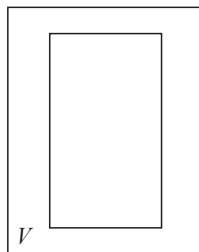


图 8-16

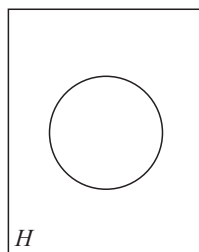


图 8-17

图 8-14 反映了按图 8-13 方式放置的直三棱柱从正上方向下看到的形状和大小；图 8-16 反映了按图 8-15 的方式放置的圆柱从水平方向看到的圆柱前面的形状和大小，图 8-17 反映了从正上方向下看到的圆柱的形状和大小。



练习

1. 一个圆柱按图中所示的方式放置，分别说出它在水平平面 H 和竖直平面 V 内的正投影的形状和大小。
2. 一个几何体在一个平面内的正投影是正方形，这个几何体可能是什么形状？说出其中的两种不同几何体的名称。



(第 1 题)

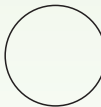
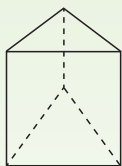
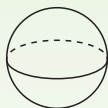
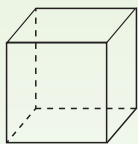


习题 8.2



复习与巩固

1. 在平行投影下，直角三角形的投影还是直角三角形吗？等腰三角形的投影还是等腰三角形吗？画图说明。
2. 一块矩形木板在灯光下和阳光下的影子有什么相同和不同？
3. 一个几何体在平面内的正投影是圆，这个几何体可能是什么形状？说出其中两种不同几何体的名称。
4. 将下列几何体与其在水平投影面内的正投影用线连接起来。



(第 4 题)

5. 选择题：

(1) 一条线段 AB 的正投影为线段 CD ，下列各式不成立的是 ()；

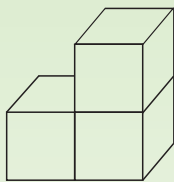
(A) $AB = CD$

(B) $AB > CD$

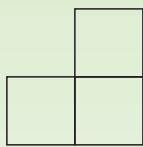
(C) $AB < CD$

(D) $AB \neq CD$

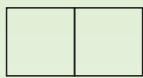
- (2) 将三个大小相同的小正方体按如图所示的方式组合成一个几何体. 这个几何体在某一个平面内的正投影不可能是 ().



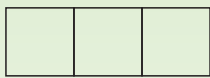
(第5题(2))



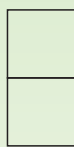
(A)



(B)

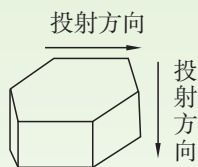


(C)



(D)

6. 将一个直六棱柱形工件按图中所示的方式摆放, 直六棱柱底面是正六边形, 按图中箭头方向所示的投射方向的正投影分别是什么图形?

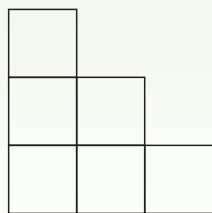


(第6题)

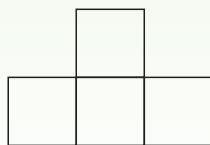


拓展与延伸

7. 画图说明, 当阳光倾斜地照射到地面时, 如何放置一张矩形纸片, 才能使其在地面上的影子面积最大?
8. 把若干个相同的小正方体组合成几何体, 它在竖直投影面 V 内和水平投影面 H 内的正投影分别如图①和图②所示. 组成这样的几何体最多需要多少小正方体? 最少需要多少小正方体?



①



②

(第8题)

8.3 物体的三视图



交流与发现

正投影能如实地表达物体的形状和大小, 画图也比较方便, 因此工程上一般用正投影的方式绘制图纸.

由于可以用视线代替投射射线, 所以物体的正投影通常也称为物体的视图 (view).

一般说来, 仅凭物体的一个或两个视图, 不能完全确定物体的形状和大小. 例如, 只根据一个几何体在一个平面内的正投影是正方形, 无法判别这个几何体是正方体、长方体、圆柱还是其他别的立体图形. 要确定一个几何体的形状和大小, 常常需要三个视图.

如图 8-18, 一个物体在三个两两垂直的投影面上分别进行正投影, 其中在竖直投影面 V 内的正投影叫做**主视图** (front view), 在水平投影面 H 内的正投影叫做**俯视图** (top view), 在侧投影面 W 内的正投影叫做**左视图** (left view). 这三个视图统称这个物体的**三视图**. 将图 8-18 和图 8-19 加以比较, 你发现主视图、俯视图和左视图分别是从物体的哪个方向看到的物体的形状和大小?

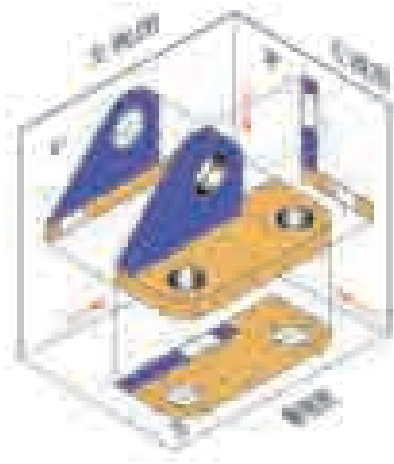


图 8-18

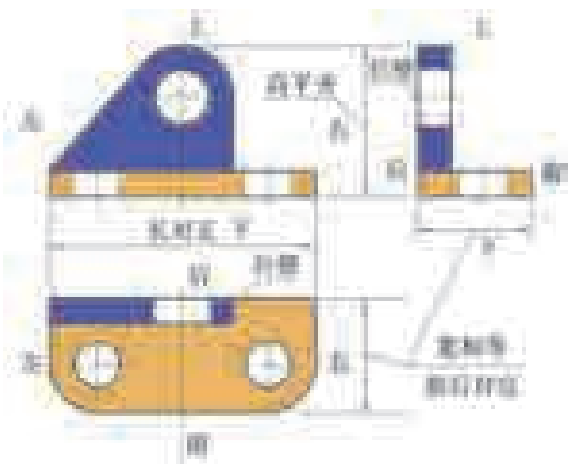


图 8-19

将图 8-18 中的俯视图和左视图都展开到主视图所在的平面内 (投影面 H 向下旋转 90° , 投影面 W 按逆时针方向旋转 90°), 这三个视图的位置有什么关系?

在三视图中, 俯视图画在主视图的下面, 左视图画在主视图的右面. 主视图反映物体的长和高, 俯视图反映物体的长和宽, 左视图反映物体的高和宽 (图 8-19).

我们通过画如图 8-20 所示的圆柱的三视图, 探索画出一个简单几何体的三视图的步骤:

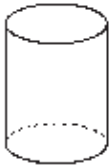


图 8-20

- (1) 如图 8-21, 先画出两条互相垂直的辅助坐标轴;
- (2) 在第二象限内画出圆柱的主视图——矩形. 使矩形的长等于圆柱的直

径,矩形的高等于圆柱的母线.画图时,矩形的各边画成粗实线.圆柱的轴的投影是矩形的一条中心线,画成点画线.

(3) 在第三象限,按照与主视图“长对正”的原则,画出圆柱的俯视图.俯视图是从圆柱的上底的上方所看到的该圆柱的形象,它的俯视图是直径等于矩形长的圆,画图时,圆心应画在主视图的中心线的延长线上.

(4) 在主视图和俯视图画出后,按照图 8-21 所示的画法,用直尺和圆规在第一象限作出圆柱的左视图.左视图是从物体的左面向右看到的物体的形状.左视图与主视图有相同的高,与俯视图有相同的宽.

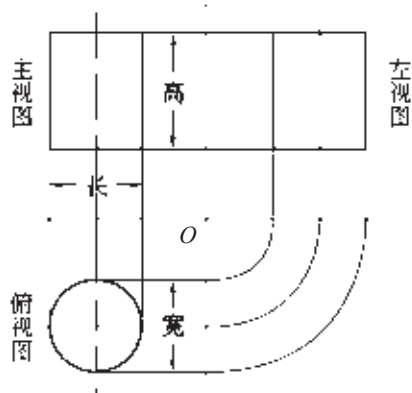
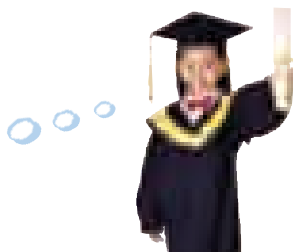


图 8-21

小资料

在工程制图中,看得见部分的轮廓线画粗实线,看不见部分的轮廓线画虚线.

画图时,坐标轴和三视图之间某些对应点的连线画成细实线,画图完成后也可以去掉这些细实线.



想一想,为什么图 8-20 所示的圆柱的主视图和左视图的形状、大小都相同?

一般地,画物体三视图的步骤是:

先在平面内画出两条互相垂直的辅助坐标轴.在第二象限画出主视图;然后根据“主、俯视图长对正”的原则,在第三象限画出俯视图;最后根据“主、左视图高平齐”的原则和“左、俯视图宽相等”的原则,在第一象限画出左视图.

例1

如图 8-22 所示的直三棱柱、直六棱柱的底面分别是正三角形和正六边形.分别画出它们的三视图.

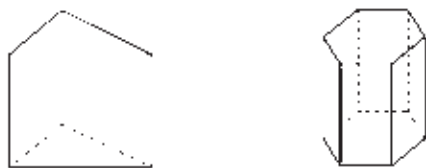


图 8-22

解

图 8-22 中的直三棱柱和直六棱柱的三视图分别如图 8-23 ① 和 ② 所示.

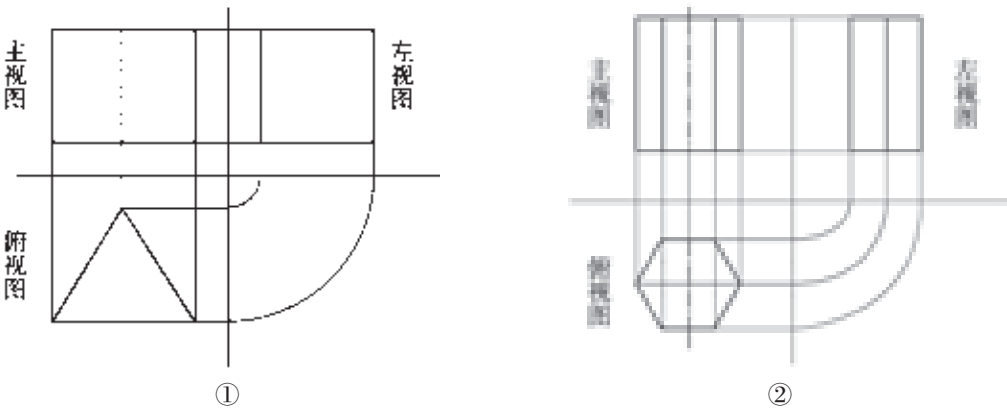
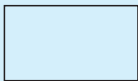
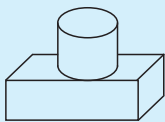


图 8-23



练习

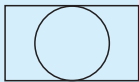
1. 选择题：左图中所放置的物体的俯视图是 ().



(A)



(B)



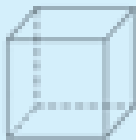
(C)



(D)

(第 1 题)

2. 画出如图所示的正方体的三视图.



(第 2 题)

例2 图 8-24 ① ② 是两个几何体的三视图，请根据三视图分别说出相应的几何体的形状，并画出示意图.

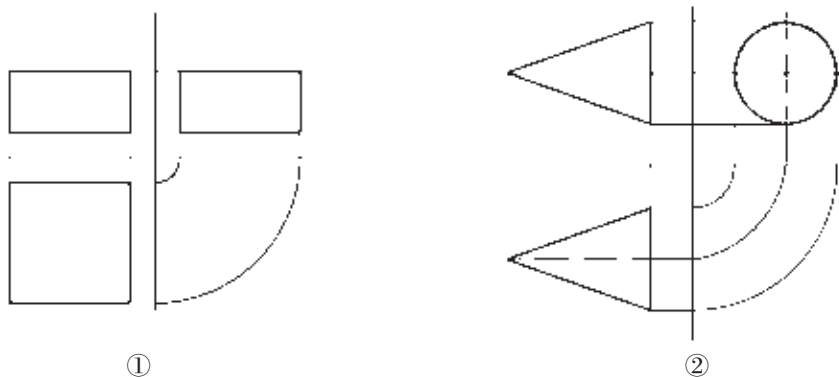


图 8-24

解 图 8-24 ① 是一个长方体的三视图，该长方体的上下底面是正方形，各侧面是全等的矩形（图 8-25 ①）；图 8-24 ② 是一个如图 8-25 ② 中的方式摆放的圆锥的三视图.

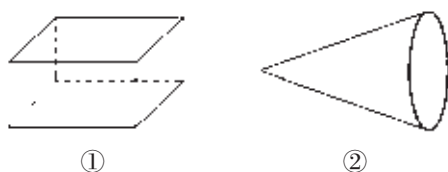


图 8-25

例3 如图 8-26 所示的几何体是由四个大小相等的正方体组合而成的，画出它的三视图.

解 该几何体的三视图如图 8-27 所示.

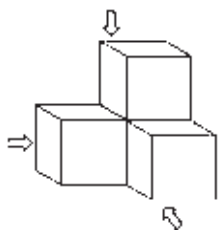


图 8-26

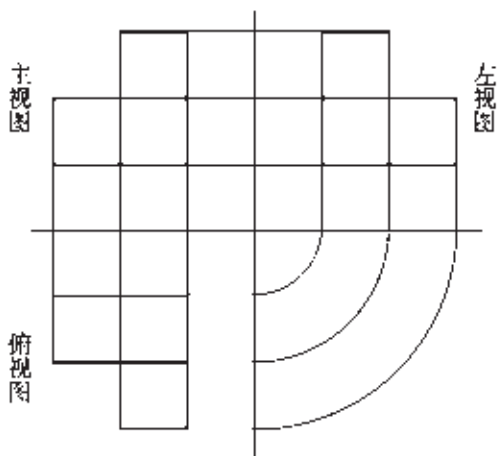


图 8-27



挑战自我

你能画出图 8-28 所示的机器零件的三视图吗？
试试看。

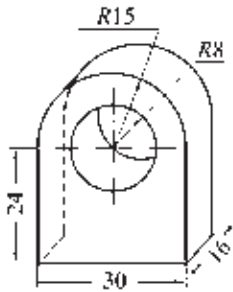
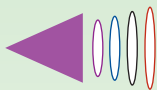


图 8-28



广角镜

几何体的直观图

本章中我们见到了许多几何体，如图 8-20 中的圆柱、图 8-22 中的三棱柱和六棱柱、图 8-25 中的长方体和圆锥、图 8-28 中的机器零件图等。

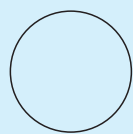
这些图虽然也都是在平面内画出的图形，却能直观地反映出相应的几何体的立体形象。它们叫做几何体的直观图。几何体的直观图通过平面图形把几何体中不全在同一个平面内的各点表现出来。为此，它往往不完全与立体图形的真实形状相同。例如，正方体的各个面本来都是正方形，但在前面你见过的正方体的直观图中，除前（正对着我们）、后（背向我们）两个面画成正方形外，它的上、下、左、右四个面画成平行四边形。因此看直观图时，不能把它当作普通的平面图形，而应当通过看图想象出它的真实形状。

再如，从图 8-28 可以看出，该机器零件的前后两个面的上半部分是宽 30 mm、高 24 mm 的矩形和半径为 15 mm 的半圆，下半部分是一个宽 30 mm、长 16 mm 的矩形，从零件的上面看是底面半径为 15 mm、高为 16 mm 的半个圆柱面，从左面和右面看到的零件的下半部是长 16 mm、高 24 mm 的矩形。在零件的中部挖去了一个圆柱形的“洞”，该圆柱的两个底面分别在零件的前面和后面，底面的圆心分别是零件正面上的半圆的圆心，圆柱的底面半径为 8 mm，高为 16 mm。

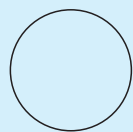


练习

1. 图 ①②③ 是三个几何体的主视图和俯视图，分别说出这些几何体的形状，然后分别画出它们的左视图。

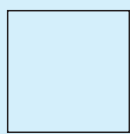


主视图

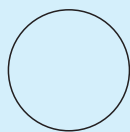


俯视图

①



主视图

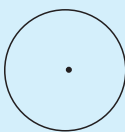


俯视图

②



主视图

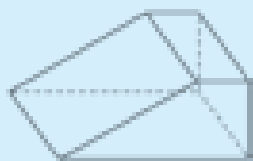


俯视图

③

(第1题)

2. 已知一个几何体如图所示, 画出它的主视图、俯视图和左视图.



(第2题)

例4 (1) 一个几何体的三视图如图

图 8-29 所示 (单位: mm). 根据三视图描述这个几何体的形状;

(2) 画出这个几何体的表面展开图, 并计算这个几何体的表面积 (精确到 1 mm^2);

(3) 用硬纸板制作这个几何体的模型.

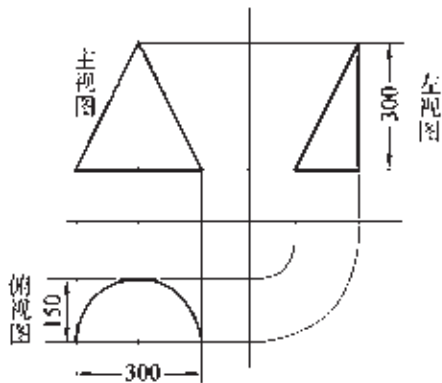


图 8-29

解 (1) 由主视图是等腰三角

形, 俯视图是半圆, 左视图是直角三角形, 并且左视图中直角三角形的底边等于俯视图中半圆的半径, 还等于主视图中等腰三角形底边的一半, 可以想象这个几何体是由一个等腰三角形、一个半圆和半个圆锥面围成, 等腰三角形的两腰是圆锥的母线, 等腰三角形底边是底面半圆的直径, 等腰三角形的高是圆锥的高. 它是用圆锥的轴截面截得的半圆锥 (图 8-30), 底面半圆的直径为 300 mm , 半圆锥的高为 300 mm .

(2) 如图 8-30, 在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, 由勾股定理

$$AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = \sqrt{300^2 + 150^2} = 150\sqrt{5} \approx 335.4 \text{ (mm)},$$

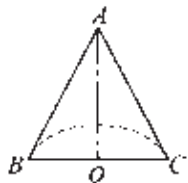


图 8-30

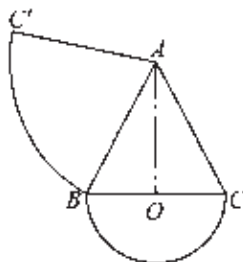


图 8-31

故这个几何体侧面展开图中扇形的半径 AB 约为 335.4 mm . 扇形的圆心角为

$$\frac{\pi \cdot OB \times 180}{\pi \cdot AB} = \frac{150 \times 180}{150\sqrt{5}} = \frac{180}{\sqrt{5}} \approx 80.5 \text{ (度)}.$$

根据以上数据, 可画出这个几何体的表面展开图 (图 8-31).

$$S_{\text{扇形}BAC'} = \frac{1}{2} \pi \cdot OB \cdot AB = \frac{1}{2} \times 150 \pi \times 150\sqrt{5} \approx 79\,029.4 \text{ (mm}^2\text{)},$$

$$S_{\text{半圆}} = \frac{1}{2} \pi \cdot OB^2 = \frac{\pi}{2} \times 150^2 \approx 35\,342.9 \text{ (mm}^2\text{)},$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AO = \frac{1}{2} \times 300 \times 300 = 45\,000 \text{ (mm}^2\text{)},$$

所以半圆锥的表面积

$$\begin{aligned} S &= S_{\text{扇形}BAC'} + S_{\text{半圆}} + S_{\triangle ABC'} \\ &\approx 79\,029.4 + 35\,342.9 + 45\,000 \approx 159\,372 \text{ (mm}^2\text{)}. \end{aligned}$$

因此, 这个几何体的表面积约为 $159\,372 \text{ mm}^2$ (精确到 1 mm^2).

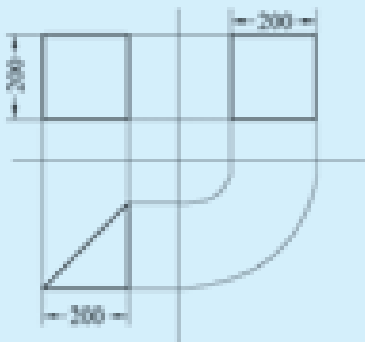
(3) 在一张硬纸板上, 按 $AB = AC = AC' = 335.4 \text{ mm}$, $BC = 300 \text{ mm}$, $\angle BAC' = 80.5^\circ$ 的实际尺寸画出几何体的展开图 (图 8-31), 将它剪下然后以 AB 为折痕并将扇形 BAC' 卷成半个圆锥面, 使等腰三角形腰 AC 与扇形半径 AC' 重合, 再以直径 BC 为折痕, 使半圆 $\widehat{BC}$ 与扇形 BAC' 的弧 $\widehat{BC'}$ 所围成的半圆弧重合, 用透明胶纸粘贴接缝, 便得到所要求制作的几何体模型 (图 8-30).



练习

1. 一个几何体的三视图如图所示 (单位: mm).

- (1) 根据三视图, 画出这个几何体的表面展开图, 并计算这个几何体的表面积;
- (2) 用硬纸板制作这个几何体的模型.



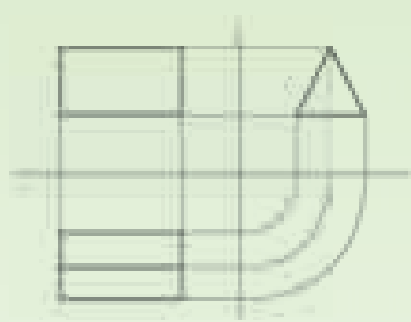


习题8.3

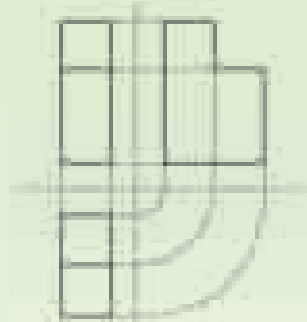


复习与巩固

1. 分别根据下面的三视图，说出相应几何体的形状.



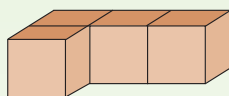
①



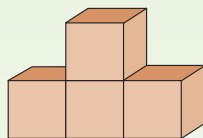
②

(第1题)

2. 把四块棱长相等的正方体形的木块分别按如图①, ②所示的方式摆放, 分别画出两个组合体的三视图.

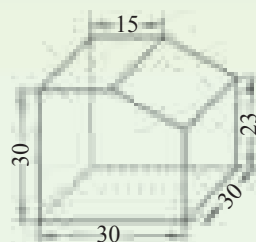


①



②

(第2题)



(第3题)

3. 画出如图所示几何体的三视图.

4. 图①~④是四个几何体:



①



②

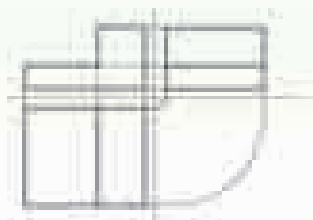


③

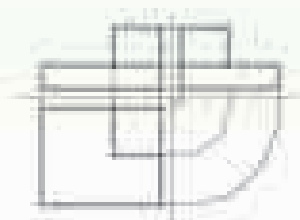


④

在下面四个三视图的括号中分别填上对应几何体的图号.



()

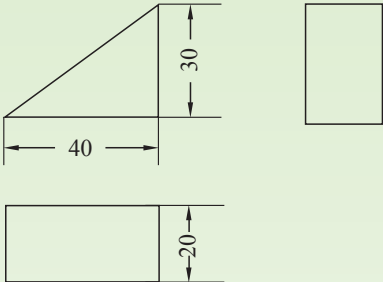


()



(第4题)

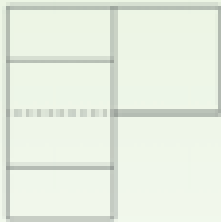
5. 根据右面的三视图(如图), 描述相应的几何体的形状, 并根据图中标注的尺寸(单位: mm), 计算它的表面积.



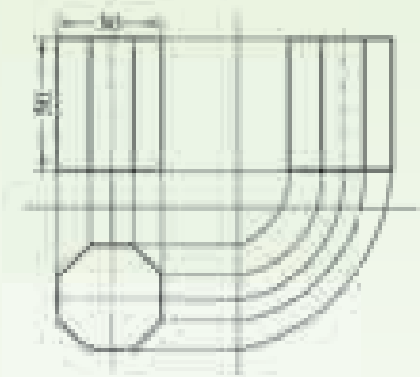
(第5题)

 拓展与延伸

6. 如图是由5个大小相同的小正方体组合而成的几何体的俯视图. 这5个小正方体可能有几种不同的组合方式? 分别画出所有可能的组合体的主视图和左视图.



(第6题)

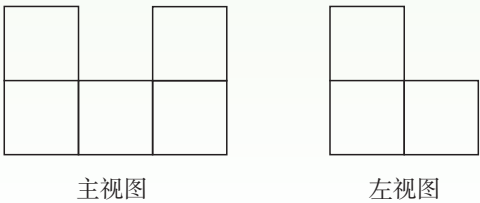


(第7题)

7. 如图是一种工件的三视图. 计算该工件的表面积和体积(分别精确到 0.1 mm^2 和 0.1 mm^3).

 探索与创新

8. 桌上摆着一个由若干个大小相同的小正方体组合而成的几何体, 其主视图和左视图如图所示. 这个几何体的俯视图可能是怎样的? 画出所有不同的俯视图.



(第8题)



回顾与总结

1. 本章学习了哪些主要内容？总结一下，并与同学交流。
2. 什么是中心投影？点、线段、平行四边形的中心投影分别可能是怎样的平面图形？
3. 什么是平行投影？点、线段、平行四边形的平行投影分别可能是怎样的平面图形？
4. 什么是正投影？正投影与一般的平行投影相比，有哪些特征？
5. 三视图包括____图、____图、____图. 画一个物体的三视图时应注意哪些问题？
6. 分别画出直四棱柱、圆柱、圆锥、球的三视图。
7. 举例说明，如何根据一个简单几何体的三视图，描述这个简单几何体。
8. 在现实生活中，物体的三视图有哪些应用？
9. 通过物体的表面展开图及三视图的学习，你对立体图形和平面图形的关系有了哪些新的认识？

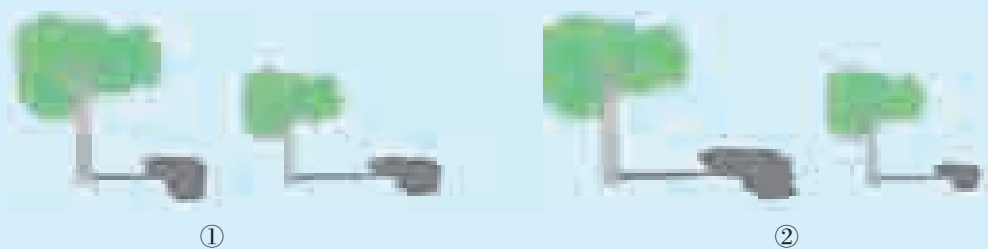


综合练习



复习与巩固

1. 如图是两棵树及其在地面上的影子，图①和图②中哪个图是在阳光下的情形？哪个图是在灯光下的情形？请说明理由。



(第1题)

2. 如图，用一盏灯照射正下方的一个球。
 - (1) 球在地面上的影子是什么形状？
 - (2) 当灯不动，球上下移动时，影子的大小会发生怎样的变化？
3. 选择题：

- (1) 在中心投影下，一条线段的投影不可能是 ()；

(A) 比原线段长的线段	(B) 一段圆弧
(C) 比原线段短的线段	(D) 一个点

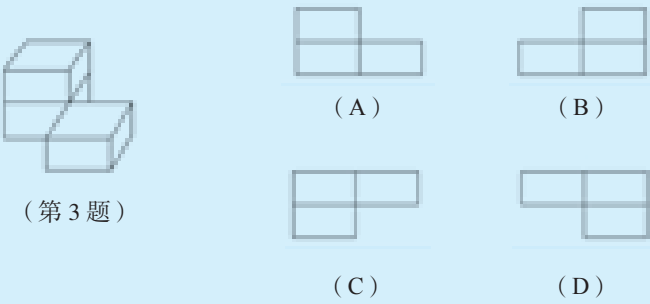


(第2题)

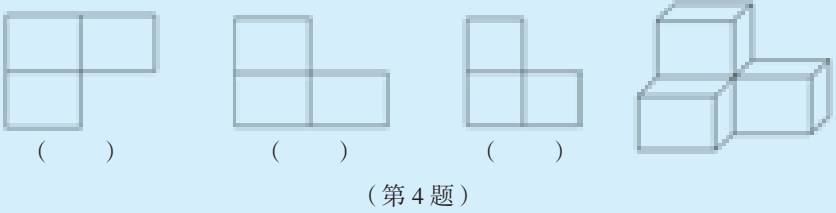
(2) 在平行投影下, 矩形的投影不可能是 ();

- (A)  (B)  (C)  (D) 

(3) 左图所示的几何体的主视图是 ().

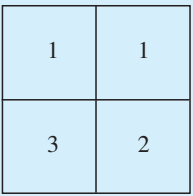


4. 左面三个平面图形分别是右面几何体的哪个视图?



5. 小亮说:“圆柱的主视图总是矩形, 俯视图总是圆.” 这种说法对吗? 为什么?

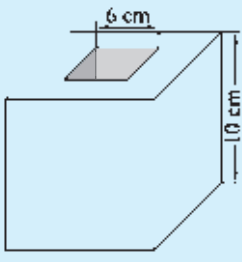
6. 如图是由若干个小正方体组成的几何体的左视图, 小正方形中的数字表示该位置小正方体的个数. 画出符合上面条件的一个几何体的主视图和俯视图.



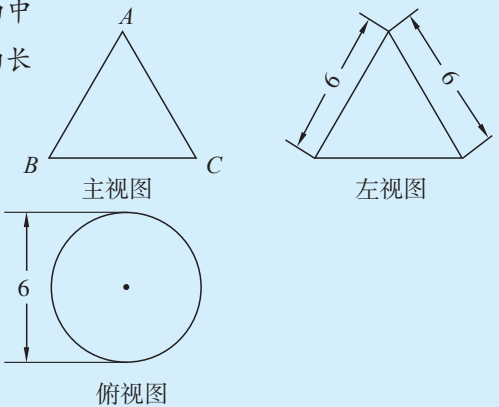
(第6题)

 拓展与延伸

7. 如图, 在一个棱长为 10 cm 的正方体的上底面中间位置打一个长和宽都为 6 cm、深为 5 cm 的长方体形状的孔. 画出所得到的几何体的三视图.



(第7题)



(第8题)

8. 如图是一个几何体的三视图.

(1) 写出几何体的名称;

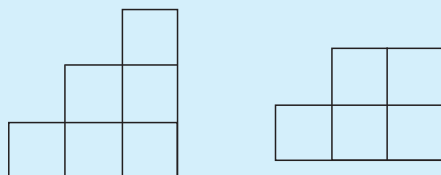
(2) 根据图中标出的数据, 计算这个几何体的表面积 (精确到 0.1 cm^2).

9. 用若干个大小相同的小正方体组合成的几何体

的主视图和俯视图如图所示.

(1) 画出这个几何体的一个左视图;

(2) 如果组成这个几何体的小正方体的块数为 n , 请你写出 n 的所有可能的值.



主视图

俯视图

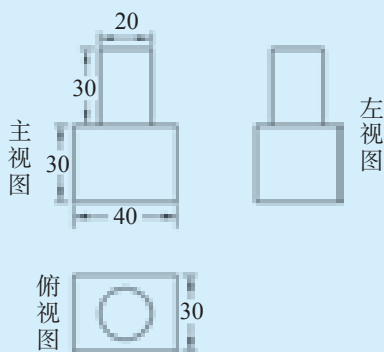
(第9题)

10. 如图所示是一个由两个几何体组合而成的几

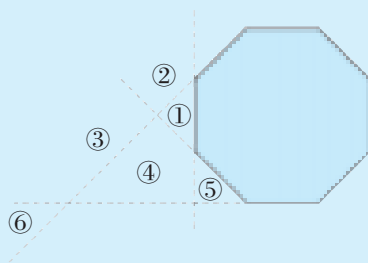
何体的三视图 (单位: mm).

(1) 这个组合体的两部分分别是什么几何体?

(2) 求该组合体表面积 (精确到 1 mm^2).



(第10题)



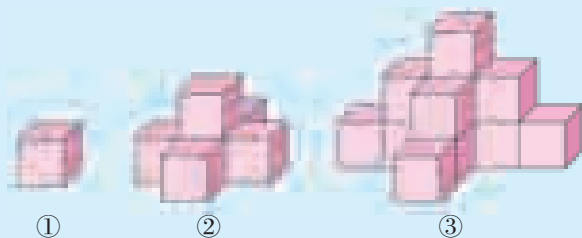
(第11题)

11. 图中画出的一个底面为正八边形的直八棱柱形建筑物的俯视图. 在图中所画的6个区域的哪个区域中放置一个点光源, 所照射到的直八棱柱形建筑物的面数最多?



探索与创新

12. 图①表示的是一个边长为1的水平摆放的小正方体木块, 图②、图③是由若干小正方体木块组合而成, 按照这样的规律, 继续下去. 回答下列问题:



(第12题)

(1) 第7个组合体中, 小正方体木块的总数是多少?

(2) 第 n 个组合体中, 小正方体木块的总数是多少?

(3) 第 n 个组合体的主视图面积是多少?

(4) 第 n 个组合体的俯视图面积是多少?

后 记

这套义务教育七~九年级数学教科书是在原《义务教育课程标准实验教科书 数学（七~九年级）》（青岛出版社 2005年1月第一版）的基础上，依据教育部2011年颁布的《义务教育课程标准》修订完成的。经教育部基础教育课程教材专家工作委员会审查通过，准许使用。

本套教科书由展涛担任主编，殷建中担任执行主编，参加本册教材编写的有（按姓氏笔画为序）：王伟、任景业、李师正、李红婷、李秀荣、杨杰、高玉岱、殷建中、谢廷桢、傅海伦等同志，由李师正担任本册主编。在本套教科书的编写工作中，我们得到了关心我们教材建设的许多专家、学者以及广大数学教育工作者的大力支持和热情帮助。在此，我们一并致谢。

欢迎教师 and 同学们在使用本书过程中，向我们提出改进的意见和建议。

编 者

数 学

SHUXUE



绿色印刷产品

价格批准文号：鲁发改价格核 [2022] 022014

举报电话：12345

ISBN 978-7-5436-3786-3



9 787543 637863 >

定价：10.88 元