教育部审定 2013

义务教育教科书

数学

八年级 上册

上海科学技术出版社

义务教育教科书

数 学

八年级 上册

新时代数学编写组 编著

上海科学技术出版社

主　　编　吴之季　苏　淳

副 主 编　杜先能　徐子华

本册主编　郭要红

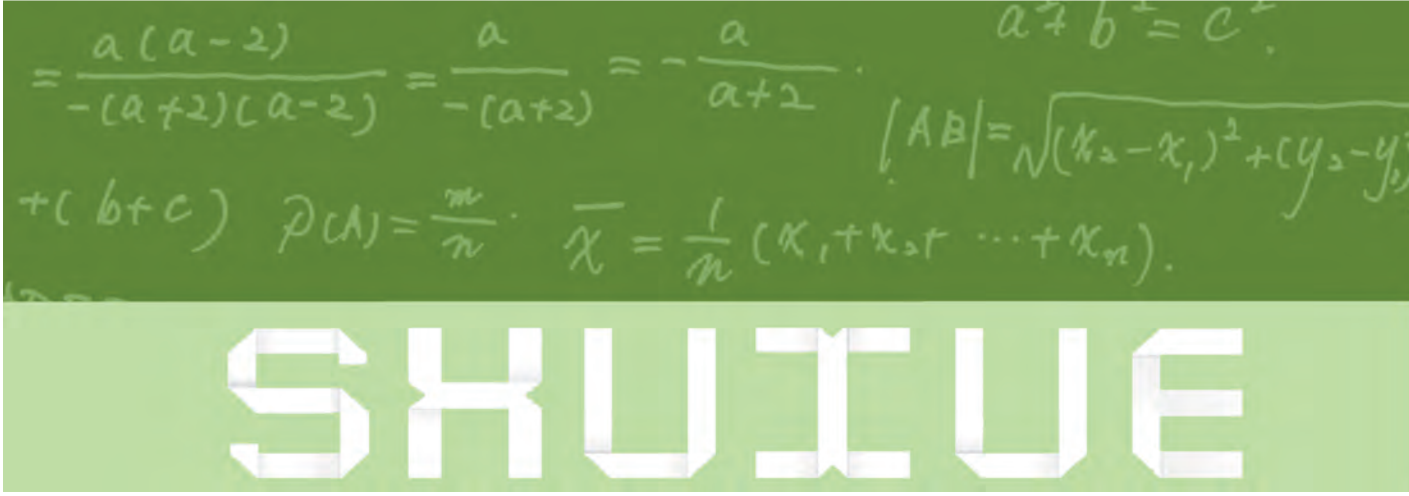
策划编辑　苏德敏
责任编辑　朱先锋　李　刚
美术编辑　陈　蕾

义务教育教科书
数　学
八年级　上册
新时代数学编写组　编著
上海世纪出版(集团)有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社　出版
(上海市钦州南路 71 号　邮政编码 200235)
新华书店发行
安徽芜湖新华印务有限责任公司印刷
开本 787 × 1092　1/16　印张 10.25　字数 166 000
2013 年 6 月第 1 版　2021 年 6 月第 13 次印刷
地图审图号：沪 S(2013)002 号
ISBN 978 - 7 - 5478 - 1799 - 5/G · 386
定价：10.42 元

如发现印装质量问题或对内容有意见建议，请与本社联系
电话：021 - 64848025，邮箱：jc@sstp.cn
审批编号：皖费核(2021 年秋季)第 0107 号　举报电话：12315

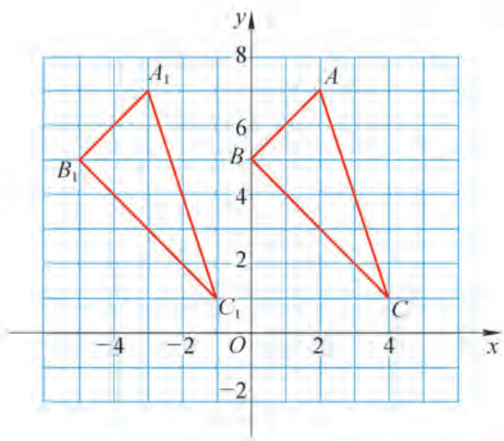
SHUXUE

目　录


SHUXUE

第 11 章

平面直角坐标系



在现实生活中，我们常常需要确定物体的位置．例如，学生在教室听课，观众在电影院里看电影，都有确定的座位等．类似地，在数学中也要研究如何确定平面内点的位置．

本章将学习平面内确定点的位置的方法和坐标系中图形的平移．

11.1 平面内点的坐标

我们知道，建立数轴后，数轴上的点与实数是一一对应的．数轴上每一个点都对应一个实数，这个实数叫做这个点在数轴上的坐标．那么，怎样确定一个点在平面内的位置呢？

问题　图 11－1 是某教室学生座位的平面图，你能描述吴小明和王健同学座位的位置吗？

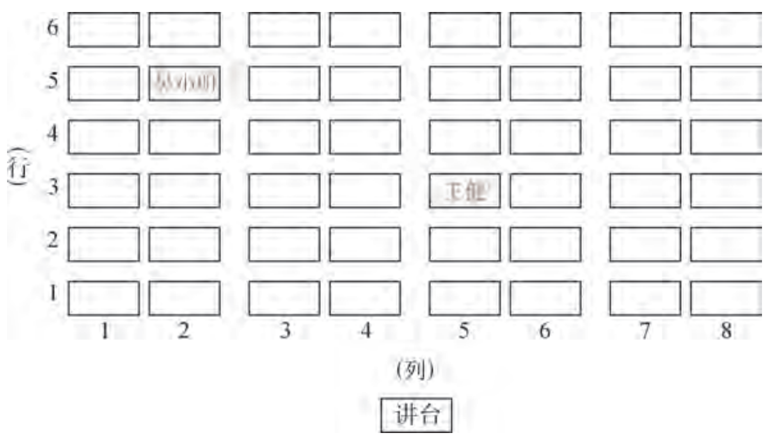


图　11－1

数学中，为了确定平面内一个点的位置，我们先在平面内画两条互相垂直并且原点重合的数轴，如图 11－2. 水平的数轴叫做 **x 轴**或**横轴**（x-axis），取向右为正方向；垂直的数轴叫做 **y 轴**或**纵轴**（y-axis），取向上为正方向；两轴交点 O 为**原点**. 这样就建立了**平面直角坐标系**（rectangular coordinate system），这个平面叫做坐标平面.

有了平面直角坐标系，平面内的点就可以用一对实数来表示了. 例如，在图 11－2 中，点 P 可以这样来表示：由点 P 向 x 轴作垂线，垂足 M 在 x 轴上的坐标是 -2；由点 P 向 y 轴

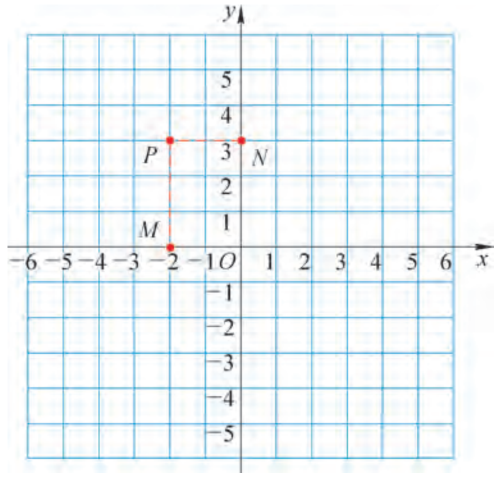


图 11−2

作垂线，垂足 N 在 y 轴上的坐标是 3. 于是，我们说点 P 的横坐标是 −2，纵坐标是 3，把横坐标写在纵坐标的前面，记作 (−2, 3). (−2, 3) 就叫做点 P 在平面直角坐标系中的坐标，简称点 P 的坐标，表示为 $P(-2, 3)$.

操作

1. 把图 11−3 中 A, B, C, D, E, F 各点对应的坐标填入下表：

点	横坐标	纵坐标	坐标
A	4	2	(4, 2)
B			
C			
D			
E			
F			

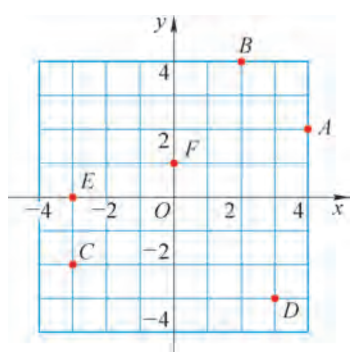


图 11−3

点 A 的坐标是 (4, 2)，记作 $A(4, 2)$. 点 B 的坐标是 (2, 4)，可见，(4, 2) 与 (2, 4) 表示的两个点是不同的.

表示平面上点的坐标是一个**有序实数对**.

2. 在平面直角坐标系中（图 11−4），描出下列各点：

$A(3, 4)$, $B(3, -2)$, $C(-1, -4)$, $D(-2, 2)$, $E(2, 0)$, $F(0, -3)$.

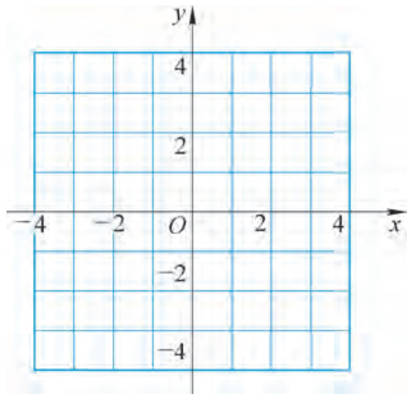


图 11-4

x 轴和 y 轴把坐标平面分成四个部分，分别叫做第一、二、三、四象限，各象限内的点的坐标符号分别为$(+, +)$、$(-, +)$、$(-, -)$、$(+, -)$，如图 11-5. 坐标轴上的点，也就是 x 轴、y 轴上的点不属于任何一个象限.

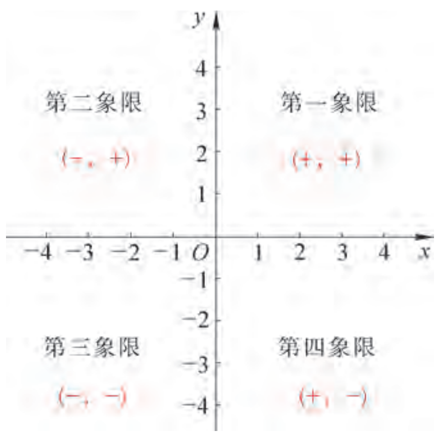


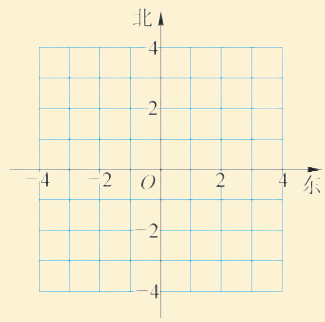
图 11-5

通过直角坐标系的建立，我们把平面内的点与有序实数对一一对应起来. 即对于坐标平面内任意一点 P，都有唯一的一个有序实数对(x, y)和它对应；反之，对于任意一个有序实

数对(x, y),在坐标平面内都有唯一的一点 P 和它对应.

练习

1. 在平面直角坐标系中描出下列各点,并指出它们分别在哪个象限或哪条坐标轴上:
   $A(-5, -3)$, $B(4, -6)$, $C(0, -1)$, $D(-5, 3)$, $E(3.5, 0)$, $F(-3.5, 0)$.
2. 已知王东同学家在学校东 100 m、北 150 m 处,赵西同学的家在学校西 200 m、南 50 m 处. 如图,把学校所在地取作原点,建立平面直角坐标系. 试在坐标系中画出王东、赵西同学家的位置并用坐标表示它们(每一单位长度代表 50 m).



(第 2 题)

3. 填空:

符号 坐标 / 点的位置		横 坐 标	纵 坐 标
第一象限		+	+
第二象限			
第三象限			
第四象限			
x 轴上	正半轴	+	0
	负半轴		
y 轴上	正半轴	0	+
	负半轴		
原 点			

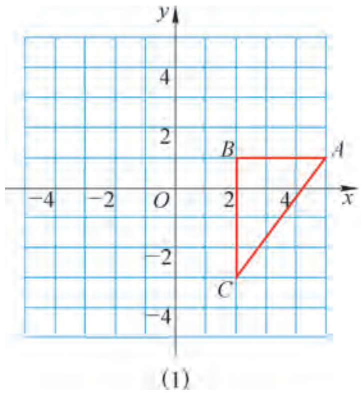
例 1 在平面直角坐标系中描出下列各组点,并将各组内的点用线段依次连接起来得到一个封闭图形,说说你得到的是什么图形,并计算它们的面积.

(1) $A(5, 1)$, $B(2, 1)$, $C(2, -3)$;

(2) $A(-1, 2)$, $B(-2, -1)$, $C(2, -1)$, $D(3, 2)$.

解 (1) 得到的是一个直角三角形,如图 11-6(1). 它的面积是 $\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$.

(2) 得到的是一个平行四边形,如图 11-6(2). 它的面积是 $4\times 3=12$.



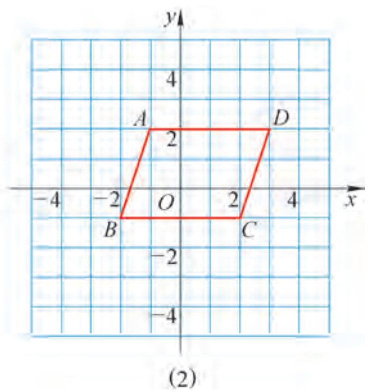


图 11-6

交流

1. 图 11-7 中星形是由哪些点按顺序用线段连成的? 说出这些点的坐标.

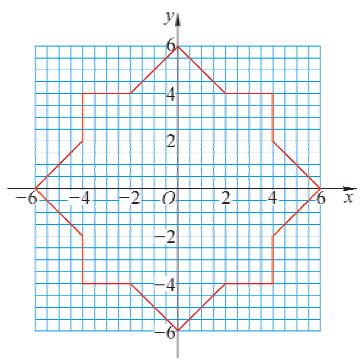


图 11-7

2. 在一位同学不看图 11-7 的情况下,你如何向他描述,让他能画出这个图.

例 2　如图 11－8，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，请建立一个平面直角坐标系，并写出正方形的四个顶点 A，B，C，D 在这个平面直角坐标系中的坐标.

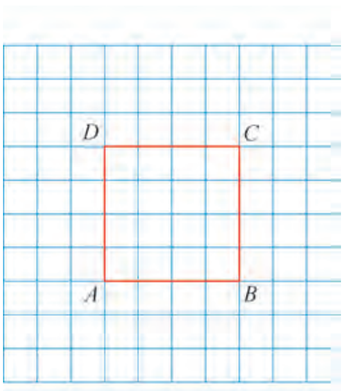


图　11–8

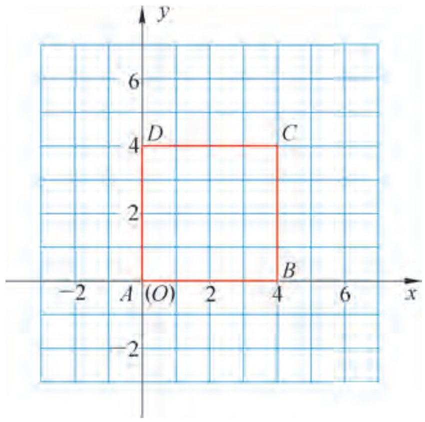


图　11–9

解　如图 11－9，以顶点 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴，AD 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系.

此时，正方形的四个顶点 A，B，C，D 的坐标分别为：

$A(0, 0)$，$B(4, 0)$，$C(4, 4)$，$D(0, 4)$.

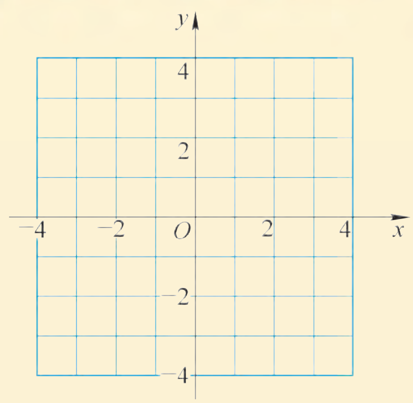
你能另建一个平面直角坐标系，并写出此时顶点 A，B，C，D 的坐标吗？

练习

1. (1) 如图，在平面直角坐标系中描出下列各点：
   $A(2, 0)$，$B(1, 3)$，$C(-2, -2)$，$D(1, -2)$；

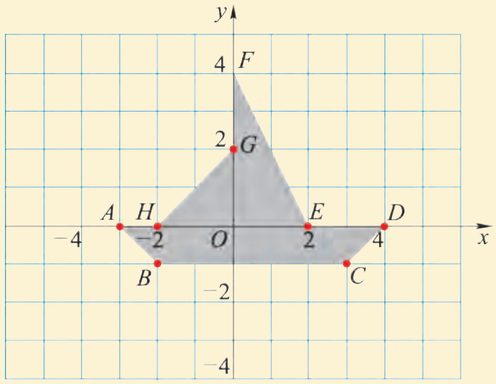
   (2) 按次序 $A\to B\to C\to D\to A$ 将所描出的点用线段连接起来，看看得到的是什么图形.

   (3) 计算所得到的图形面积.



（第 1 题）

2. 假如你想让你的同学在不看图的情况下，准确地画出如图所示的“小船”图案，你怎样来描述它？



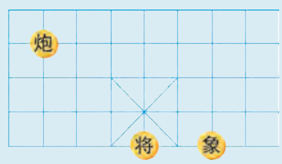
（第 2 题）

习题 11.1

1. 如图，象棋盘上，若“将”位于点（1，−2），“象”位于点（3，−2），则“炮”位于点（　　）.

（A）（−1，1）　　　　（B）（−1，2）

（C）（−2，1）　　　　（D）（−2，2）



（第 1 题）

2. “桃花源”的入口很隐蔽，探险者在地图上建立了一个平面直角坐标系，巧妙地运用坐标来确定它所在的位置. 他首先确定了四棵桃花树的位置：

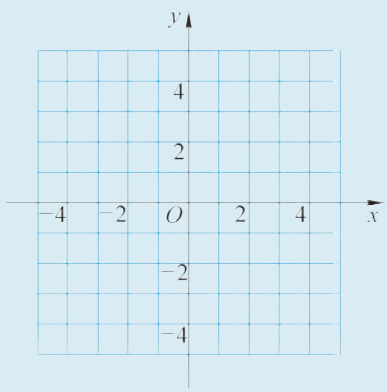
$A(-1, 2)$，$B(-1, -4)$，$C(5, -4)$，$D(5, 2)$.

发现 AC 与 BD 的交点 E 处就是“桃花源”的入口. 试指出“桃花源”入口 E 的坐标.

3. 在如图所示的平面直角坐标系中描出下列各点：

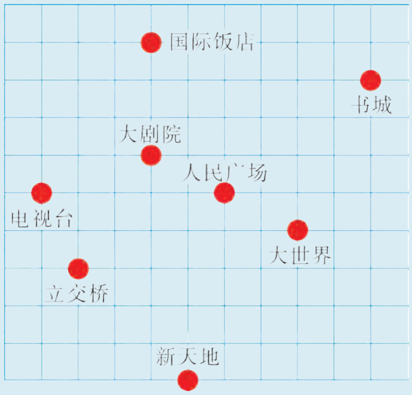
$A(1, 4)$，$B(3, -2)$，$C(-3, -2)$，$D(-1, 4)$.

描好后，再把各点用线段依次连接起来（最后一个点与第一个点连接起来），看看你得到了什么图形？



（第 3 题）

4. 先建立一个平面直角坐标系，再用坐标表示图中各点的位置.



（第 4 题）

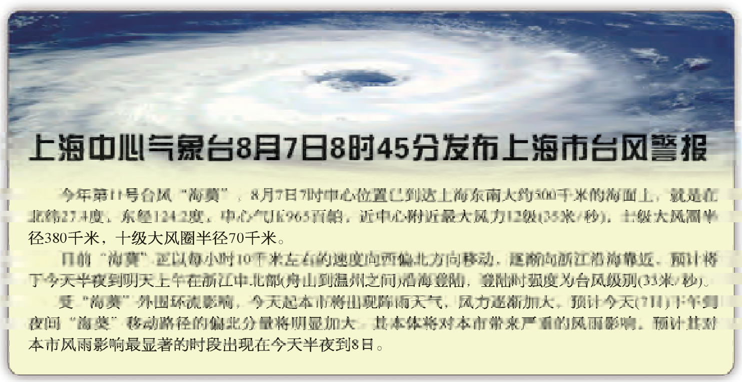
5. 已知 $a<b<0$，那么点 $P(a-b,\ -b)$ 在第几象限？

6. 已知点 $A(-4,\ a)$，点 $B(3,\ a)$，那么过点 A，B 的直线与坐标轴有怎样的位置关系？

阅读与思考

确定台风中心位置

2012 年 8 月 7 日上海中心气象台发布了一则台风消息，如图 11－10.


上海中心气象台8月7日8时45分发布上海市台风警报

今年第11号台风"海葵"，8月7日7时中心位置已到达上海东南大约300千米的海面上，就是在北纬27.4度、东经124.2度，中心气压965百帕，近中心附近最大风力12级(35米/秒)，七级大风圈半径380千米，十级大风圈半径70千米。

目前"海葵"正以每小时10千米左右的速度向西偏北方向移动，逐渐向浙江沿海靠近，预计将于今天半夜到明天上午在浙江中北部(舟山到温州之间)沿海登陆，登陆时强度为台风级别(33米/秒)。

受"海葵"外围环流影响，今天起本市将出现阵雨天气，风力逐渐加大，预计今天(7日)下午到夜间"海葵"移动路径的偏北分量将明显加大，其本体将对本市带来严重的风雨影响，预计其对本市风雨影响最显著的时段出现在今天半夜到8日。

图 11－10

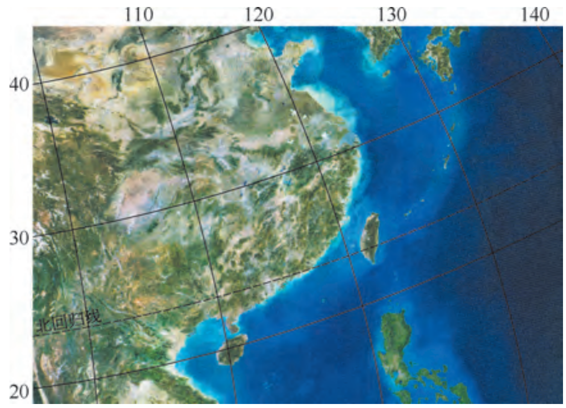


图　11－11

根据上面的报道，解答下面问题：

(1) 8 月 7 日 7 时，台风中心位置在哪里，请在图 11－11 中标出来.

你是根据报道中哪条信息确定的？报道中，有几种信息供你选择？

(2) 台风中心会不会直接登陆上海，判断的根据是什么？如果会登陆上海，那么至少也应在多少时间之后？

(3) 确定平面内点的位置，除了利用平面直角坐标系外，还有哪些办法？

数学史话

笛　卡　儿

笛卡儿(R. Descartes，1596～1650 年)，法国著名的数学家、哲学家、物理学家. 他出生于法国一个小镇，从小体弱多病，但他好奇心强，勤奋好学，自学了大量数学和哲学方面的书籍，后进入普瓦捷大学学习法律，毕业两年后从军.

他热爱数学，从军期间也没有中断对数学问题的思考. 他认为古人的几何学“所思考的只限于形象”，束缚了人们的想象力，而近代的代数学则“太受法则和公式的束缚”. 因此，他主张“采用几何学与代数学中一切好的东西，互相取长补短”. 笛卡儿首先提出了坐标的思想，将变量和运动引入数学，用代数方法研究几何

笛卡儿

图　11－12

图形,建立了解析几何(又叫坐标几何).从而使数学的两大基本要素“数”与“形”统一起来.1637年,笛卡儿发表了著名的哲学著作《方法谈》,该书有三个附录:《几何学》《屈光学》《气象学》,解析几何就安排在《几何学》中.解析几何的创立为几何学提供了崭新的研究方法,是初等数学向高等数学发展的转折点,是数学史上最重大的创造之一.他的这一成就为后来微积分理论的建立起到了基础性、关键性的作用,有力地推动了数学的发展.

笛卡儿强调科学的应用,提出科学的目的在于造福人群,使人类成为自然界的主人.1650年笛卡儿逝世,由于笛卡儿的学说与当时教义相悖,在教会控制下的学术界,对笛卡儿的逝世冷淡对待.随着笛卡儿的数学和哲学思想影响的扩大,法国政府在笛卡儿去世17年后,终于将其遗骨迁回法国,他墓碑上刻着:

笛卡儿,欧洲文艺复兴以来,第一个为人类争取并保证理性权利的人.

11.2 图形在坐标系中的平移

这里，研究如何在平面直角坐标系中，对图形进行平移变换.

观察

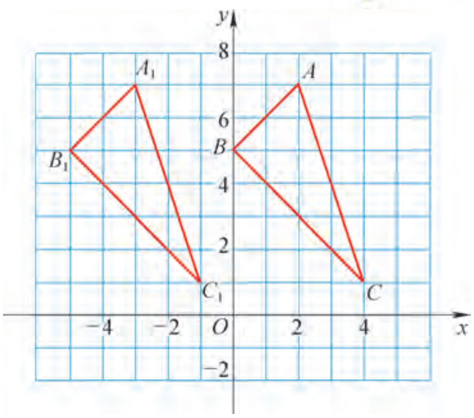


图 11-13

如图 11-13，三角形 ABC 在坐标平面内平移后得到新图形三角形 $A_1B_1C_1$.

(1) 移动的方向怎样?

(2) 写出三角形 ABC 与三角形 $A_1B_1C_1$ 各顶点坐标. 比较对应点坐标，看有怎样的变化?

(3) 如果三角形 ABC 向下平移 2 个单位，得到三角形 $A_2B_2C_2$. 写出这时各顶点坐标，比较两者对应点坐标，看有怎样的变化?

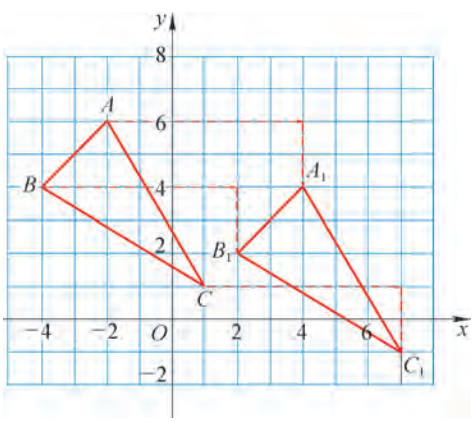


图 11-14

在平面直角坐标系中，描述平移的一个方法是用图形上任一点的坐标(x, y)的变化来表示. 例如，右移 2 个单位、下移 3 个单位的平移记作$(x, y)\to(x+2, y-3)$.

例 如图 11-14，将三角形 ABC 先向右平移 6 个单位，再向下平移 2 个单位得到三角形 $A_1B_1C_1$. 写出各顶点变动前后的坐标.

解　用箭头代表平移，有

$A(-2,6) \rightarrow (4,6) \rightarrow A_1(4,4)$，

$B(-4,4) \rightarrow (2,4) \rightarrow B_1(2,2)$，

$C(1,1) \rightarrow (7,1) \rightarrow C_1(7,-1)$.

思考

把平面直角坐标系中的一个图形，按下面的要求平移，那么，图形上任一个点的坐标(x, y)是如何变化的？

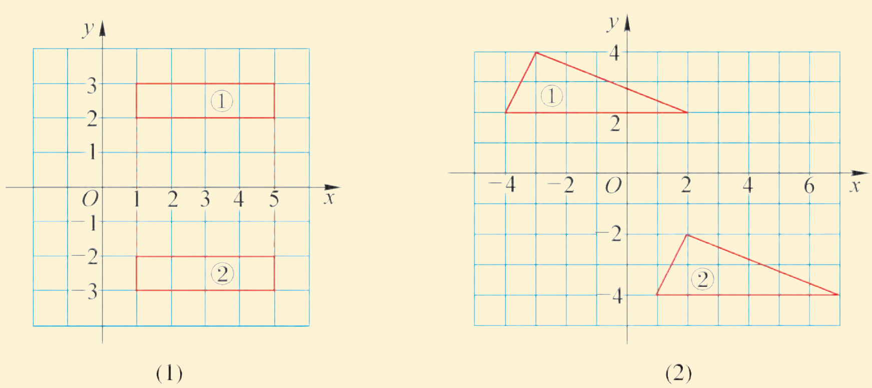
（1）向左或向右移动 a $(a>0)$个单位；

（2）向上或向下移动 b $(b>0)$个单位；

（3）向左或向右移动 a $(a>0)$个单位，再向上或向下移动 $b(b>0)$个单位.

练习

1. 下面每个图中的图②是由图①平移得到的，描述各图是如何移动的，并写出图①、图②各顶点的坐标.

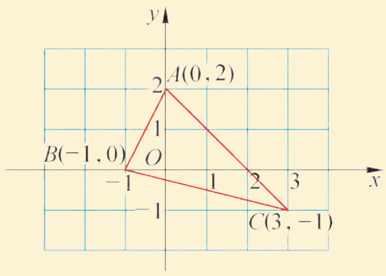


（第 1 题）

2. 如图,已知:三角形 ABC,经下列平移后,求它的顶点的坐标:

(1) 右移 2 个单位,再下移 1 个单位;

(2) 左移 3 个单位,再上移 4 个单位.



(第 2 题)

3. 写出点 $P(4, 5)$ 在作出如下的平移后得到的点 P_1 的坐标,并说出由点 P 到点 P_1 是怎样平移的:

(1) $P(x, y) \to P_1(x+1, y+2)$;

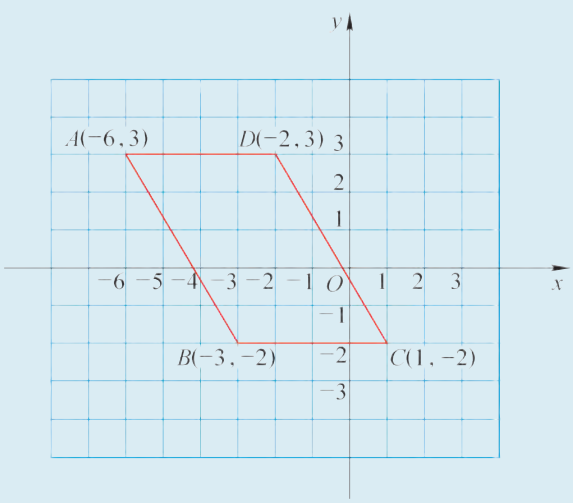
(2) $P(x, y) \to P_1(x-3, y-1)$;

(3) $P(x, y) \to P_1(x, y+1)$;

(4) $P(x, y) \to P_1(x-1, y)$.

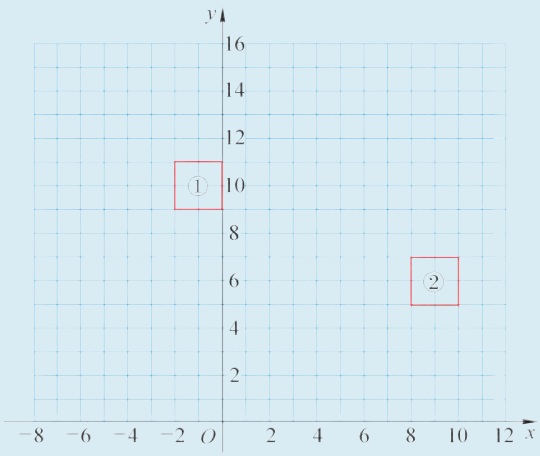
习题 11.2

1. 如图,把平行四边形 $ABCD$ 向右平移 5 个单位,移动后各顶点坐标是什么?



(第 1 题)

2. 图中①②是小正方形在平面直角坐标系中平移过程中的前后两个位置. 请描述从①如何平移到②的?



(第 2 题)

3. 在平面直角坐标系中,线段 AB 两个端点的坐标分别是: $A(1, 2)$, $B(5, 7)$. 将线段 AB 平移后,点 A 的新坐标为$(-6, -3)$. 求点 B 的新坐标.

数学园地

图 11－15 中的①②③分别表示同一个三角形的三个位置. 写出下面几个平移过程:

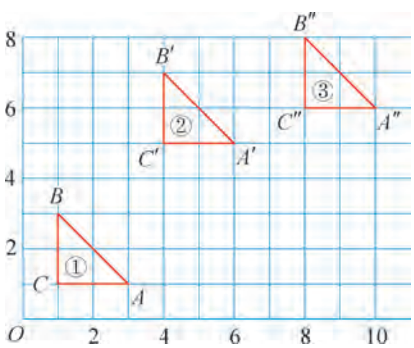


图 11－15

（1）①到②；

（2）②到③；

（3）①到③.

完成上述三步后，从中你能发现(1)(2)和(3)之间有什么关系吗？

小结·评价

一、内容整理

平面内点的位置的确定 → 平面直角坐标系 → 图形在坐标系中的平移

二、主要知识回顾

1. 平面直角坐标系是由两条具有公共原点且相互垂直的数轴构成的. 平面直角坐标系中的点与有序实数对(x, y)一一对应.

2. 在平面直角坐标系中，把图形向左(右)平移，点的________坐标不变；向上(下)平移，点的________坐标不变；所得图形与原图形相比，________不变.

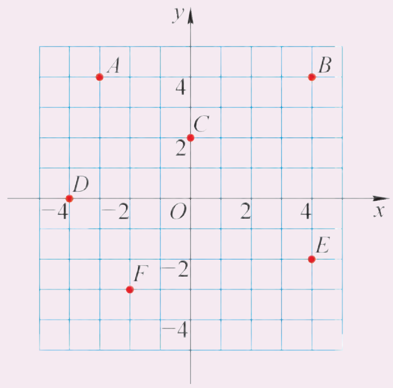
三、自评与互评

1. 坐标可以用来定位，也可以用来研究图形变换. 你能举出用坐标来定位的例子吗？在平面直角坐标系中画出一个简单图形，你能说明你画的图形的位置吗？会将它向左(右)或上(下)平移吗？

2. 寻找生活中的实例，体会一些典型图案的坐标变化与位置变化之间的关系. 有条件的话，在计算机上运用平移创作有趣的图案，在班上展示.

A组 复习题

1. 如图，写出平面直角坐标系中各个点的坐标，并指出它们到 x 轴、y 轴的距离分别是多少？



（第 1 题）

2. （1）在坐标平面内描出下列各点：$A(-10,1)$，$B(-6,1)$，$C(-4,-1)$，$D(-1,-3)$，$E(-1,-6)$，$F(3,-7)$与$G(5,-4)$；用线段依次连接各点，画出北斗星；连接点 G 和点 D，可得到一个"碗"（四边形 $DEFG$）；

（2）计算北斗星中"碗"的面积；

（3）把北斗星右移 8 个单位、上移 10 个单位后，写出各点的坐标.

3. 填空：

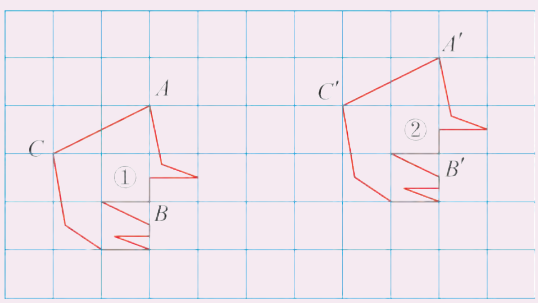
（1）已知点 P 在第二象限，且到 x 轴距离是 2，到 y 轴距离是 3，则点 P 的坐标为________；

（2）在平面直角坐标系中，点 $P(2a+6, a-3)$ 在第四象限，那么 a 的取值范围是________；

（3）已知点 $P(a, b)$，且 $ab>0$，$a+b<0$，则点 P 在第________象限；

（4）将平面直角坐标系平移，使原点 O 移至点 $A(3,-2)$，这时在新坐标系中原来点 O 的坐标为________.

4. 图中的图案由位置①平移到②. 建立合适的平面直角坐标系，写出顶点 A，B，C 移动前后的坐标，并说明是如何平移的？



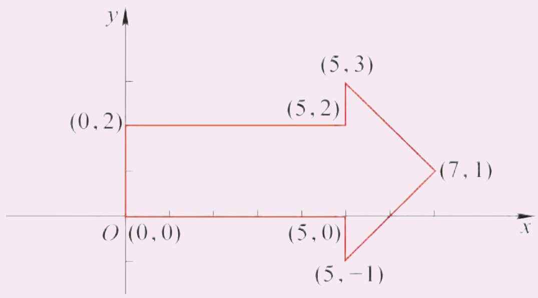
（第 4 题）

5. 如图，箭头图案是将坐标分别为(0, 0)，(0, 2)，(5, 2)，(5, 3)，(7, 1)，(5, -1)，(5, 0)，(0, 0)的点用线段依次连接而成的. 现把图中的各点分别作如下变换：

(1) 横坐标不变，纵坐标分别减 3；

(2) 纵坐标不变，横坐标分别加 2.

以上变换所得的图案与原图案相比有哪些变化？



(第 5 题)

B组 复习题

1. 已知点 P 的坐标为$(2-a, 3a+6)$，且点 P 到两坐标轴的距离相等，试确定点 P 的具体位置.

2. 怎样平移能将点(3, 4)变换成点(6, 2)？这个平移将点(1, -1)变换成哪一点？

3. 通过平移：第一次将点(2, 3)变换成点(2, -2)；第二次将点(2, -2)变换成点(-1, -2).

(1) 分别指出两次平移的方向与距离；

(2) 通过怎样的平移，可直接将点(2, 3)变换成点(-1, -2)？

4. 在平面直角坐标系中描出点：$A(2, 6)$，$B(6, 5)$，$C(5, 2)$，$D(3, 3)$，$E(5, 7)$.

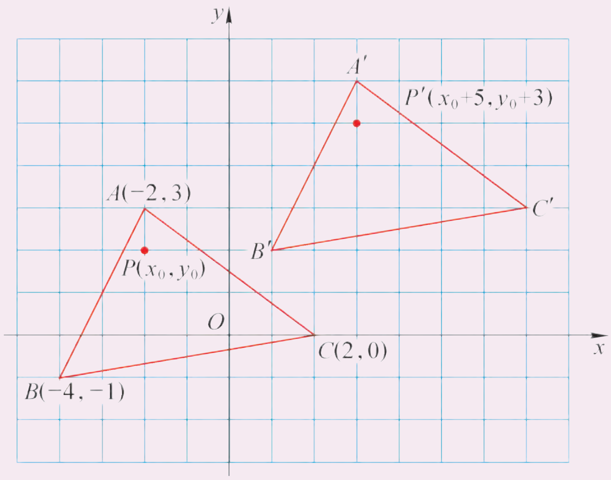
(1) 写出下列各个平移：

① $A \to B$；② $B \to C$；③ $C \to D$；④ $D \to E$；

(2) 写出 $A \to E$ 的平移；

(3) 题(2)中的平移与题(1)中的这些平移有什么关系？

5. 如图，三角形 $A'B'C'$ 是由三角形 ABC 平移后得到的. 已知三角形 ABC 三顶点的坐标为 $A(-2, 3)$，$B(-4, -1)$，$C(2, 0)$，三角形 ABC 中任一点 $P(x_0, y_0)$ 经平移后得三角形 $A'B'C'$ 中对应点 $P'(x_0+5, y_0+3)$. 求点 A'，B'，C' 的坐标.



（第 5 题）

第12章 一次函数

时间 t/min	0	1	2	3	4	5	…
海拔高度 h/m	1 800	1 830	1 860	1 890	1 920	1 950	…

我们生活在一个变化的世界中，通常会看到在同一变化过程中，有两个相关的量，其中一个量往往随着另一个量的变化而变化．如热气球上升后到达的海拔高度随着上升时间的变化而变化，城市的用电负荷随着时间的变化而变化……

本章我们将学习刻画变量之间关系的常用模型——函数，并重点研究一次函数．

12.1 函　数

在现实生活中，常常会需要研究两个变量之间的相互关系. 例如：

问题❶　用热气球探测高空气象，设热气球从海拔 1 800 m 处的某地升空（图 12－1），在一段时间内，它匀速上升. 它上升过程中到达的海拔高度 h m 与上升时间 t min 的关系记录如下表：

时间 t/min	0	1	2	3	4	5	6	7	…
海拔高度 h/m	1 800	1 830	1 860	1 890	1 920	1 950	1 980	2 010	…

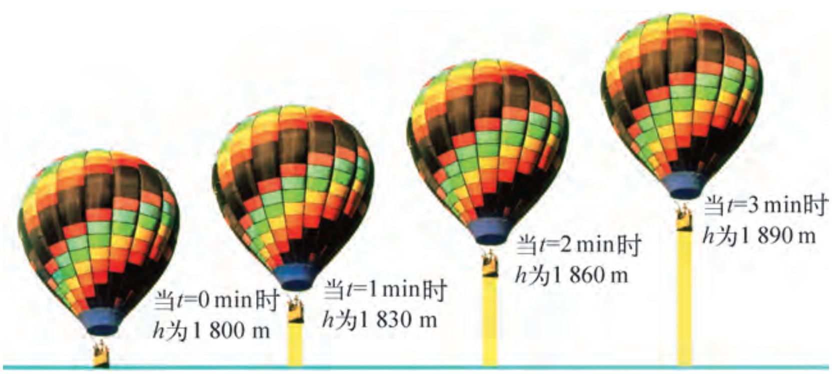


图　12－1

（1）这个问题中，涉及哪几个量？

（2）观察上表，热气球在升空的过程中平均每分上升多少米？

（3）你能求出上升后 3 min 和 6 min 时热气球到达的海拔高度吗？

问题❷　S 市某日自动测量仪记下的用电负荷曲线如图 12 - 2 所示.

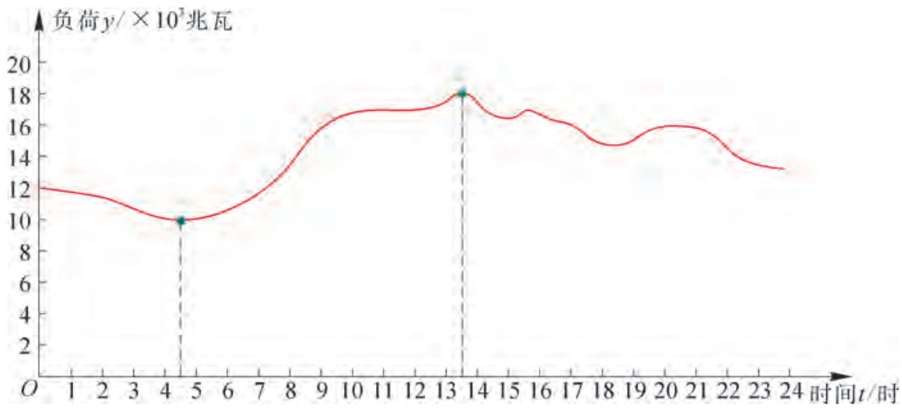


图　12-2

看图回答:

(1) 这个问题中,涉及哪几个量?

(2) 给出这天中的某一时刻,如 4.5 时、20 时,能找到这一时刻的负荷 y($\times 10^3$ 兆瓦)是多少吗? 你是怎么找到的? 找到的值是唯一确定的吗?

(3) 这一天的用电高峰、用电低谷时负荷各是多少? 它们是在什么时刻达到的?

"兆瓦"是物理学中电功率的单位. 1 兆瓦 = 1 000 000 瓦.

问题❸　汽车在行驶过程中,制动后由于惯性的作用仍将滑行一段距离才能停住,这段距离称为制动距离. 某型号的汽车在路面上的制动距离 s m 与车速 v km/h 之间有下列经验公式:

$$s = \frac{v^2}{256}.$$

(1) 式中涉及哪几个量?

(2) 当制动时车速 v 分别是 40 km/h 和 60 km/h 时,相应的制动距离 s 分别是多少米(结果保留一位小数)?

问题 1 中,热气球上升高度 h 的数值是随时间 t 的数值变化而变化的,h 与 t 可以取不同的数值,是**变量**;每分上升

高度为 30 m，这个 30 在过程中保持不变，是**常量**.

分别指出问题 2，3 中的变量.

在研究变量间关系的上述三个问题中，每个变化过程都只涉及两个变量，两个变量之间有一种对应关系，当给定其中一个变量（**自变量**）的值，根据此对应关系就唯一确定了另一个变量（**因变量**）. 例如：

问题 1 中，$t=3$ 时，$h=1\,890$；$t=6$ 时，$h=1\,980$.

问题 2 中，$t=4.5$ 时，$y=10$；$t=20$ 时，$y=16$.

问题 3 中，$v=40$ 时，$s\approx 6.3$；$v=60$ 时，$s\approx 14.1$.

一般地，设在一个变化过程中有两个变量 x，y，如果对于 x 在它允许取值范围内的每一个值，y 都有唯一确定的值与它对应，那么就说 x 是**自变量**（independent variable），y 是 x 的**函数**（function）. 如果当 $x=a$ 时，$y=b$，那么 b 叫做当自变量的值为 a 时的**函数值**.

可见，问题 1 中热气球上升高度 h 是自变量时间 t 的函数；问题 2 中用电负荷 y 是自变量时间 t 的函数；问题 3 中制动距离 s 是自变量车速 v 的函数.

练习

1. 指出下列关系中的变量与常量：

   （1）球的表面积 S cm^2 与球半径 R cm 之间的关系为：$S=4\pi R^2$；

   （2）在一定温度范围内，某种金属棒的长度 l cm 与温度 t ℃之间的关系为：$l=0.002t+200$.

2. 购买单价是 2 元的圆珠笔，总金额 y 元与圆珠笔支数 n 有怎样的关系？指出其中的常量与变量，自变量与因变量.

前面 3 个问题都反映了两个变量间的函数关系. 可以看出，表示函数关系主要有下列三种方法：列表法、解析法、图

象法.

1. 列表法

通过列出自变量的值与对应函数值的表格来表示函数关系的方法叫做**列表法**.

问题 1 就是通过列表法给出了上升高度 h 与上升时间 t 之间的函数关系.

2. 解析法

问题 3 中,制动距离 s 与车速 v 的函数关系是用数学式子 $s=\frac{v^2}{256}$ 来表示的. 这种用数学式子表示函数关系的方法叫做**解析法**. 其中的等式叫做函数**表达式**(或函数解析式).

在用表达式表示函数时,要考虑自变量的取值必须使函数表达式有意义.

例 1 求下列函数中自变量 x 的取值范围:

(1) $y=2x+4$; (2) $y=-2x^2$;

(3) $y=\frac{1}{x-2}$; (4) $y=\sqrt{x-3}$.

分析:在(1)(2)中,x 取任何实数时,$2x+4$ 与 $-2x^2$ 都有意义;在(3)中,当 $x=2$ 时,$\frac{1}{x-2}$ 没有意义;在(4)中,当 $x<3$ 时,$\sqrt{x-3}$ 没有意义.

解 (1) x 为全体实数. (2) x 为全体实数.

(3) $x\neq 2$. (4) $x\geqslant 3$.

注意 在确定函数中自变量的取值范围时,如果遇到实际问题,还必须使实际问题有意义. 如函数 $S=\pi R^2$ 中自变量 R 可取全体实数,如果指明这个式子是表示圆面积 S 与圆半径 R 的关系,那么自变量 R 的取值范围应是 $R>0$.

例 2 当 $x=3$ 时,求下列函数的函数值:

(1) $y=2x+4$;　　(2) $y=-2x^2$;

(3) $y=\frac{1}{x-2}$;　　(4) $y=\sqrt{x-3}$.

解 (1) 当 $x=3$ 时, $y=2x+4=2\times3+4=10$.

(2) 当 $x=3$ 时, $y=-2x^2=-2\times3^2=-18$.

(3) 当 $x=3$ 时, $y=\frac{1}{x-2}=\frac{1}{3-2}=1$.

(4) 当 $x=3$ 时, $y=\sqrt{x-3}=\sqrt{3-3}=0$.

例 3 一个游泳池内有水 300 m^3,现打开排水管以每时 25 m^3 的排出量排水.

(1) 写出游泳池内剩余水量 Q m^3 与排水时间 t h 之间的函数表达式;

(2) 写出自变量 t 的取值范围;

(3) 开始排水 5 h 后,游泳池中还有多少水?

(4) 当游泳池中还剩 150 m^3 水时,已经排水多少时间?

解 (1) 排水后的剩水量 Q 是排水时间 t 的函数,函数表达式为

$$Q=300-25t=-25t+300.$$

(2) 由于池中共有 300 m^3 水,每时排 25 m^3,全部排完只需 $300\div25=12$ (h),故自变量 t 的取值范围是 $0\leqslant t\leqslant12$.

(3) 当 $t=5$ 时,代入函数表达式,得 $Q=-5\times25+300=175$ (m^3),即排水 5 h 后,池中还有水 175 m^3.

(4) 当 $Q=150$ 时,由 $150=-25t+300$,得 $t=6$ (h),即池中还剩水 150 m^3 时,已经排水 6 h.

练习

1. 求下列函数中自变量 x 的取值范围：

(1) $y=\frac{x-3}{2}$；　　(2) $y=\frac{3}{4-x}$；

(3) $y=-\sqrt{x-5}$；　　(4) $y=\frac{1}{2x^2+1}$.

2. 求下列函数当 $x=9$ 和 $x=10$ 时的函数值：

(1) $y=-\sqrt{x-5}$；　　(2) $y=\frac{1}{2x^2+1}$.

3. 一列火车以 80 km/h 的速度匀速行驶.

(1) 写出它行驶的路程 s km 与时间 t h 之间的函数表达式；

(2) 当 $t=10$ 时，s 是多少？

4. 写出前面问题 1 中的函数表达式.

5. 写出正方形面积 y 与边长 x 之间的函数表达式，并指出自变量 x 的取值范围.

3. 图象法

问题 2 中 S 市某天用电负荷 y 与时间 t 的函数关系很难用式子表示，但是可用平面直角坐标系中的图形（图12－2中一条曲线）来表示.

对于能用表达式表示的函数关系，有时需画出图来表示，使函数关系更直观、形象.

如何作函数的图呢？下面以作函数 $y=2x$ 的图为例来说明.

对于自变量 x 的每一个确定的值，可得出对应函数 y 的唯一值. 列表如下：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	-6	-4	-2	0	2	4	6	…

任意一个有序实数对 (x, y)，与坐标平面内一点 $M(x, y)$ 成一一对应. 因此，表中给出的有序实数对，可在坐

标系中描出相应的点. 因为函数 $y=2x$ 中的自变量 x 可以取一切实数,列表计算可以得到无数多个有序实数对,在坐标平面内可描出无数多个点,这些点组成了坐标系中的图形,如图 12－3.

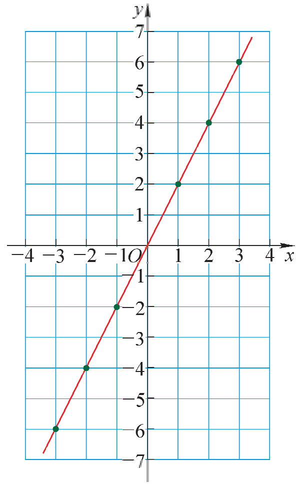


图 12-3

一般地,对于一个函数,如果把自变量 x 与函数 y 的每对对应值分别作为点的横坐标与纵坐标,在坐标平面内描出相应的点,这些点所组成的图形,就是这个函数的**图象**. 用图象来表示两个变量间的函数关系的方法,叫做**图象法**.

由函数表达式画图象,一般按下列步骤进行:

1. 列表:列表给出自变量与函数的一些对应值.

2. 描点:以表中各组对应值为坐标,在坐标平面内描出相应的点.

3. 连线:按照自变量由小到大的顺序,把所描各点用平滑曲线依次连接起来.

描出的点越多,描绘的图象误差越小. 有时不能把所有点都描出,就用平滑曲线连接画出的点,从而得到表示这个函数关系的近似图象.

例 4 画出前面问题 3 中的函数 $s=\frac{v^2}{256}$ 的图象.

(1) 列表:因为这里 $v\geq 0$,我们分别取 $v=0$, 10, 20, 30, 40,求出它们对应的 s 值,列成表格:

$v/(\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1})$	0	10	20	30	40	…
s/m	0	0.4	1.6	3.5	6.3	…

(2) 描点:在坐标平面内描出(0, 0),(10, 0.4),(20, 1.6),(30, 3.5),(40, 6.3)等点.

(3) 连线:将以上各点按照自变量由小到大的顺序用平滑曲线连接,就得到了 $s=\frac{v^2}{256}$ 的图象,如图 12－4.

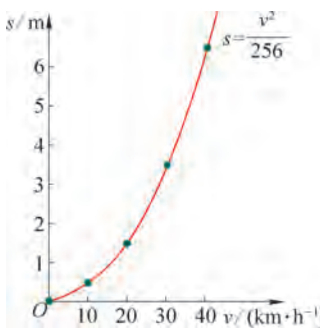


图 12-4

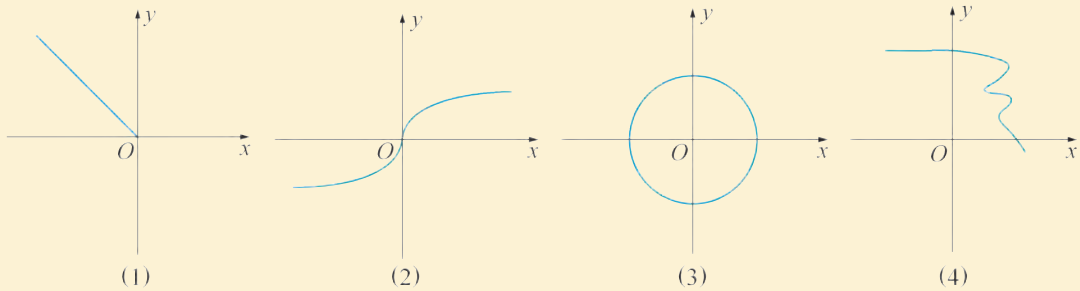
练习

1. 画出函数 $y=-2x$ 的图象（先列表，然后描点、连线）.

2. (1) 画出函数 $y=-x$ 的图象；

   (2) 判断点 $A\left(-\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$，$B(0,\ 0)$，$C\left(\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$是否在函数 $y=-x$ 的图象上.

3. 如图，下列各曲线中哪些能够表示 y 是 x 的函数？你能说出其中的道理吗？



（第 3 题）

思考

函数关系用图象表示，直观、形象，容易从中了解函数的一些变化情况.

1. 图 12－5 是记录某人在 24 h 内的体温变化情况的图象.

图 12－5 中纵轴上 0～35 一段省略了.

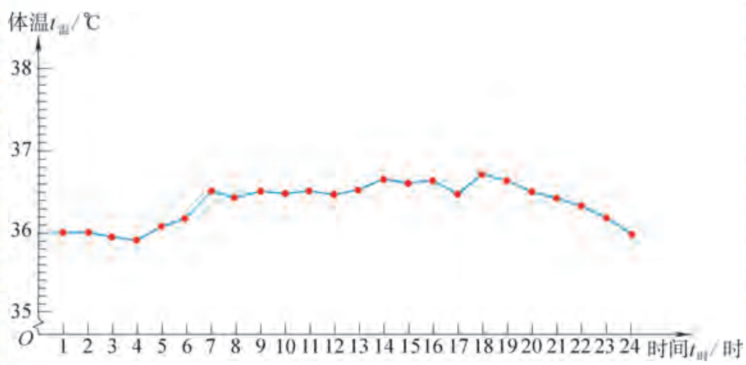


图　12－5

(1) 图中有哪两个变化的量？哪个变量是自变量？哪个变量是因变量？

(2) 在这天中此人的最高体温与最低体温各是多少？分别是在什么时刻达到的？

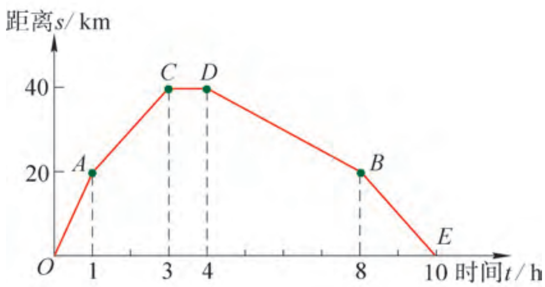
(3) 21:00 时此人的体温是多少？

(4) 这天体温达到 36.2℃ 时是在什么时刻？

(5) 此人体温在哪几段时间上升？在哪几段时间下降？在哪几段时间变化最小？

2. 一艘轮船在甲港与乙港之间往返运输[图 12-6(1)]，只行驶一个来回，中间经过丙港，图 12-6(2)是这艘轮船离开甲港的距离随时间的变化曲线.

(1)



(2)

图 12-6

(1) 观察曲线回答下列问题：

① 从甲港(O)出发到达丙港(A)，需用多长时间？

② 由丙港(A)到达乙港(C)，需用多长时间？

③ 图中 CD 段表示什么情况，船在乙港停留多长时间？返回时，多长时间到达丙港(B)？

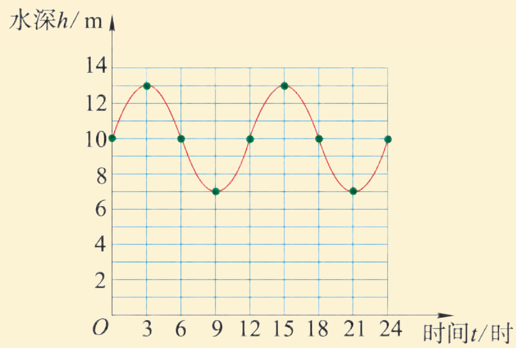
④ 从丙港(B)返回到出发点甲港(E)，用多长时间？

(2) 你知道轮船从甲港前往乙港的平均行驶速度快，还是轮船返回的平均速度快呢？

(3) 如果轮船往返的机器速度是一样的，那么从甲港到乙港是顺水还是逆水？

练习

1. 海水受日、月引力影响而产生的涨落现象叫做潮汐，发生在早晨的叫潮，发生在黄昏的叫汐. 如图是某海滨港口在某天的水位变化曲线.



(第 1 题)

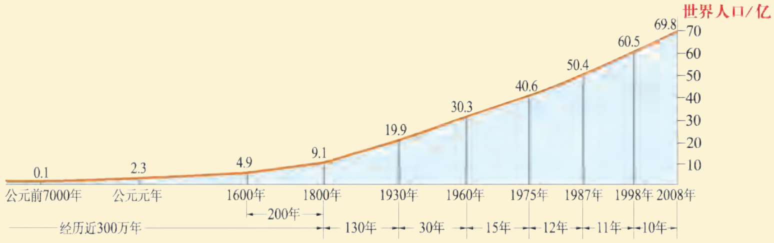
(1) 在这一问题中，有哪几个变量？其中自变量是什么？因变量是什么？

(2) 大约在什么时间水最深，深度约为多少？

(3) 大约在什么时间水最浅，深度约为多少？

(4) 从图中，你还能看出港口水位变化的其他情况吗？

2. 如图展示了世界人口每增加 10 亿大约经历的时间，你能从图象中看出在 1800 年以后哪个时间段内世界人口年平均增速最快？



(第 2 题)

习题 12.1

1. 下列函数关系中，自变量、因变量分别是什么？

（1）一种笔记本每本的单价为 5 元，则销售金额 y 元与销售量 x 本之间的关系满足表达式 $y=5x$；

（2）水的密度是 $1\times10^3\ \text{kg/m}^3$，则水的质量 m 与体积 V 之间的关系满足表达式 $m=1\times10^3\times V=1\ 000V$；

（3）球的体积 V 与球的半径 r 之间的关系满足表达式 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$.

2. 大米每千克 4 元，写出销售金额 y 元与销售量 x kg 之间的函数表达式.

3. 写出下列函数中自变量 x 的取值范围：

（1）$y=2x-3$；　　（2）$y=-2x^2+1$；

（3）$y=\dfrac{3}{1-x}$；　　（4）$y=\sqrt{4-x}$.

4. 求下列函数当 $x=-2$，$x=\dfrac{1}{2}$ 时的函数值：

（1）$y=\dfrac{x+4}{x-2}$；　　（2）$y=\sqrt{4x+15}$.

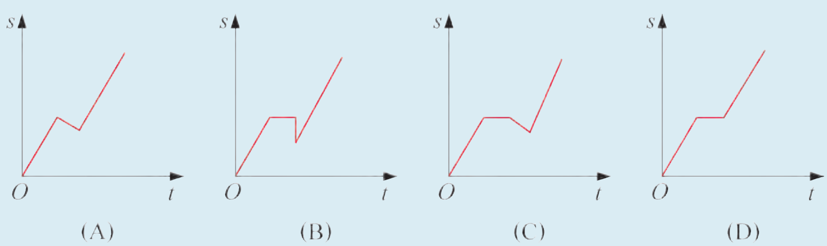
5. 画出下列函数的图象：

（1）$y=4x$；　　（2）$y=-4x$.

6. 画出函数 $y=x^2$ 的图象（先填下表，再描点，然后用平滑曲线顺次连接各点）：

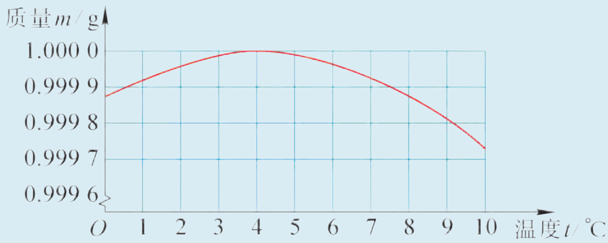
x	…	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	…
y	…										…

7. 某人骑车沿直线旅行，先前进了 a km，休息了一段时间，又原路返回 b km（$b<a$），再前进 c km，则此人离起点的距离 s 与时间 t 的关系示意图应是（　　）.



（第 7 题）

8. 如图是 1 cm^3 水的质量 m 随温度 t 变化的图象：



（第 8 题）

（1）在这一变化过程中，自变量、因变量分别是什么？

（2）在什么温度范围内，水的质量随温度的升高而增大？在什么温度范围内，水的质量随温度的升高而减小？

（3）在什么温度下，水的质量最大？

9. 王林同学对他家今年上半年每月所用天然气的量与应缴费用进行了统计，结果如下表：

项目＼月份	1	2	3	4	5	6
上月抄表数/m^3	200	230	270	305	340	380
本月抄表数/m^3	230	270	305	340	380	412
本月总金额/元	63	84	73.5	73.5	84	67.2

仔细观察表格，然后回答问题：

（1）天然气费的单价是多少元？

（2）如果用 y 元表示每月总金额，x 表示本月抄表数，a 表示上月抄表数，请写出 y 与 x 之间的函数表达式；

（3）如果王林家 7 月份抄表数为 443，那么他家 7 月份应缴的天然气费总金额是多少元？

阅读与思考

输入量与输出量间的函数关系

下面从函数的角度来探究“猜数游戏”(见《数学　七年级上册》2.1 节中“数学活动　探索数的规律”)的原理.

(1) 对于小明想好的每一个数,通过图 12－7 中四步运算是否都有唯一确定的得数,输出量 y 是否为输入量 x 的函数,能否写出 y 与 x 之间的函数表达式?

(2) 给出一个得数(即 y 的一个值),小华为什么能立即猜出小明原来想的是什么数(即找出原 x 的输入值)?

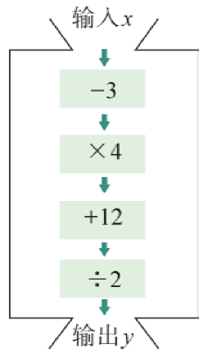


图　12－7

如果把上述猜数游戏中的运算改为一个求平方运算(图 12－8),那么 y 是否仍为 x 的函数呢?

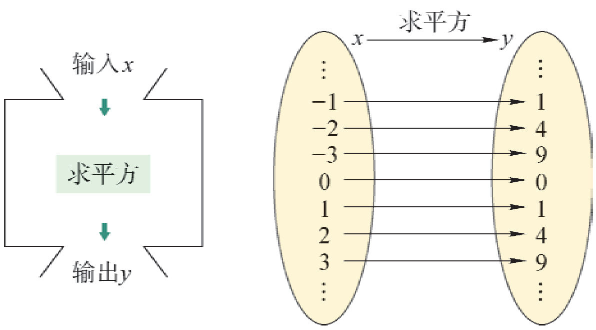


图　12－8

反过来,能否由图 12－8 中 y 的值确定 x 的值?这个值是唯一的吗?把这个过程改写成开平方(图 12－9),这里的 y 是否仍为 x 的函数呢?

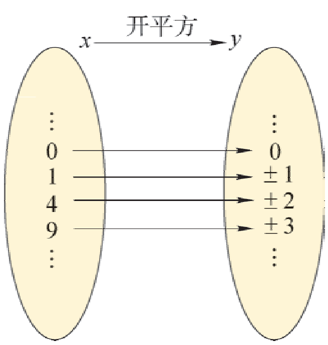


图　12－9

如果把图 12－7 中猜数游戏的四步运算看作一个可以进行运算的装置 f,它将输入的数 x 进行加工,然后输出数 y,如图 12－10 所示,那么

图　12－10

计算器上的键 x^2, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$都可以看作这样的装置 f,在 x 的取值范围(填写下表)内,任意给定一个数 x,然后利用上述键,立即可以输出唯一的答案 y,即求得函数值.

键	函　　数	x 的取值范围
x^2	$y=x^2$	
$\sqrt{x}$	$y=\sqrt{x}$	
$\frac{1}{x}$	$y=\frac{1}{x}$	

以后我们将在计算器上学习更多的函数键(如 sin, cos, tan 等),还可以利用计算机的编程语言定义更复杂的函数,且进行复杂的函数值计算.

12.2 一次函数

在上节,遇到过这样一些函数:

$h=30t+1\ 800$;　　$Q=-25t+300$;

$y=2x$;　　$y=-2x$;

$s=80t$.

这些函数有什么共同特点?

不难看出,这些函数的表达式都是关于自变量的一次式.可以写成:$y=kx+b$ 的形式.

一般地,形如 $y=kx+b$ (k, b 为常数,且 $k\neq 0$) 的函数叫做**一次函数**.

其中,当 $b=0$ 时,一次函数 $y=kx+b$ 就成为

$$y=kx\ (k\text{ 为常数,且 }k\neq 0).$$

如上面的 $y=2x$, $y=-2x$, $s=80t$, 这些函数中两个变量间的关系,就是小学学过的正比例关系.因此,形如 $y=kx$ (k 为常数,且 $k\neq 0$) 的函数叫做**正比例函数**.

可见,正比例函数是一次函数的特殊情形.

下面,来研究一次函数的图象与性质.

前面画过函数 $y=2x$, $y=-2x$ 及另外一些正比例函数的图象,可见正比例函数 $y=kx$ (k 为常数,且 $k\neq 0$) 的图象是一条经过原点的直线,通常我们把正比例函数 $y=kx$ (k 为常数,且 $k\neq 0$) 的图象叫做直线 $y=kx$.

因为两点确定一条直线,所以画正比例函数的图象,只要先描出两点,再过这两点画直线,就可以了.

例 1　在同一平面直角坐标系中,画下列函数的图象:

$y=\frac{1}{2}x$,　　$y=x$,　　$y=3x$.

解　列表:(为便于比较,三个函数值计算表排在一起)

x	…	0	1	…
$y=\frac{1}{2}x$	…	0	$\frac{1}{2}$	…
$y=x$	…	0	1	…
$y=3x$	…	0	3	…

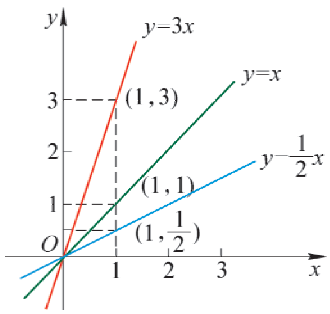


图　12-11

如图 12-11,过两点(0, 0), $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ 画直线,得 $y=\frac{1}{2}x$ 的图象;

过两点(0, 0), (1, 1) 画直线,得 $y=x$ 的图象;

过两点(0, 0), (1, 3) 画直线,得 $y=3x$ 的图象.

练习

1. 在同一平面直角坐标系中,画下列函数的图象:

$y=-\frac{1}{2}x$,　　$y=-x$,　　$y=-3x$.

2. 结合例 1 及上面第 1 题中的图象,就下面问题思考后回答:

(1) $k>0$ 与 $k<0$ 时, $y=kx$ 的图象各有什么特点?

(2) $|k|$ 的大小不同,对 $y=kx$ 的图象有什么影响?

思考

学过了上面例 1 及练习后可以看出,当 k 取不同的数值时,就确定正比例函数 $y=kx$ (k 为常数,且 $k\neq0$) 在坐标系中有不同的位置. 你能从中归纳出怎样的规律?

一般地，正比例函数 $y = kx$（k 为常数，且 $k \neq 0$）有下列性质：

当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大（图象是自左向右上升的）；

当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小（图象是自左向右下降的）.

正比例函数 $y = kx$（k 为常数，且 $k \neq 0$）的图象是一条直线. 对于一次函数 $y = kx + b$（k，b 为常数，且 $k \neq 0$），当 $b \neq 0$ 时，它的图象又是什么呢？

下面我们用具体例子来说明.

例 2　画一次函数 $y = 2x + 3$ 的图象.

解　为了便于对比，列出一次函数 $y = 2x + 3$ 与正比例函数 $y = 2x$ 的 x 与 y 的对应值表：

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=2x$	…	-4	-2	0	2	4	…
$y = 2x + 3$	…	$-4+3$	$-2+3$	$0+3$	$2+3$	$4+3$	…

从表中可以看出，对于自变量 x 的同一个值，一次函数 $y = 2x + 3$ 的函数值要比函数 $y = 2x$ 的函数值大 3 个单位. 也就是说，对于相同的横坐标，一次函数 $y = 2x + 3$ 的图象上点的纵坐标要比正比例函数 $y = 2x$ 图象上点的纵坐标大 3. 因此，把直线 $y = 2x$ 向上平移 3 个单位，就得到一次函数 $y = 2x + 3$ 的图象. 由此可见，一次函数 $y = 2x + 3$ 的图象是平行于直线 $y = 2x$ 的一条直线，如图 12－12.

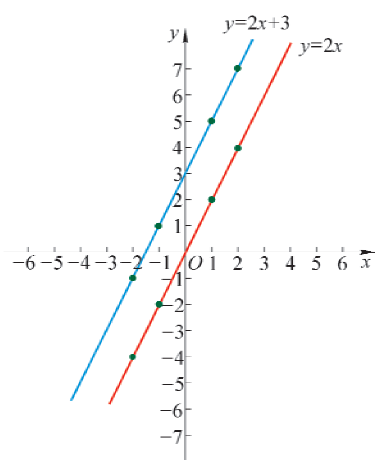


图　12－12

在图 12－12 中，把直线 $y=2x$ 向下平移 3 个单位，这时直线应是什么函数的图象？

一般地，一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数，且 $k\neq0$）的图象是平行于直线 $y=kx$ 的一条直线，因此，我们以后把一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数，且 $k\neq0$）的图象叫做直线 $y=kx+b$.

直线 $y=kx+b$ 与 y 轴相交于点 $(0,\ b)$，b 叫做直线 $y=kx+b$ 在 y 轴上的截距，简称**截距**.

直线 $y=kx+b$ 可以看作是由直线 $y=kx$ 平移 $|b|$ 个单位长度而得到（当 $b>0$ 时，向上平移；当 $b<0$ 时，向下平移）.

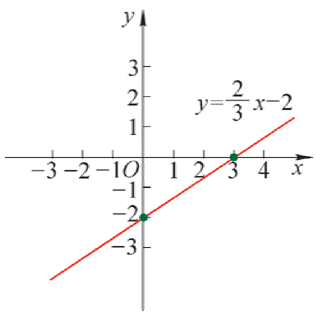


图 12－13

例 3 画出直线 $y=\frac{2}{3}x-2$，并求它的截距.

解 对于 $y=\frac{2}{3}x-2$，有

x	0	3
y	−2	0

过两点 $(0,\ -2)$，$(3,\ 0)$ 画直线，即得 $y=\frac{2}{3}x-2$ 的图象，它的截距是 -2，如图 12－13.

练习

1. 下列函数中，哪些是一次函数？哪些是正比例函数？

（1）$y=-8x$；（2）$y=\frac{8}{x}$；（3）$y=8x^2$；（4）$y=8x-4$.

2. 填空：

（1）正比例函数 $y=4x$ 的图象，一定经过点（____，____）和点（____，____）；

（2）把直线 $y=x$ 向上平移 2 个单位，所得直线是函数________的图象；

（3）把函数 $y=-2x+3$ 的图象向________平移________个单位，可以得到函数 $y=-2x$ 的图象.

3. 画出下列一次函数的图象：

（1）$y=3x+1$；（2）$y=-3x-1$；（3）$y=\frac{1}{2}x+3$；（4）$y=-\frac{1}{2}x-4$.

探究

1. 已知一次函数 $y=3x+1$，$y=2x-3$，$y=\frac{1}{2}x+4$.

(1) 分别列出 x，y 的对应值表，观察当自变量 x 的值由小到大增大时，函数 y 的值是增大还是减小?

(2) 画出图象，上述变化从图象上看，直线从左到右是上升还是下降?

2. 用类似的方法，观察函数 $y=-3x-1$，$y=-2x+3$，$y=-\frac{1}{2}x-4$ 图象的变化趋势，从中你有什么发现?

一般地，一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数，且 $k\neq 0$）有下列性质：

当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大（图象是自左向右上升的）；

当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小（图象是自左向右下降的）.

练习

1. 填空：

(1) 对于函数 $y=7x$，y 随 x 的________而增大；

(2) 对于函数 $y=-2x+3$，y 随 x 的增大而________.

2. 已知一次函数 $y=(2m+1)x+5$. 若 y 随 x 的增大而增大，求 m 的取值范围.

3. 直线 $y=-2x+3$ 经过点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$，当 $x_1>x_2$ 时，y_1 与 y_2 哪个大?

4. 当 m 取何值时，一次函数 $y=(m-1)x+m^2-1$ 的图象经过原点?

5. 当 $b>0$ 时，$y=x+b$ 的图象经过哪几个象限?当 $b<0$ 时呢?

例 4　如果知道一个一次函数,当自变量 $x=4$ 时,函数值 $y=5$;当 $x=5$ 时,$y=2$. 写出函数表达式并画出它的图象.

解　因为 y 是 x 的一次函数,设其表达式为

$$y=kx+b.$$

由题意,得

$$\begin{cases}4k+b=5,\\5k+b=2.\end{cases}$$

解方程组,得

$$k=-3,\ b=17.$$

所以,函数表达式为

$$y=-3x+17.$$

图象如图 12－14 中的直线.

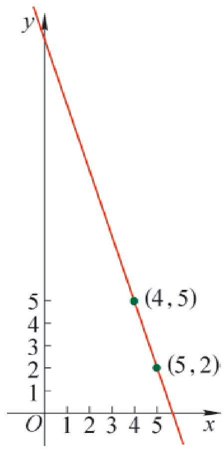
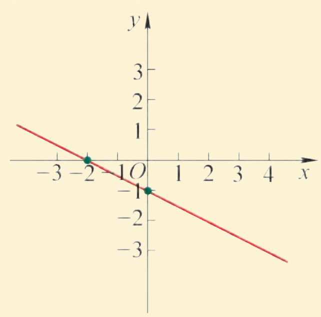


图　12－14

这里,先设所求的一次函数表达式为 $y=kx+b$(k, b 是待确定的系数),再根据已知条件列出关于 k, b 的方程组,求得 k, b 的值. 这种确定表达式中系数的方法,叫做**待定系数法**(method of undetermined coefficient).

练习

1. 已知 $y=ax+b$,当 $x=-2$ 时,$y=2$;当 $x=2$ 时,$y=6$. 求 a 和 b 的值.
2. 某一次函数的图象如图,根据图象求此一次函数表达式.
3. 已知一次函数 $y=kx+2$ 的图象与直线 $y=3x$ 平行. 求 k 的值.
4. 一次函数的图象经过点 $P(-2,\ 3)$,且与直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 平行. 求这个函数表达式.



(第 2 题)

例 5 为节约用水，某城市制定以下用水收费标准：每户每月用水不超过 8 m^3 时，每立方米收取 1 元外加 0.3 元的污水处理费；超过 8 m^3 时，超过部分每立方米收取 1.5 元外加 1.2 元的污水处理费. 设一户每月用水量为 x m^3，应缴水费 y 元.

（1）给出 y 与 x 之间的函数表达式；

（2）画出上述函数图象；

（3）当该市一户某月的用水量为 $x=5$ m^3 或 $x=10$ m^3 时，求其应缴的水费；

（4）该市一户某月缴水费 26.6 元，求该户这个月用水量.

分析：用水时以 8 m^3 为界，分成两段，收费标准不一样：当 $x\leqslant 8$ 时，每立方米收费$(1+0.3)$元；当 $x>8$ 时，超出部分每立方米收费$(1.5+1.2)$元. 另外，收费时 x 一般取整数，不足 1 m^3 的可并入下月计费.

解 （1）y 与 x 之间的函数表达式为：

$$y=\begin{cases}(1+0.3)x=1.3x & (0\leqslant x\leqslant 8),\\ (1.5+1.2)(x-8)+1.3\times 8=2.7x-11.2 & (x>8).\end{cases}$$

（2）如图 12－15，函数图象是一段折线.

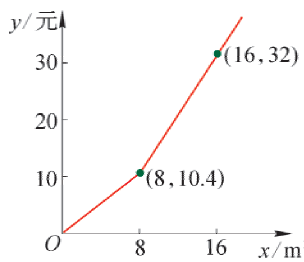


图 12－15

（3）当 $x=5$ m^3 时，

$$y=1.3\times 5=6.5(\text{元})；$$

当 $x=10$ m^3 时，

$$y=2.7\times 10-11.2=15.8(\text{元}).$$

即当用水量为 5 m^3 时，该户应缴水费 6.5 元；当用水量为 10 m^3 时，该户应缴水费 15.8 元.

（4）$y=26.6>1.3\times 8$，可见该户这月用水超过8 m^3，因此：

$$2.7x-11.2=26.6,$$

解方程，得 $x=14$.

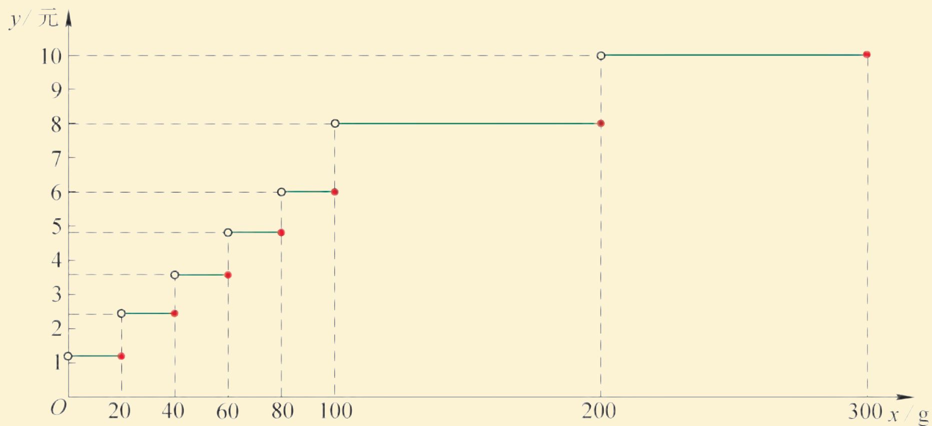
即该户本月用水量为 14 m^3.

本例给出的是在自变量的不同取值范围内表示函数关

系的表达式有不同的形式，这样的函数称为**分段函数**，分段函数在生活中也有很多应用.

练习

1. 某地邮寄信件，平信（外埠）每件：20 g 以内邮资 1.2 元；在20～100 g 内，每增 20 g，加收 1.2 元（不足 20 g 以 20 g 计）；100 g 以上先贴 6 元邮票，每增 100 g，加收 2 元（不足 100 g 以 100 g 计）. 设平信每件质量为 x g，邮资为 y 元. y 与 x 之间的函数图象如下：

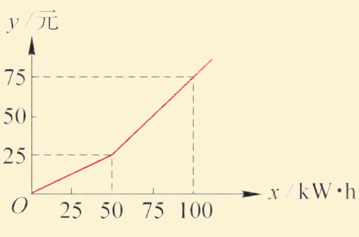


（第 1 题）

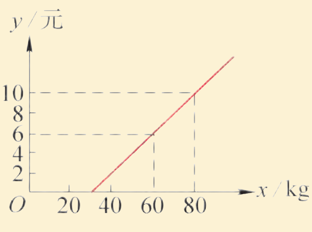
（1）若要寄一封质量为 47 g 的信件，需贴邮票多少元？

（2）若寄一封信函贴了 8 元邮票，问这信函的质量可能是多少？

2. 某地规定，每月每户的用电量 x kW·h 与应缴电费 y 元的关系如图所示. 求出 y 与 x 之间的函数表达式.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 某地长途汽车客运公司规定旅客可随身携带一定质量的行李，如果超过规定质量，则需要购买行李票. 行李票费用 y 元是行李质量 x kg 的一次函数，如图所示.

（1）求 y 与 x 之间的函数表达式；

（2）求旅客最多可免费携带行李的质量是多少？

例 6　某单位有职工几十人，想在节假日期间组织到外地 H 处旅游. 当地有甲、乙两家旅行社，它们服务质量基本相同，到 H 地旅游的价格都是每人 100 元. 经联系协商，甲旅行社表示可给予每位游客八折优惠；乙旅行社表示单位先交 1 000 元后，给予每位游客六折优惠. 问该单位选择哪家旅行社，使其支付的旅游总费用较少？

分析：假设该单位参加旅游人数为 x，按甲旅行社的优惠条件，应付费用 $80x$ 元；按乙旅行社的优惠条件，应付费用 $(60x+1\ 000)$ 元. 问题变为比较 $80x$ 与 $60x+1\ 000$ 的大小了.

解法一　设该单位参加旅游人数为 x. 那么如选甲旅行社，应付 $80x$ 元，选乙旅行社，应付 $(60x+1\ 000)$ 元.

记 $y_1=80x$，$y_2=60x+1\ 000$. 在同一直角坐标系中作出两个函数的图象（图 12－16），y_1 与 y_2 的图象交于点 $(50, 4\ 000)$.

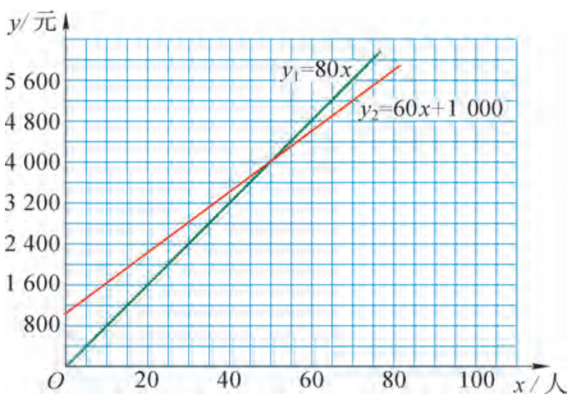


图　12－16

观察图象，可得：

当人数为 50 时，选择甲或乙旅行社费用都一样；

当人数为 0～49 时，选择甲旅行社费用较少；

当人数为 51～100 时，选择乙旅行社费用较少.

解法二　设选择甲、乙旅行社所需费用之差为 y，

本题还可按下面方法来解，即：

当 $80x-(60x+1\ 000)=0$，即 $x=50$ 时，选甲或乙旅行社费用一样，都是 $80\times50=4\ 000$ 元；

当 $80x-(60x+1\ 000)>0$，即 $x>50$ 时，选乙旅行社费用较少；

当 $80x-(60x+1\ 000)<0$，即 $x<50$ 时，选甲旅行社费用较少.

则 $y=y_1-y_2=80x-(60x+1\ 000)=20x-1\ 000.$

画一次函数 $y=20x-1\ 000$ 的图象，如图 12-17，它与 x 轴交点为(50, 0). 由图可知：

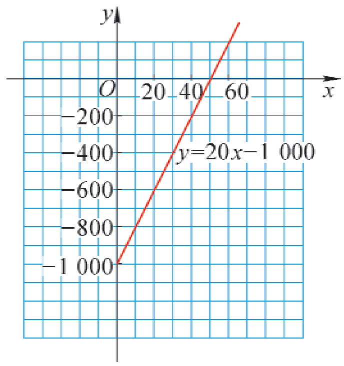


图 12-17

(1) 当 $x=50$ 时，$y=0$，即 $y_1=y_2$，甲、乙两家旅行社的费用一样；

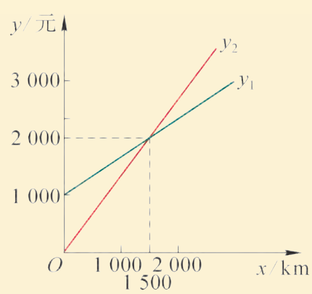
(2) 当 $x>50$ 时，$y>0$，即 $y_1>y_2$，乙旅行社的费用较低；

(3) 当 $x<50$ 时，$y<0$，即 $y_1<y_2$，甲旅行社的费用较低.

练习

1. 某厂日产手套的总成本 y 元与日产量 x 副之间的函数表达式为 $y=5x+40\ 000$，而手套的出厂价格为每副 10 元，试问该厂至少应日产手套多少副才能不亏本？

2. 某单位急需用车，他们准备和甲、乙两个出租车公司签订月租车合同. 设汽车每行驶 x km，甲公司的月租费是 y_1 元，乙公司的月租费是 y_2 元，y_1，y_2 分别与 x 之间关系的图象如图所示，观察图象回答：



(第 2 题)

(1) 每月行驶的里程在什么范围内时，租乙公司的车合算？

(2) 每月行驶的里程等于多少时，租两家公司车的费用相同？

(3) 如果这个单位估计每月行驶的里程为 2 300 km，那么这个单位租哪家的车合算？

前面，已经学过一元一次方程和一元一次不等式的解法. 它们与一次函数之间有什么联系呢？

问题❶　(1) 解方程：$2x+6=0$；

(2) 已知一次函数 $y=2x+6$，问 x 取何值时，$y=0$？

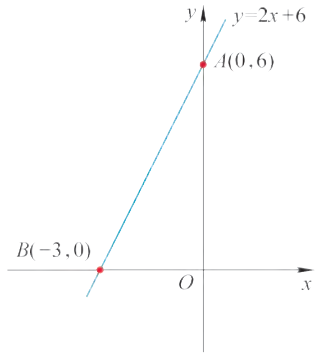


图　12−18

关于问题 1(1)，容易求出它的解为 $x=-3$.

关于问题 1(2)，画出 $y=2x+6$ 的图象（图 12−18）. 从图中可以看出，一次函数 $y=2x+6$ 的图象与 x 轴交点坐标为 $(-3, 0)$，这就是当 $y=0$ 时，得 $x=-3$，而 $x=-3$ 正是方程 $2x+6=0$ 的解.

因为，任何一个一元一次方程都可转化为 $kx+b=0$ 的形式，所以解一元一次方程 $kx+b=0$，都可转化为求一次函数 $y=kx+b$（k, b 为常数，且 $k\neq 0$）中 $y=0$ 时的 x 值. 从图象上看，就是求直线 $y=kx+b$ 与 x 轴交点的横坐标.

问题❷　根据图 12−18 中一次函数 $y=2x+6$ 的图象，你能分别说出一元一次不等式 $2x+6>0$ 和 $2x+6<0$ 的解集吗？

$2x+6>0$，就是函数 $y=2x+6$ 中函数值 $y>0$. 观察图 12−18，当图象在 x 轴上方时，它上面的点的纵坐标 $y>0$. 同样地，图象在 x 轴下方时，它上面的点的纵坐标 $y<0$.

因为图象与 x 轴交于点 $(-3, 0)$，所以由图象可知，要使 $y>0$，即 $2x+6>0$，应有 $x>-3$；要使 $y<0$，即 $2x+6<0$，应有 $x<-3$.

因为，任何一个一元一次不等式都可以转化为 $kx+b>0$（或 $kx+b<0$）的形式，所以，解一元一次不等式 $kx+b>0$（或 $kx+b<0$），就是求使一次函数 $y=kx+b$（k, b 为常数，且 $k\neq 0$）取正值（或负值）时 x 的取值

范围.

例 7 画出函数 $y=-3x+6$ 的图象,结合图象:

(1) 求方程 $-3x+6=0$ 的解;

(2) 求不等式 $-3x+6>0$ 和 $-3x+6<0$ 的解集.

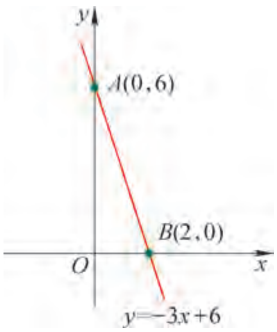


图 12-19

解 (1) 画出函数 $y=-3x+6$ 的图象,如图 12-19. 图象与 x 轴交点 B 的坐标为(2, 0).

所以,方程 $-3x+6=0$ 的解就是交点 B 的横坐标:$x=2$.

(2) 结合图象可知,$y>0$ 时 x 的取值范围是 $x<2$;$y<0$ 时 x 的取值范围是 $x>2$.

所以,不等式 $-3x+6>0$ 的解集是 $x<2$,不等式 $-3x+6<0$ 的解集是 $x>2$.

练习

1. 画出一次函数 $y=-2x-6$ 的图象,结合图象求:

   (1) x ________ 时,$y=0$;

   (2) x ________ 时,$y>0$;

   (3) x ________ 时,$y<0$;

   (4) x ________ 时,$y>6$.

2. 画出函数 $y=3x-9$ 的图象,结合图象:

   (1) 求方程 $3x-9=0$ 的解;

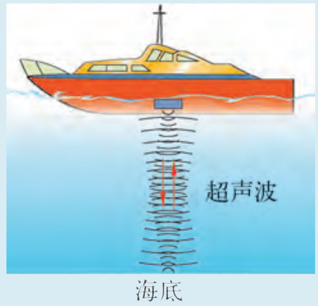
   (2) 求不等式 $3x-9\leqslant 0$ 的解集;

   (3) 当 $y=3$ 时,求 x 的值;

   (4) 当 $y>3$ 时,求 x 的范围.

习题 12.2

1. 探测船上的声呐发出的超声波以 1 450 m/s 的速度射向海底，海底再将超声波反射回来，经 t s 后声呐收到反射超声波. 试求海底深度 h m 与时间 t s 之间的关系.



（第 1 题）

2. 拖拉机的油箱中装有油 60 L，耕地时平均每时耗油 5 L. 写出开始耕地后，油箱中剩油量 Q L 与耕地时间 t h 之间的函数表达式，并画出函数图象.
3. 判断下列各点中哪些在直线 $y=-5x+1$ 上？

   $A(-3, 16)$，$B(2, 9)$，$C\left(-\dfrac{3}{5}, 4\right)$，$D\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.
4. 在同一平面直角坐标系中画出下列函数的图象：

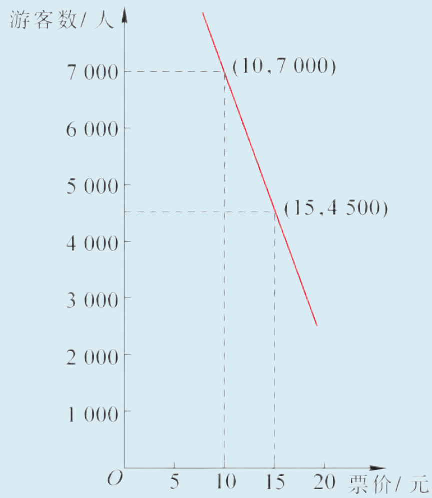
   （1）$y=5x+3$；　（2）$y=-5x-3$；　（3）$y=x-4$；　（4）$y=-x+4$.
5. 填空：

   （1）当 $x=$________时，函数 $y=-x+3$ 的值为 0；

   （2）函数 $y=-7x+1$ 中，y 随 x 的增大而________；

   （3）函数 $y=mx-4$ 的图象经过点 $(-2, -8)$，则 $m=$________，它的图象与 x 轴的交点坐标是________，与 y 轴的交点坐标是________；

   （4）一次函数 $y=(k^2+1)x$ 的图象经过______象限.
6. 已知一次函数 $y=kx-k$，若 y 随 x 的增大而减小，那么，这个函数图象经过哪几个象限？
7. 某游乐场采取了浮动门票价格的方法来控制游客人数. 在该方法实施过程中发现：每周游客人数与票价之间存在着如图所示的一次函数关系. 在这样的情况下，如果限定票价在 5 ~ 20 元间浮动，那么每周游客人数最多可能是多少？



（第 7 题）

8. 设 y 是 x 的一次函数，且 $x=1$ 时，$y=1$；$x=2$ 时，$y=4$.

   （1）写出 y 与 x 之间的函数表达式；

   （2）求 $x=0$ 时，y 的值；

   （3）求 $y=10$ 时，x 的值.

9. (1) 已知一次函数 $y = kx + b$ 的图象与直线 $y = -2x$ 平行，与 y 轴交于点 $(0, -3)$. 求 k 与 b 的值；

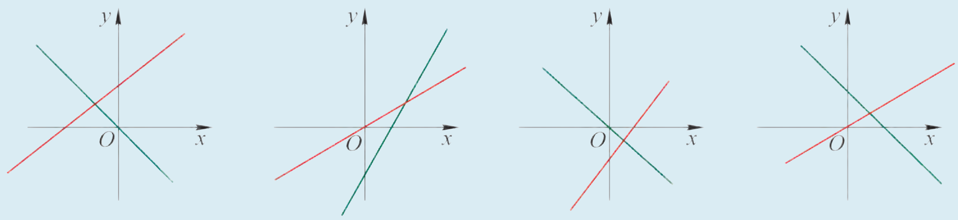
(2) 已知直线 $y = kx + b$ 经过点 $(-4, 9)$，与 x 轴交于点 $(5, 0)$. 求 k 与 b 的值，并画出这条直线.

10. 若 y 与 $x-1$ 成正比例，且 $x = 2$ 时，$y = 3$，求 y 与 x 之间的函数表达式.

11. 某一次函数的图象过点 $(-1, 2)$，且函数 y 的值随 x 的增大而减小. 请写出符合上述条件的函数表达式（只写一个）.

12. 某一次函数的图象不经过第二象限，请写出一个符合条件的函数表达式.

13. 一次函数 $y = ax + b$ 与 $y = abx$ $(ab \neq 0)$，在同一平面直角坐标系中的图象应该是(　　).



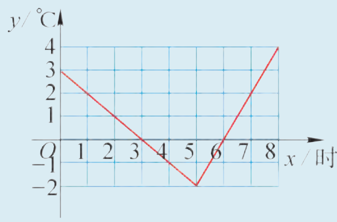
(A)　(B)　(C)　(D)

14. 正比例函数 $y = 2x$ 的图象与一次函数 $y = -3x + k$ 的图象交于点 $P(1, m)$.

(1) 求 k 的值；

(2) 求此正比例函数、一次函数的图象与 x 轴围成的三角形面积.

15. 某气象台预报了当地次日 0 时至 8 时的气温随时间变化的情况，如图所示. 其中 0 时至 5 时，均匀下降，5 时至 8 时均匀上升. 问该地区次日 0 时至 8 时期间气温在 0℃以下的时间有多长？在什么时间气温是 0℃？



（第 15 题）

16. 声音在空气中传播的速度 y m/s，简称音速，是气温 x ℃的一次函数. 下表列出了一组不同气温时的音速：

气温 x/℃	0	5	10	15	20
音速 y/(m·s^{-1})	331	334	337	340	343

(1) 求 y 与 x 之间的函数表达式，并画出图象；

(2) 气温为 22℃时，某人在看到烟花燃烧 5 s 后才听到声响，那么此人与燃烧的烟花所在地相距多远？

17. 填空：

(1) 一元一次不等式 $-x+2<0$ 的解集，可看作一次函数 $y=-x+2$ 当 y ________时，x 的________；

(2) 如果一元一次方程 $2x+m=0$ 的根是 $x=-1$，那么一次函数 $y=2x+m$ 的图象与 x 轴交点的坐标为________.

18. 结合函数 $y=3x-12$ 的图象，确定当 x 取何值时：

(1) $y=0$； (2) $y>0$； (3) $y<0$.

19. 画出函数 $y=-2x+3$ 的图象，结合图象求：

(1) 方程 $-2x+3=0$ 的解；

(2) 不等式 $-2x+3<0$ 的解集；

(3) 不等式组 $-3\leqslant -2x+3\leqslant 7$ 的解集.

20. 已知一次函数 $y=(3m-8)x+1-m$ 的图象与 y 轴的负半轴相交，y 随 x 的增大而减小，且 m 为整数.

(1) 求 m 的值；

(2) 当 x 取何值时，$0<y<4$?

21. 一游泳池有进水闸、放水闸各 1 个，单独进水 4 h 可以装满一池水，单独放水 6 h 可以放完一池水. 当池中的水占满池的 $\frac{1}{4}$ 时，同时打开进水闸和放水闸. 设两闸开放的时间用 x h 表示，池中的水占满池的几分之几用 y 表示.

(1) 求 y 与 x 之间的函数表达式，并写出自变量 x 的取值范围；

(2) 在平面直角坐标系中画出题(1)中的函数图象；

(3) 求泳池从有 $\frac{1}{4}$ 池水到有 $\frac{1}{2}$ 池水时两闸开放的时间.

12.3 一次函数与二元一次方程

前面，我们研究了一次函数与一元一次方程、一元一次不等式的关系. 虽然利用函数图象来解方程或不等式未必简便，但是，这种形数结合的思想方法，对于学习数学是极为重要的.

下面，我们来研究一次函数与二元一次方程的联系.

我们知道，二元一次方程 $3x+2y=6$ 可以转化成一次函数的形式：

$$y=-\frac{3}{2}x+3.$$

对于这个函数，任意给出自变量 x 的一些值，可以求得对应的 y 值，列表如下：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=-\frac{3}{2}x+3$	…	7.5	6	4.5	3	1.5	0	-1.5	…

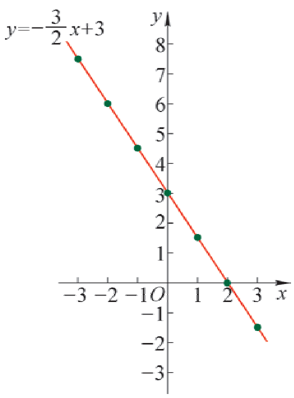


图　12-20

表中每一对 x, y 的值代入方程 $3x+2y=6$ 都成立，所以每组有序数对都是方程

$$3x+2y=6$$

的解. 可见，二元一次方程 $3x+2y=6$ 有无数多组解，解的全体叫做二元一次方程的解集. 以这些有序数对为坐标，在坐标平面内描点作图（图 12-20），得到一条直线，这条直线就是一次函数$y=-\frac{3}{2}x+3$ 的图象.

一般地，一个二元一次方程可以转化成一次函数 $y=kx+b$（k, b 为常数，且 $k\neq0$）的形式，所以，每个二元一次方程都对应一个一次函数，也对应一条直线.

练习

1. 在平面直角坐标系中画出下列二元一次方程所对应的直线：

   (1) $x-y=0$；　　　　(2) $x+y=0$.

2. (1) 下面的有序数对，哪些是二元一次方程 $3x+y=6$ 的解？

   $A(2, 0)$，$B(3, -3)$，$C(5, -9)$，$D(6, -10)$，$E(-2, 10)$，$F(-3, 15)$.

   (2) 给出二元一次方程 $3x+y=6$ 任意五组非整数解.

3. 有 5 角、1 元的硬币各若干个，从中取出一些凑成 4 元. 问有多少种不同的取法？

前面我们学习了一次函数与二元一次方程间的对应关系，那么我们是否可以利用一次函数来解二元一次方程组呢？

例 1 (1) 在平面直角坐标系中画出直线 l_1: $y=-\frac{1}{2}x+1$ 与直线 l_2: $y=2x+6$ 的图象；

(2) 如果直线 l_1 与 l_2 相交于点 P，写出点 P 的坐标 P(____, ____)；

(3) 检验点 P 的坐标是不是下面方程组的解？

$$\begin{cases} x+2y=2, \\ 2x-y=-6. \end{cases}$$

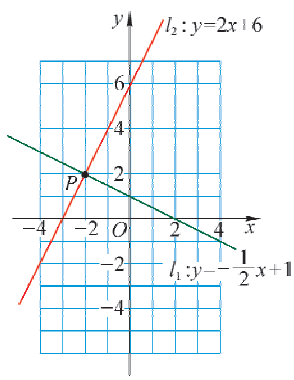


图 12-21

解 (1) 图象如图 12-21 所示.

(2) 由图 12-21 可知，直线 l_1 与 l_2 相交于点 P，点 P 的坐标为 $(-2, 2)$.

(3) 方程 $x+2y=2$ 可以转化成一次函数 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 的形式，因此，直线 l_1: $y=-\frac{1}{2}x+1$ 上任意一点的坐标都是方程 $x+2y=2$ 的解；同理，直线 l_2 上任意一点的坐标都是方程 $2x-y=-6$ 的解. 所以直线 l_1 与 l_2 的交点 P 的坐标是方程 $x+2y=2$ 与 $2x-y=-6$ 的公共解，也就是说，是二元

一次方程组

$$\begin{cases}x+2y=2,\\2x-y=-6\end{cases}$$

的解.

例 2 利用函数图象解方程组:

$$\begin{cases}5x-2y=4, & ①\\10x-4y=8. & ②\end{cases}$$

解 对于方程①,有

x	0	2
y	−2	3

过点 $A(0,\ -2)$ 和 $B(2,\ 3)$ 画出方程①所对应的直线 l: $y=\frac{5}{2}x-2$.

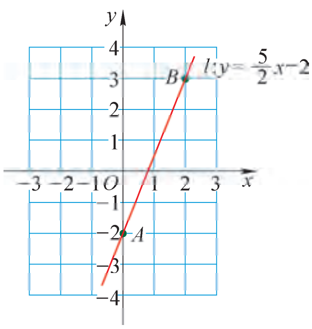


图 12−22

同样地,点 $A(0,\ -2)$ 和 $B(2,\ 3)$ 也在方程②所对应的直线上. 所以方程①②所对应的直线都是通过 $A(0,\ -2)$ 和 $B(2,\ 3)$ 两点的直线 l,如图 12 − 22,就是说,这两条直线重合. 显然,直线 l 上每一个点的坐标都是原方程组的解,所以原方程组有无穷多组解.

例 3 利用函数图象解方程组:

$$\begin{cases}3x+2y=-2,\\6x+4y=4.\end{cases}$$

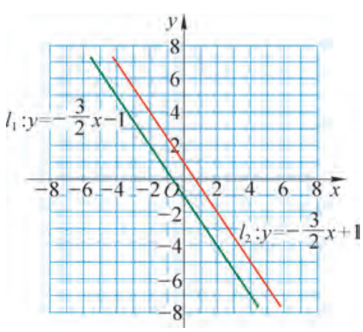


图 12−23

解 方程 $3x+2y=-2$ 对应直线 l_1: $y=-\frac{3}{2}x-1$.

方程 $6x+4y=4$ 对应直线 l_2: $y=-\frac{3}{2}x+1$.

作出直线 l_1 和 l_2 的图象如图 12 − 23,两条直线平行,故方程组无解.

思考

上述例题直观地说明二元一次方程组的解有三种情况. 当把其中的各个二元一次方程组化为标准形式：$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 后，比较一下每例中两个方程中 x 的系数之比、y 的系数之比以及常数项之比，从中你发现了怎样的规律？

练习

既不解方程组也不画图，你能判断下列方程组的解的情况吗？

(1) $\begin{cases}3x+5y=8,\\2x-3y=7;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}y=2x-3,\\4x-2y=6;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}3x-4y=5,\\6x-8y=12;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}2x+3y=5,\\y=x.\end{cases}$

习题 12.3

1. 求二元一次方程 $x+4y=16$ 的正整数解.
2. 利用函数图象解下列二元一次方程组：

(1) $\begin{cases}3x-y=7,\\x+2y=0;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\frac{1}{2}x-y=1,\\x-2y=2;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}4x-y=2,\\\frac{1}{2}y=2x+1;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}4x-3y-9=0,\\x-2y-1=0.\end{cases}$

3. 在同一平面直角坐标系中画出直线 $y_1=-x+4$ 和 $y_2=2x-5$. 根据图象：

（1）求两条直线交点的坐标；

（2）确定 x 分别取什么值时，$y_1=y_2$，$y_1>y_2$，$y_1<y_2$.

4. 利用函数图象：

（1）求出 $\begin{cases}3x-y-1=0,\\2x-y+3=0\end{cases}$ 的解；

（2）求不等式 $3x-1>2x+3$ 的解集.

信息技术应用

用《几何画板》求二元一次方程组的近似解

通过下面的操作，我们来了解用《几何画板》求二元一次方程组的近似解的方法.

问题 求方程组 $\begin{cases}5x+1=7y, & ①\\5y+2x=7 & ②\end{cases}$

的近似解（精确到0.01）.

具体操作过程如下：

1. 对于方程①，有

	A	B
x	4	−3
y	3	−2

对于方程②，有

	C	D
x	0	3.5
y	1.4	0

2. 打开《几何画板》，选择“绘图”菜单中的“定义坐标系”命令，建立坐标轴. 再选择“绘图”菜单中的“绘制点”命令（图12－24），在弹出的“绘制点”对话框中选择“直角坐标”选项，再

输入 A, B 两点坐标(图 12－25),点击“绘制”按钮,得到点 A, B.

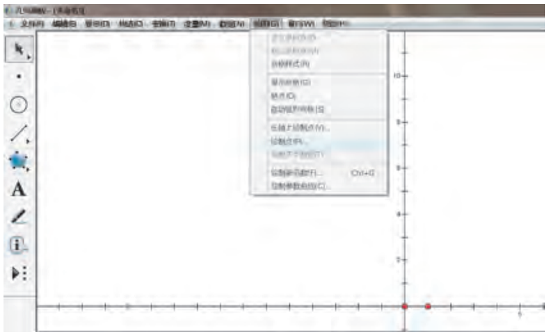


图　12－24

图　12－25

3. 选中 A, B 两点,选择“构造”菜单中的“直线”命令(图 12－26),得到直线 AB. 同理,可作直线 CD.

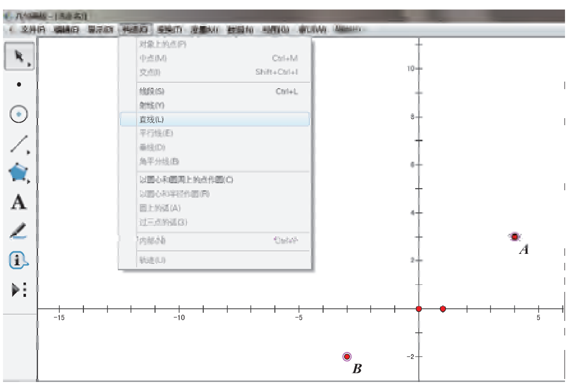


图　12－26

4. 选中直线 AB 和 CD 的交点 E 后,再选择“度量”菜单中的“坐标”命令(图 12－27),得到点 E 坐标(图 12－28),即原方程组的近似解是 $\begin{cases} x = 1.13, \\ y = 0.95. \end{cases}$

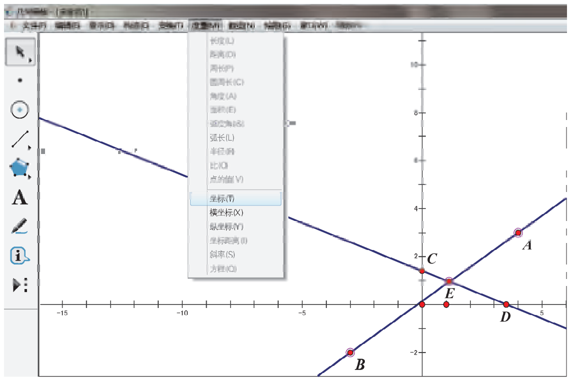


图　12−27

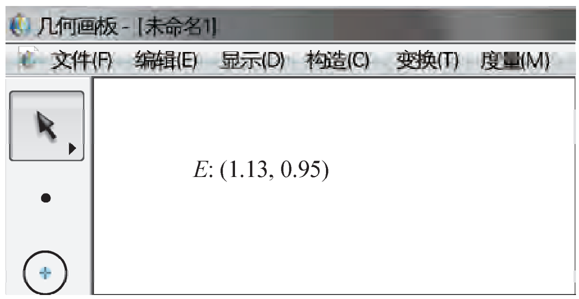


图　12−28

从上面的操作可以看到，用计算机可以很方便地求二元一次方程组的近似解.

12.4 综合与实践

一次函数模型的应用

现实生活或具体情境中的很多问题或现象都可以抽象成数学问题,并通过建立合适的数学模型来表示数量关系和变化规律,再求出结果并讨论结果的意义.

下面,有一个实际问题,你能否利用已学的知识给予解决?

问题1 奥运会每4年举办一次,奥运会的游泳纪录在不断地被突破,如男子400 m自由泳项目,1996年奥运会冠军的成绩比1960年的提高了约30 s.下面是该项目冠军的一些数据:

图 12-29

年　份	冠军成绩/s	年　份	冠军成绩/s
1980	231.31	1996	227.97
1984	231.23	2000	220.59
1988	226.95	2004	223.10
1992	225.00	2008	221.86

根据上面资料,能否估计2012年伦敦奥运会时该项目的冠军成绩?

请按下面步骤做,看能否达到目的?

(1)上面给出的数据是奥运会上男子400 m自由泳的冠军成绩.如果以1980年为原点,年份为 x 轴(每4年为一个单位长度),成绩为 y 轴建立平面直角坐标系,即1980年该项目的冠军成绩在平面直角坐标系中的对应点为(0, 231.31),1984年该项目的冠军成绩在平面直角坐标系中的对应点为(1, 231.23).请你写出其他各组数据在平面

要确定一个一次函数表达式，只要知道两点坐标即可. 这里，选用哪两点呢？

用一个透明的三角尺（或直尺），让它的一条边通过图中8个点中任两点，直观地比较看，选择其中哪两点时，其余点更靠近直尺的这条边，或者这条边的上、下个数大体差不多.

2012 年伦敦奥运会中国选手孙杨以 220. 14 s 的成绩打破男子 400 m 自由泳项目奥运会纪录获得冠军，你对你预测的准确程度满意吗？

直角坐标系中的对应点的坐标，并在平面直角坐标系（图12 - 30）中描出对应点.

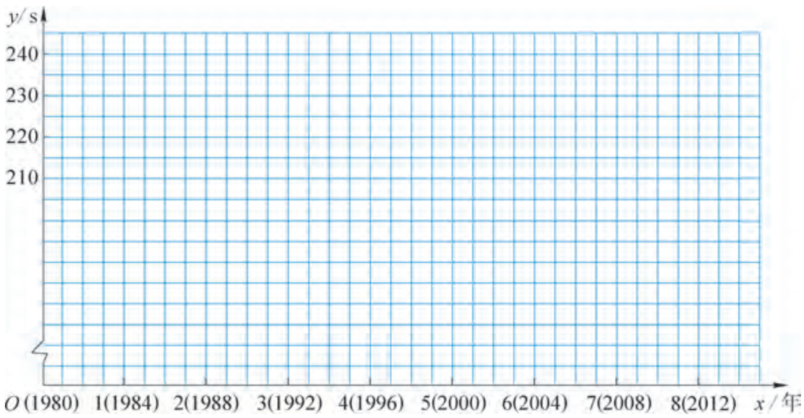


图 12-30

（2）观察图 12 - 30 中描出点的分布情况，根据已知条件来猜测 x 与 y 之间的函数形式（或“近似”的函数形式），并写出函数表达式；

（3）根据你建立的模型，估计 2012 年伦敦奥运会该项目的冠军成绩；

（4）能否用上述模型预测 2016 年里约热内卢奥运会该项目的冠军成绩？

通过本例，使我们认识到可以利用所学知识去研究一些不确定现象之间的规律性. 这里用“直线”来模拟发展趋势的问题，任选两点画直线可以画出很多条直线，但如何确定哪条直线更合适，将在高中阶段进一步学习.

通过上面学习，我们可以知道建立两个变量之间的函数模型，可以通过下列几个步骤完成：

（1）将实验得到的数据在直角坐标系中描出；

（2）观察这些点的特征，确定选用的函数形式，并根据已知数据求出具体的函数表达式；

（3）进行检验；

（4）应用这个函数模型解决问题.

问题❷ 球从高处下落再反弹起来,可以直观地看出球的下落高度越高,反弹高度也就越高,那么球下落高度与反弹高度具有怎样的关系呢?请你进行实验,将实验数据填入下表,并根据实验数据建立球下落高度和反弹高度之间关系的函数模型.

实验次数	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	第 6 次
下落高度/cm						
反弹高度/cm						

问题❸ 请你选择一个可以应用函数模型解决的问题,并建立合适的函数模型.

小结·评价

一、内容整理

变量
函数
解析法
列表法
图象法
一次函数 $y=kx+b$ (k,b为常数,且 $k\neq 0$),
特例 $y=kx$ (k为常数,且 $k\neq 0$)

二、主要知识回顾

1. 在某一个变化过程中,有两个变量 x 和 y,对于 x 的每一个确定的值,y 都有唯一确定的值与之对应,我们称 x 为________,y 为________的函数.

2. 函数关系表示方法常用的有三种:________、________、________.

3. $y=kx+b$ (k, b 为常数,且 $k\neq 0$) 是一次函数,当 $b=0$ 时,$y=kx$ 是________函数.

(1) 当 $k>0$ 时,y 随 x 的增大而________;

(2) 当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而________.

三、自评与互评

1. 函数关系是指两个变量之间的一种对应关系. 你能举出几个构成函数关系的例子吗？你能从这些函数关系中获取一些信息吗？

2. 学习了 12.2 节中一次函数与一次方程、一次不等式的有关内容后，你有什么收获？

3. 利用函数图象求解二元一次方程组是否为解方程组的一种好方法？试比较它与代数解法的长处与不足.

A组 复习题

1. 求下列函数中自变量 x 的取值范围：

(1) $y=1-x$；　　(2) $y=2(x-1)^2$；

(3) $y=\dfrac{1}{x+1}$；　　(4) $y=\sqrt{x^2}$.

2. 李斌某天上午 9:00 骑自行车离开家，15:00 回到家. 他用图象描述了离家的路程 s 与时间 t 的变化关系（如图所示）.

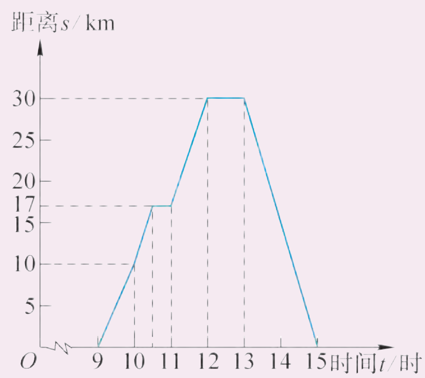
(1) 10:00 和 13:00 时，他分别离家多远？

(2) 他何时到达离家最远的地方？离家多远？

(3) 11:00 到 12:00 他行驶了多少千米？

(4) 他可能在哪段时间内休息，并吃午餐？

(5) 他由离家最远的地方返回到家过程中的平均速度是多少？



（第 2 题）

3. 已知一次函数 $y=(m-2)x+3-m$. 求 m 为何值时，下列各结论分别成立：

(1) y 随 x 的增大而减小；

(2) 函数的图象经过原点；

(3) 函数的图象不经过第三象限.

4. 有一个一次函数的图象,甲、乙两位同学分别说出了它的一些特点:

甲:y 随 x 的增大而减小;

乙:当 $x<2$ 时,$y>0$.

请你写出满足甲、乙两位同学要求的一个一次函数表达式.

5. 一列火车出 A 站行驶 3 km 到 B 处以后,以 90 km/h 的速度前进.

(1) 求离开 B 处 t h 后,火车离 A 站的路程 s km;

(2) 填写下列表格:

t/h	0	1	2	3			
s/km					363	543	723

(3) 画出 s 关于 t 的函数图象;

(4) 当火车行驶到离 A 站 633 km 时,火车行驶了多长时间?

6. 为了保护学生的视力,课桌椅的高度都是按一定的关系配套设计的. 研究表明:假设课桌的高度为y cm,椅子的高度(不含靠背)为 x cm,则 y 应是 x 的一次函数. 下表列出两套符合条件的课桌椅的高度:

	第一套	第二套
椅子高度 x/cm	40.0	37.0
课桌高度 y/cm	75.0	70.2

(第 6 题)

(1) 试确定 y 与 x 之间的函数表达式(不要求写出 x 的取值范围);

(2) 现有一把高 42.0 cm 的椅子和一张高 78.2 cm 的课桌,它们是否配套? 请通过计算说明理由.

7. 选择:

(1) 下列各点中,在直线 $y=2x-5$ 上的点是(　　).

(A) $(-2, 1)$　　(B) $(2, -1)$　　(C) $(-1, 2)$　　(D) $(1, 2)$

(2) 点 $A(-5, y_1)$, $B(-2, y_2)$都在直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 上,则 y_1 与 y_2 之间的大小关系是(　　).

(A) $y_1=y_2$　　(B) $y_1>y_2$

(C) $y_1<y_2$　　(D) 不能确定

(3) 函数 $y=-x$ 的图象与函数 $y=2x-1$ 的图象的交点在(　　).

(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

(4) 一段导线,在 0℃时电阻为 2 Ω,温度每增加 1℃电阻增加 0.008 Ω,那么该导线的电阻 R 表示为温度 t 的函数表达式为(　　).

(A) $R=0.008t$　　(B) $R=2+0.008t$

(C) $R=2.008t$　　(D) $R=2t+0.008$

8. 已知函数 $y=-2x+3$,结合图象:

(1) 求不等式 $-2x+3>0$ 和不等式 $-2x+3\leqslant -2$ 的解集;

(2) 当 $x\geqslant 1$ 时,求 y 的取值范围.

9. 填空:

(1) 直线 $y=-2x+6$ 与 x 轴交点的横坐标是________,与 y 轴交点的纵坐标是________;

(2) 函数 $y=2x+4$,如果 $-2\leqslant y\leqslant 2$,那么 x 的相应范围是________;

(3) 已知直线 $y=ax+7$ 与直线 $y=-2x+1$ 相交于 x 轴上一点,则 $a=$________.

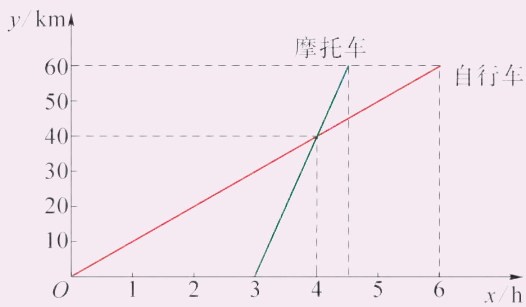
10. 直线 $y_1=-x+1$ 与直线 $y_2=2x-2$ 交于点 P,它们与 y 轴分别交于点 A,B.

(1) 画出图象;

(2) 求 x 为何值时,$y_1>y_2$,$y_1=y_2$,$y_1<y_2$?

(3) 求△ABP 的面积.

11. 如图,甲骑自行车与乙骑摩托车沿相同路线由 A 地到 B 地行驶,两地之间的距离是 60 km,请根据图象回答:



(第 11 题)

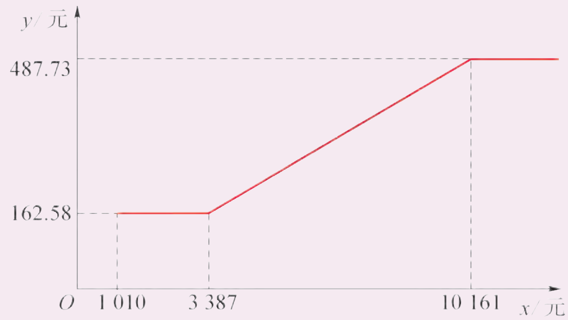
(1) 乙骑摩托车的速度是多少?

(2) 甲骑自行车的速度是多少?

(3) 两人相遇的时候,距 B 地还有多远?

(4) 乙比甲晚多少时间出发,又早到多少时间?

12. 某中学数学课外活动小组从网上获取该市企业职工养老保险金个人月缴费 y 元随个人月工资 x 元变化的图象,如图所示. 请你根据图象解答下面的问题:



（第 12 题）

（1）张总工程师 10 月份工资是 12 000 元，这月他个人应缴养老保险金多少元？

（2）小刘 10 月份工资为 3 000 元，这月他个人应缴养老保险金多少元？

（3）李师傅 10 月份个人缴养老保险金 240 元，他 10 月份的工资是多少元（写出解答过程，函数表达式中未知项系数精确到 0.001）？

B组 复习题

1. 在同一平面直角坐标系中画出直线 $3x-y-2=0$ 和直线 $2x-y+3=0$ 的图象. 利用图象求：

（1）方程 $3x-2=2x+3$ 的解；

（2）方程组 $\begin{cases}3x-y-2=0,\\2x-y+3=0\end{cases}$ 的解；

（3）不等式 $3x-2>2x+3$ 的解集.

2. 已知直线：$x-2y=-k+6$ 和 $x+3y=4k+1$，如果它们的交点在第四象限内，求 k 的取值范围.

3. 两个一次函数表达式写成如下形式，l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$. 问当 k_1，k_2，b_1，b_2 有何关系时，直线 l_1 与 l_2 分别相交、平行、重合？

4. 在同一平面直角坐标系中分别画出下列每小题中的两条直线，观察它们的位置有怎样的关系？

（1）$y=x$，$y=-x$；

（2）$y=\frac{1}{2}x$，$y=-2x$.

5. 直线 l 通过点 $(-3, 2)$，且与直线 $y=x$ 垂直. 写出表示直线 l 的函数表达式.

6. 若某种产品在市场上的供给量 q_1（单位：万件）与价格 p（单位：万元）之间的关系为 $p-4q_1-5=0$，需求量 q_2（单位：万件）与价格 p（单位：万元）之间的关系为 $p+q_2-25=0$，试求达到市场的供需平衡点（即供给量和需求量相等的点）时的该产品的市场价格.

7. 一个车间有工人 20 名. 已知每个工人每天可制造甲种零件 6 个或乙种零件 5 个，每制造一个甲种零件可获利润 150 元，每制造一个乙种零件可获利润 260 元. 在这 20 人中，车间每天安排 x 名工人制造甲种零件，其余人去制造乙种零件.

（1）写出此车间每天所获利润 y 元与 x 人之间的函数表达式；

（2）如果要车间每天所获利润不低于 24 000 元，至少应派多少工人去制造乙种零件？

C组 复习题

1. 某养猪场欲买饲料喂猪，相关数据如下表：

饲料种类	饲料单价 元/kg	猪食量 kg/天	猪增重 kg/天
A	2.8	2.5	1.0
B	2.3	2.5	0.9

由市场行情得知，屠宰场收购生猪每千克单价在 10 ~ 15 元范围内.

（1）设收购生猪每千克单价为 x 元，分别列出喂 A，B 两种饲料的日利润 y 元的函数表达式；（日利润 = 日收益 − 日饲料成本）

（2）选用哪种饲料合算？

2. 潜水员在深海中潜水时所受的水压随着潜水深度的增加而增加. 现经过 5 次测量，得到观察值如下表：

水深 d/m	0	10	25	40	55	75
水压 p/Pa	0	0.9×10^5	2.2×10^5	3.5×10^5	4.9×10^5	6.6×10^5

(1) 在平面直角坐标系内，描出各组有序数对(d, p)所对应的点；

(2) 水压 p 与水深 d 间的关系，可用哪种函数关系去模拟？

(3) 如果一名潜水员所能承受的最大水压为7.8×10^{5} Pa，试问他能否在水下 90 m 处作业？

3. 已知部分鞋子的型号“码”数与鞋子长度“cm”之间存在一种换算关系如下：

型号/码	20	36	42
长度/cm	15	23	26

（第 3 题）

(1) 通过画图、观察，猜想这种换算规律可能用哪种函数关系去模拟？

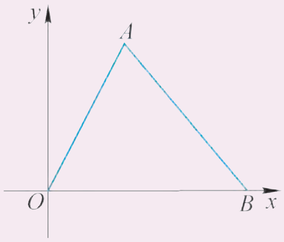
(2) 设鞋子的“码”数为 x，长度为 y cm，试写出 y 与 x 之间的函数表达式；

(3) 小明量了一下自己所穿鞋长是 24.5 cm，那么他穿多大码的鞋？

4. 观察函数图象，并根据你所获得的信息回答问题：

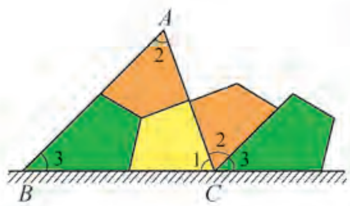
(1) 折线 OAB 表示某个实际问题的函数图象，请你给它配上一个合适的情境；

(2) 求出图象所表示的函数表达式，分别指出 x 轴、y 轴所表示的意义，并注明自变量 x 的取值范围.



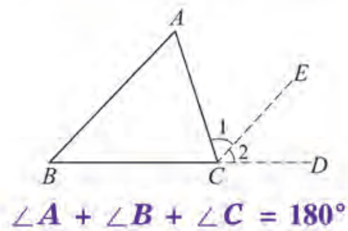
（第 4 题）

第13章 三角形中的边角关系、命题与证明



13.1 三角形中的边角关系

13.2 命题与证明



三角形是由线段围成的最简单的平面封闭图形，是研究其他多边形的基础.

本章将学习三角形中边、角关系及命题、证明的有关知识.

13.1 三角形中的边角关系

1. 三角形中边的关系

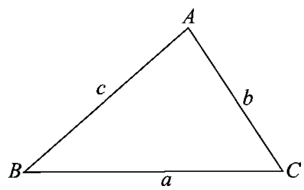


图 13-1

像图 13－1 那样，由不在同一条直线上的三条线段首尾依次相接所组成的封闭图形叫做三角形. 点 A，B，C 叫做这个三角形的顶点；线段 AB，BC，CA 叫做这个三角形的边；$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 叫做这个三角形的内角，简称三角形的角.

我们把这个三角形记作"$\triangle ABC$"，读作"三角形 ABC".

三角形的三边有时用它所对角的相应小写字母表示：如边 BC 对着 $\angle A$，记作 a；边 CA 记作 b；边 AB 记作 c.

三角形中，三条边互不相等的三角形叫做不等边三角形(scalene triangle)，有两条边相等的三角形叫做**等腰三角形**(isosceles triangle)、三条边都相等的三角形叫做**等边三角形**，又叫做正三角形(equilateral triangle)，如图 13－2.

等腰三角形中，相等的两边叫做腰，第三边叫做底边. 两腰的夹角叫做顶角，腰与底边的夹角叫做底角.

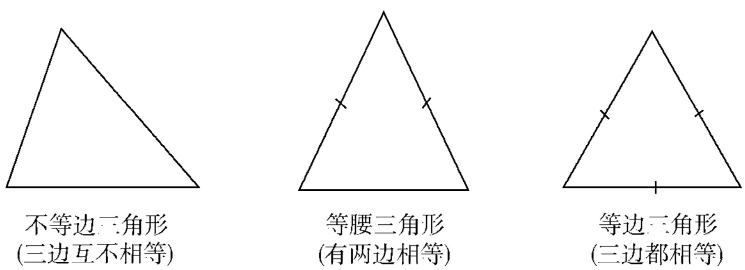
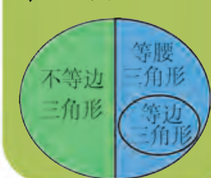


图 13-2

三角形按边长关系，可分为：

三角形
- 不等边三角形
- 等腰三角形(等边三角形是等腰三角形的特例)

三角形按边长分类，也可表示为：



思考

在一个三角形中，任意两边之和与第三边的大小关系如何？你判断的根据是什么？

观察图13－1中的三角形，尽管它的三边长不完全一样，如果把它的任意两个顶点，例如B，C看作定点，则由“两点之间的所有连线中，线段最短”，可以得到

$$AB+AC>BC.$$

同理，得

$$AC+BC>AB,\ AB+BC>AC.$$

总结以上，得

三角形中任何两边的和大于第三边.

根据不等式性质，不难得到

三角形中任何两边的差小于第三边.

例1　等腰三角形中，周长为18 cm.

(1) 如果腰长是底边长的2倍，求各边长；

(2) 如果一边长为4 cm，求另两边长.

解　(1) 设等腰三角形的底边长为x cm，则腰长为$2x$ cm. 根据题意，得

$$x+2x+2x=18.$$

解方程，得

$$x=3.6.$$

所以三角形的三边长为3.6 cm，7.2 cm，7.2 cm.

(2) 若底边长为4 cm，设腰长为x cm. 根据题意，得

$$2x+4=18.$$

解方程，得

$$x=7.$$

若腰长为 4 cm,设底边长为 x cm. 根据题意,得

$$2\times 4+x=18.$$

解方程,得

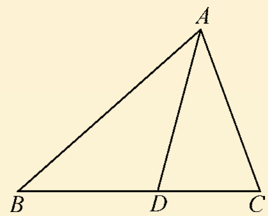
$$x=10.$$

由于 $4+4<10$, 可知以 4 cm 为腰长不能构成周长为 18 cm 的等腰三角形.

所以,三角形的另两边长都是 7 cm.

练习

1. 如图,D 是 $\triangle ABC$ 中 BC 边上一点,连接 AD,图中有几个三角形? 它们分别是____________________.



(第 1 题)

2. 判断:用下列长度的三条线段能否组成一个三角形?

(1) 1 cm, 2 cm, 3 cm; (2) 2 cm, 3 cm, 4 cm;

(3) 4 cm, 5 cm, 6 cm; (4) 5 cm, 6 cm, 10 cm.

3. 以长 4 cm 的线段为底构造一个等腰三角形,这个三角形的腰长有什么限制?

2. 三角形中角的关系

三角形中,三个角都是锐角的三角形叫做**锐角三角形**(acute triangle)、有一个角是直角的三角形叫做**直角三角形**(right triangle)、有一个角是钝角的三角形叫做**钝角三角形**(obtuse triangle),如图 13-3.

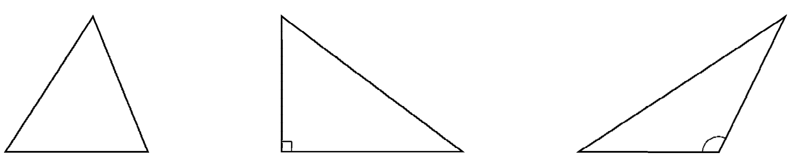
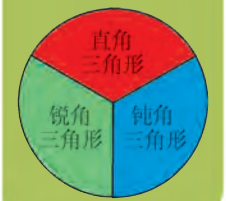


图 13-3

三角形按角的大小分类，也可表示为：



直角三角形中夹直角的两边叫做直角边，直角相对的边叫做斜边，直角三角形 ABC 可以写成“Rt△ABC”.

三角形按角的大小，可分为：

- 三角形
  - 直角三角形
  - 斜三角形
    - 锐角三角形
    - 钝角三角形

在一个三角形中，三个内角之间有什么关系？

在小学，我们曾用折叠（图 13－4）、剪拼（图 13－5）或用量角器度量的方法研究过这个问题. 你还记得有什么结论吗？

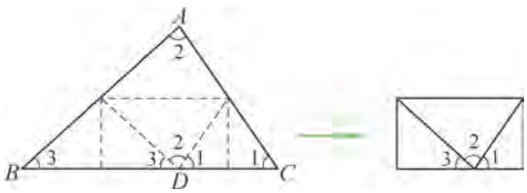


图 13-4

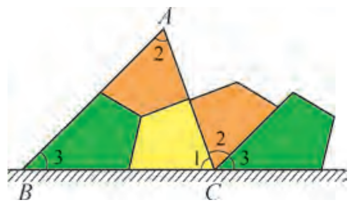


图 13-5

三角形的内角和等于 180°.

本结论将在 13.2 节中给出严格证明.

例 2 已知：如图 13－6，△ABC 中，$BD \perp AC$，垂足为 D. $\angle ABD = 54°$，$\angle DBC = 18°$.

求 $\angle A$ 和 $\angle C$ 的度数.

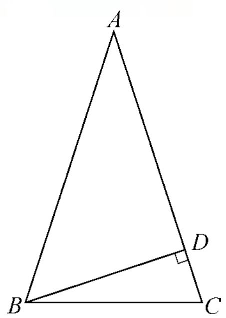


图 13-6

解 因为 $BD \perp AC$，（已知）

所以 $\angle ADB = \angle CDB = 90°$.

在 △ABD 中，

$\angle A + \angle ABD + \angle ADB = 180°$，（三角形的内角和等于 180°）

$\angle ABD = 54°$，$\angle ADB = 90°$，（已知）

$\angle A = 180° - \angle ABD - \angle ADB$

$= 180° - 54° - 90° = 36°$.

在 △ABC 中，

$\angle C = 180° - \angle A - (\angle ABD + \angle DBC)$

$= 180° - 36° - (54° + 18°) = 72°$.

练习

1. 在$\triangle ABC$中：

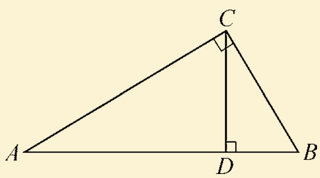
   (1) 已知：$\angle A = 105^\circ$，$\angle B - \angle C = 15^\circ$，则$\angle C =$ ________；

   (2) 已知：$\angle A : \angle B : \angle C = 3:4:5$，则$\angle C =$ ________.

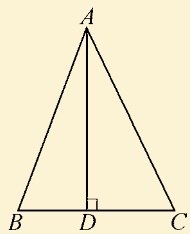
2. 已知：如图，$\angle ACB = 90^\circ$，$CD \perp AB$，垂足是D.

   (1) 写出图中所有相等的角；

   (2) 写出图中所有直角三角形，并指出它们的斜边.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$AD \perp BC$，垂足是D，$\angle B = 70^\circ$，$\angle BAC = 46^\circ$. 求$\angle CAD$的度数.

4. 在一个三角形中，最多只可能有一个直角或钝角，为什么？

3. 三角形中几条重要线段

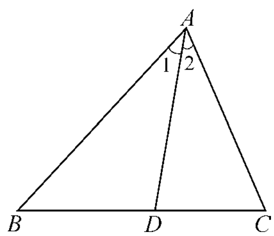


图 13-7

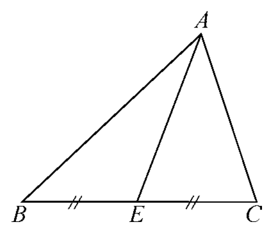


图 13-8

三角形中，三条边、三个角是它的基本元素. 此外，三角形还有如下一些重要元素.

角平分线(angular bisector)　三角形中，一个角的平分线与这个角对边相交，顶点与交点之间的线段叫做三角形的角平分线. 如图 13-7，$\triangle ABC$中，$\angle 1 = \angle 2$，线段AD就是$\triangle ABC$的一条角平分线.

中线(median)　三角形中，连接一个顶点与它对边中点的线段叫做三角形的中线. 如图 13-8，$\triangle ABC$中，点E是BC的中点，线段AE就是$\triangle ABC$的一条中线.

高线(altitude)　从三角形的一个顶点到它对边所在直线的垂线段叫做三角形的高线，也叫做三角形的**高**.

操作

锐角三角形、直角三角形、钝角三角形中的三条高所在直线的交点各在什么地方？

1. 分别画出图 13－9 中各个三角形三条边上的高.

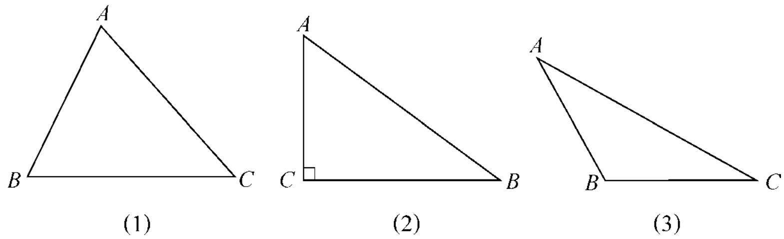


图 13－9

2. 任意画一个三角形，画出三边上的中线. 再任意画一个三角形，画出三角形三个角的平分线.

3. 一个三角形中共有几条角平分线，它们是否交于一点？同样，各有几条中线、几条高，它们是否各交于一点？

上面操作中，三角形三条中线交于一点，这个交点就是**三角形的重心**.

本节中说明三角形、三角形角平分线意义的语句："不在同一条直线上的三条线段首尾依次相接所组成的封闭图形叫做三角形""三角形中，一个角的平分线与这个角对边相交，顶点与交点之间的线段叫做三角形的角平分线"，分别是三角形、三角形角平分线的定义. 七年级我们已经学过许多定义，如"整数和分数统称有理数"是有理数的定义. 前两个定义揭示了对象的特征性质，后一个定义明确所指对象的范围. 像这样能明确界定某个对象含义的语句叫做**定义**. 今后我们还会学习许多定义.

练习

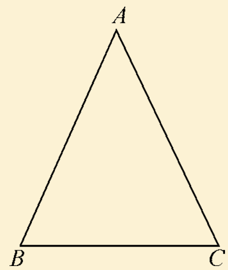
1. 填空：

(1) 如果 AD 是 $\triangle ABC$ 的高，那么 $\angle BDA =$ ________；

(2) 如果 BE 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，那么 $\angle ABE = \angle$ ______ $= \frac{1}{2}\angle$ ________；

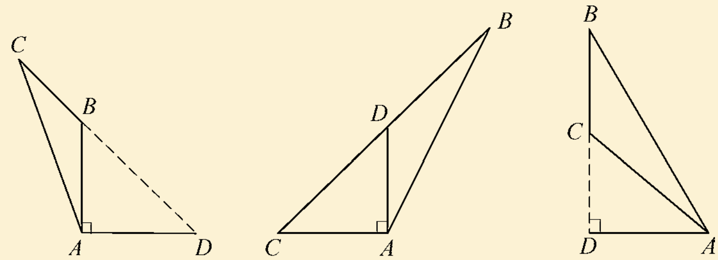
(3) 如果 CM 是 $\triangle ABC$ 的中线，那么 $\triangle ACM$ 的面积 ________ $\triangle BCM$ 的面积（填“<”“>”或“=”）.

2. 如图，$\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，画出底边 BC 上的中线、高和顶角 $\angle A$ 的平分线，你发现这三条线段有什么关系？



（第 2 题）

3. 判断下列各图中，AD 是不是 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高？如果不是，请你画出 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高.



(1) (2) (3)

（第 3 题）

4. 列举本章学过的定义.

习题 13.1

1. 填空：

(1) 已知：等腰三角形的一条边长为 3 cm，另一条边长为 5 cm，则它的周长是 ________ cm；

(2) 已知：等腰三角形的一条边长为 2 cm，另一条边长为 5 cm，则它的周长是 ________ cm.

2. $\triangle ABC$ 满足下列条件时,它是锐角三角形、直角三角形还是钝角三角形?

(1) $\angle A=\angle B=\angle C$;

(2) $\angle A+\angle B=\angle C$;

(3) $\angle A=\angle B=30°$;

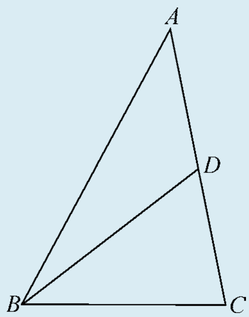
(4) $\angle A=\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{3}\angle C$.

3. 填空:

(1) 已知:$\triangle ABC$ 中, $\angle B+\angle C=2\angle A$, $\angle B:\angle A=5:3$,则 $\angle A=$______, $\angle C=$______;

(2) $\triangle ABC$ 中, $\angle B=\angle C=2\angle A$, 则$\angle C=$______.

4. 已知:如图,BD 是$\triangle ABC$ 的中线. $AB=5\text{ cm}$, $BC=3\text{ cm}$, 那么$\triangle ABD$ 与$\triangle CBD$ 的周长的差是多少?



(第 4 题)

5. 在$\triangle ABC$ 中,$\angle A$ 比$\angle B$ 大 $10°$,$\angle C$ 比$\angle A$ 大 $10°$. 求$\triangle ABC$ 中各角的度数.

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 的平分线交 BC 于点 D, $\angle B=65°$, $\angle C=50°$. 求$\angle ADB$ 的度数.

7. 已知:$\triangle ABC$ 中, $AB=5$, $BC=2a+1$, $AC=12$. 求 a 的范围.

13.2 命题与证明

前面,已经学习了一些几何图形的性质. 在认识这些性质时,使用了观察、操作和实验等方法,并对它们作出一些说理与解释.

研究几何图形,如果仅限于观察、操作和实验等方法,难以使人确信结果的正确性,比如上一节研究三角形性质时,通过折叠、剪拼或度量得到三角形三个内角的和是 180°(图 13-10 是剪拼).

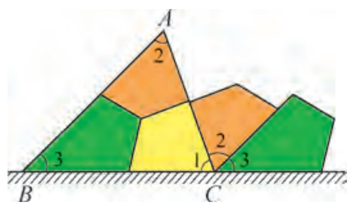


图 13-10

对于上面的结果,如果有同学提出以下疑问:

(1) 在剪拼时,发现三个内角难以拼成一个平角,只是接近 180°的某个值;

(2) 度量三个角,然后相加,有的接近 179°,有的接近 181°,不是很准确地都得 180°.

如何回答上面的问题呢?

学习几何需要观察和实验,同时也需要学会推理. 从这一章起我们将系统学习用逻辑推理方法对几何中的结论进行论证.

推理是一种思维活动. 人们在思维活动中,常要对事物的情况作出种种判断. 判断是通过语言来表达的,例如:

(1) 北京是中华人民共和国的首都;

(2) 如果∠1 与∠2 是对顶角,那么∠1 = ∠2;

(3) $1+1<2$;

(4) 如果一个整数的各位上的数字之和是 3 的倍数,那么这个数能被 3 整除.

从上面各语句中可以看出,人们对于客观事物情况的判断可能是正确的,也可能是错误的. 上述语句(1)(2)(4)是

正确的判断,(3)是错误的判断.

像这样,对某一事件作出正确或不正确判断的语句(或式子)叫做**命题**(proposition). 上面判断性语句(1)(2)(4)都是正确的命题,我们称之为**真命题**(true proposition);(3)是错误的命题,我们称之为**假命题**(false proposition).

如果一个语句没有对某一事件的正确与否作出任何判断,那么它就不是命题. 例如:

(1) 你的作业做完了吗?

(2) 欢迎前来参观!

(3) 以点 O 为圆心、3 cm 长为半径画弧.

数学命题通常由题设和结论两部分组成,命题常写成"如果……那么……"的形式.

以"如果……那么……"为关联词的命题的一般形式是"如果 p,那么 q",或者说成"若 p,则 q",其中 p 是这个命题的**条件**(或题设),q 是这个命题的**结论**(或题断). 有时为了叙述简便,也可以省略关联词"如果""那么". 如命题"如果两个角是对顶角,那么这两个角相等"可以写成"对顶角相等".

将命题"如果 p,那么 q"中的条件与结论互换,便得到一个新命题"如果 q,那么 p",我们把这样的两个命题称为互逆命题,其中一个叫做**原命题**,另一个就叫做原命题的**逆命题**.

当一个命题是真命题时,它的逆命题不一定是真命题. 例如"如果 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是对顶角,那么 $\angle 1=\angle 2$"是真命题,但它的逆命题"如果 $\angle 1=\angle 2$,那么 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是对顶角"却是假命题. 怎样说明这个命题是假的呢? 只要举出一个例子即可. 如图 13-11,画出一个角的平分线后,可得 $\angle 1=\angle 2$,显然,这里 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 不是对顶角.

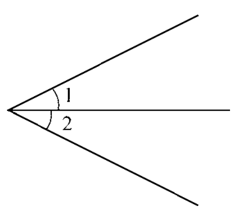


图 13-11

像这种符合命题条件,但不满足命题结论的例子,我们称之为**反例**(counter example). 要说明一个命题是假命题,只要举出一个反例即可.

例 1 指出下列命题的条件与结论：

（1）两条直线都平行于同一条直线，这两条直线平行；

（2）如果 $\angle A = \angle B$，那么 $\angle A$ 的补角与 $\angle B$ 的补角相等.

解 （1）“两条直线都平行于同一条直线”是条件，“两条直线平行”是结论.

（2）“$\angle A = \angle B$”是条件，“$\angle A$ 的补角与 $\angle B$ 的补角相等”是结论.

例 2 写出下列命题的逆命题，并判断所得逆命题的真假，如果是假命题，请举一个反例：

（1）内错角相等，两直线平行；

（2）如果 $a=0$，那么 $ab=0$.

解 （1）逆命题是“两直线平行，内错角相等”，是真命题.

（2）逆命题是“如果 $ab=0$，那么 $a=0$”，是假命题.

反例，当 $a=1$，$b=0$ 时，$ab=0$.

练习

1. 把下列命题改写成“如果 p，那么 q”的形式：

（1）两条直线相交，只有一个交点；

（2）直线 $AB\perp$ 直线 CD，交点为 O，有 $\angle AOC=90°$；

（3）两直线平行，同位角相等；

（4）等角的补角相等.

2. 判断下列命题是真命题还是假命题，如果是假命题，请举一个反例：

（1）若 $|a|=|b|$，则 $a=b$；

（2）如果 $ab>0$，那么 a，b 都是正数；

（3）两条平行线被第三条直线所截，同旁内角互补；

（4）两条直线与第三条直线相交，同位角相等.

3. 写出下列命题的逆命题，并判断它们的真假：

（1）如果 $a=b$，那么 $a^2=b^2$；

（2）同位角相等，两直线平行.

论证几何，源于希腊数学家欧几里得的《原本》，这部著作可以说是数学史上第一座理论丰碑，它确立了数学中公理化的演绎范式. 这种范式要求学科中每个真命题必须是在它之前已建立的一些命题的逻辑结论，而所有推理的原始共同出发点是一些基本的定义和基本事实.

有些命题，如“对顶角相等”“同角的补角相等”等，是从基本事实或其他真命题出发，用推理方法判断为正确的，并被选作判断命题真假的依据. 这样的真命题叫做**定理**(theorem).

从已知条件出发，依据定义、基本事实、已证定理，并按照逻辑规则，推导出结论，这一方法称为**演绎推理**(或演绎法). 演绎推理的过程，就是演绎证明，简称证明(proof).

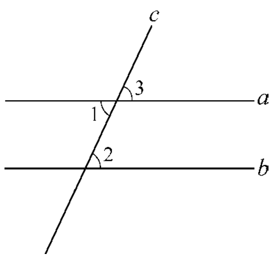


图 13-12

下面，通过证明“内错角相等，两直线平行”等几个例题来说明证明的具体步骤.

例 3 已知：如图 13-12，直线 c 与直线 a, b 相交，且 $\angle 1 = \angle 2$.

求证：$a \parallel b$.

证明 $\because$ $\angle 1 = \angle 2$,(已知)

又 $\because$ $\angle 1 = \angle 3$,(对顶角相等)

$\therefore$ $\angle 2 = \angle 3$.(等量代换)

$\therefore$ $a \parallel b$.(同位角相等，两直线平行)

符号“$\because$”读作“因为”，符号“$\therefore$”读作“所以”.

练习

在下列各题的括号内，填上推理的依据：

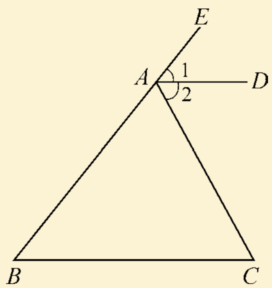
1. 已知：如图，点 B, A, E 在一条直线上，$\angle 1 = \angle B$.

   求证：$\angle C = \angle 2$.

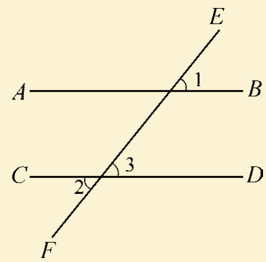
证明 ∵ $\angle 1=\angle B$,(　　　　　　)

∴ $AD\parallel BC$.(　　　　　　)

∴ $\angle C=\angle 2$.(　　　　　　)



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 已知：如图，$\angle 1=\angle 2$.

求证：$AB\parallel CD$.

证明 ∵ $\angle 1=\angle 2$,(　　　　　　)

又 ∵ $\angle 2=\angle 3$,(　　　　　　)

∴ $\angle 1=\angle 3$.(　　　　　　)

∴ $AB\parallel CD$.(　　　　　　)

例 4 已知：如图 13－13，$\angle AOB+\angle BOC=180°$，$OE$ 平分 $\angle AOB$，OF 平分 $\angle BOC$.

求证：$OE\perp OF$.

分析：要证明 $OE\perp OF$，只要计算出 $\angle 1+\angle 2=90°$ 就可以了.

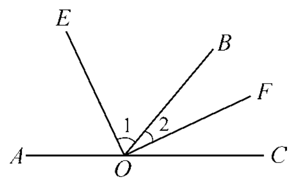


图 13－13

证明 ∵ OE 平分 $\angle AOB$，OF 平分 $\angle BOC$,(已知)

∴ $\angle 1=\frac{1}{2}\angle AOB$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle BOC$.(角平分线的定义)

又 ∵ $\angle AOB+\angle BOC=180°$,(已知)

∴ $\angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}(\angle AOB+\angle BOC)$

$=90°$.(等式性质)

∴ $OE\perp OF$.(垂直的定义)

练习

补充完成下列两题的证明,并填上推理的依据.

1. 已知:如图,$AB \parallel DC$,$AD \parallel BC$.

   求证:$\angle A = \angle C$.

   证明 $\because$ $AB \parallel DC$,(　　　　　　)

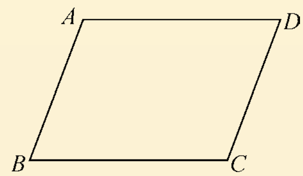
   $\therefore$ $\angle A + \angle D = 180°$.(　　　　　　　　　　)

   $\because$ $AD \parallel BC$,(　　　　　　)

   $\therefore$ $\angle C + \angle D = 180°$.(　　　　　　　)

   $\therefore$ $\angle A + \angle D = \angle C + \angle D$.(　　　　　　)

   $\therefore$ $\angle A = \angle C$.(　　　　　　)



(第 1 题)

2. 已知:如图,$DC \parallel AB$,DF 平分 $\angle CDB$,BE 平分 $\angle ABD$.

   求证:$\angle 1 = \angle 2$.

   证明 $\because$ $DC \parallel AB$,(　　　　　　)

   $\therefore$ $\angle ABD = \angle CDB$.(　　　　　　)

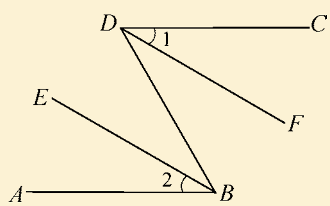
   又 $\because$ DF 平分 $\angle CDB$,(　　　　　　)

   BE 平分 $\angle ABD$,(　　　　　　)

   $\therefore$ $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle$ ________,(　　　　　　)

   $\angle 2 = \frac{1}{2}\angle$ ________.(　　　　　　)

   $\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$.(　　　　　　)



(第 2 题)

有些几何题目,已经画好了图形,写出了已知、求证,这时只要写出证明过程.

在证明命题时,要分清命题的条件和结论,如果问题与图形有关,首先,根据条件画出图形,并在图形上标出有关字母与符号;再结合图形,写出已知、求证;然后,分析因果关系,找出证明途径;最后有条理地写出证明过程.

下面,就来证明**三角形内角和定理:**

三角形的内角和等于 180°.

已知:$\triangle ABC$,如图 13-14.

求证:$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

分析：以前我们通过剪拼将三角形的三个内角拼成了一个平角，这不是证明，但它却给我们以启发．现在我们通过作图来实现这种转化，给出证明．

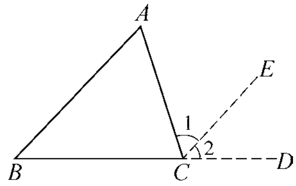


图　13－14

证明　如图 13－14，延长 BC 到 D，以点 C 为顶点、CD 为一边作 $\angle 2 = \angle B$，

则　$CE \parallel BA$．（同位角相等，两直线平行）

$\therefore$　$\angle A = \angle 1$．（两直线平行，内错角相等）

$\because$　B，C，D 在同一条直线上，（所作）

$\therefore$　$\angle 1 + \angle 2 + \angle ACB = 180°$，

$\therefore$　$\angle A + \angle B + \angle ACB$

$= \angle 1 + \angle 2 + \angle ACB$

$= 180°$．

在上面的证明过程中，为了证明的需要，在原来图形上添画的线（如 CD，CE）叫做**辅助线**．

辅助线通常画成虚线．

如果三角形中一个角是 90°，根据三角形内角和定理，另两个角的和应为 90°，于是得

推论 1　直角三角形的两锐角互余．

像这样，由基本事实、定理直接得出的真命题叫做**推论**（inference）．

根据三角形内角和定理，还可以得到

推论 2　有两个角互余的三角形是直角三角形．

练习

1．补充完成下列证明，并填上推理的依据：

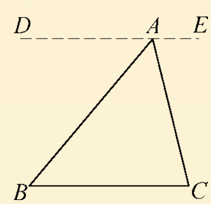
已知：如图，$\triangle ABC$．

求证：$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$．

证明　过点 A 作 $DE \parallel BC$，

则　$\angle DAB =$ ________，（　　　　　　）

$\angle EAC =$ ________．（　　　　　　）



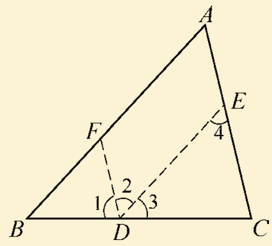
（第 1 题）

∵ $\angle DAB+\angle BAC+\angle EAC=$ ________,（所作）

∴ $\angle B+\angle BAC+\angle C=$ ____ + ____ + ____（　　　）

$=180°$.（　　　　　）

2. 补充完成下列证明：



（第 2 题）

已知：如图，$\triangle ABC$.

求证：$\angle A+\angle B+\angle C=180°$.

证明 D 是 BC 边上一点，过点 D 作 $DE\parallel AB$，$DF\parallel AC$，分别交 AC，AB 于点 E，F.

∵ $DE\parallel AB$，（所作）

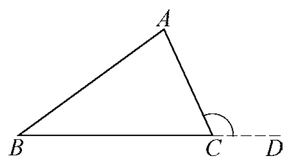


图　13－15

在上面证明三角形内角和定理时，曾经如图 13－15 那样把$\triangle ABC$ 的一边 BC 延长至点 D，得到$\angle ACD$. 像这样由三角形的一边与另一边的延长线组成的角，叫做三角形的**外角**（exterior angle）.

交流

在图 13－15 中，$\triangle ABC$ 的外角$\angle ACD$ 与它不相邻的内角$\angle A$，$\angle B$ 有怎样的关系？尝试给出证明，并与同学交流.

推论 3　三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和.

推论 4　三角形的外角大于与它不相邻的任何一个内角.

例 5　已知：如图 13－16，$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$ 是 $\triangle ABC$ 的三个外角.

求证：$\angle 1+\angle 2+\angle 3=360°$.

证明　∵　$\angle 1=\angle ABC+\angle ACB$,

$\angle 2=\angle BAC+\angle ACB$,

$\angle 3=\angle BAC+\angle ABC$,

（三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和）

∴　$\angle 1+\angle 2+\angle 3=2(\angle ABC+\angle ACB+\angle BAC)$.（等式性质）

∵　$\angle ABC+\angle ACB+\angle BAC=180°$,（三角形内角和定理）

∴　$\angle 1+\angle 2+\angle 3=360°$.

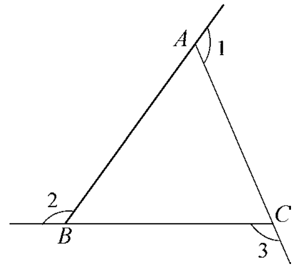


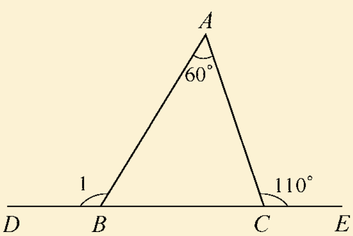
图　13－16

练习

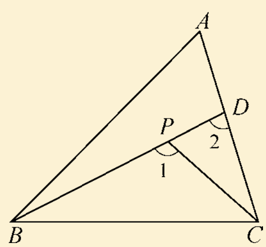
1. 填空：

（1）如图，$\angle ABC=$________，$\angle 1=$________；

（2）在直角三角形中，与直角相邻的外角的度数是________.



［第 1（1）题］



（第 2 题）

2. 如图，P 是 $\triangle ABC$ 内任一点，连接 BP 并延长交 AC 于点 D，连接 CP，用不等号“$>$”或“$<$”表示 $\angle A$，$\angle 1$，$\angle 2$ 的大小关系，并说明理由.

习题 13.2

1. 指出下列命题的条件与结论：

(1) 两条平行线被第三条直线所截，内错角相等；

(2) 直角三角形的两个锐角互余；

(3) 两条直线相交，只有一个交点；

(4) 两条直线都垂直于同一条直线，这两条直线平行.

2. 判断下列命题是真命题还是假命题. 如果是假命题，请举出一个反例：

(1) 不等式的两边都乘以同一个数，不等号的方向不变；

(2) 互为补角的两个角的平分线互相垂直；

(3) 平行于同一条直线的两条直线平行；

(4) 若 $a > b$，则$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

3. 写出下列命题的逆命题，并判断所得逆命题的真假：

(1) 如果两个数互为相反数，那么它们的和为零；

(2) 两个角的和等于平角时，这两个角互为补角.

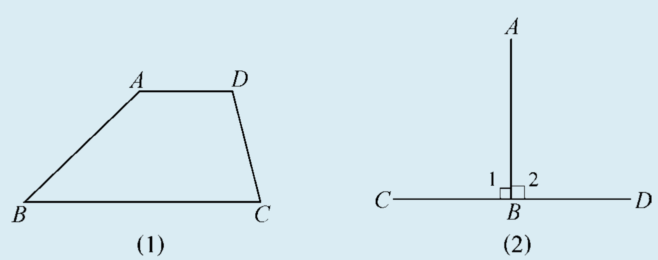
4. 要证明一个命题是假命题，一般用什么办法？你能举出例子吗？

5. 证明下列各题：

(1) 已知：如图(1)，$\angle A + \angle B = 180°$.

求证：$\angle C + \angle D = 180°$.

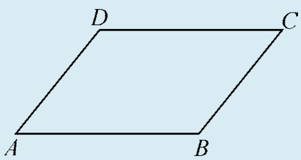
(2) 已知：如图(2)，$AB \perp CD$. 求证：$\angle 1 = \angle 2$.



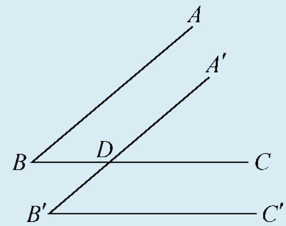
（第 5 题）

6. 已知：如图，$AB \parallel DC$，$\angle BAD = \angle BCD$.

求证：$AD \parallel BC$.

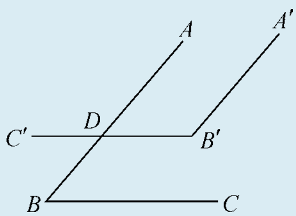


（第 6 题）

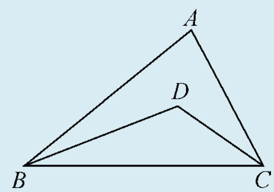


（第 7 题）

7. 已知：如图，$AB \parallel A'B'$，$BC \parallel B'C'$，BC 交 $A'B'$ 于点 D.
   求证：$\angle B = \angle B'$.
8. 已知：如图，$AB \parallel A'B'$，$BC \parallel B'C'$，$B'C'$ 交 AB 于点 D.
   求证：$\angle B + \angle B' = 180°$.



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 已知：如图，D 是 $\triangle ABC$ 内一点.
   求证：$\angle BDC > \angle A$.

信息技术应用

用《几何画板》验证三角形外角和

通过下面的操作，我们来了解用《几何画板》求三角形外角和的方法.

1. 打开《几何画板》，选择“多边形边工具”画一个三角形

(图 13－17)，选择“文字工具”，将此三角形的三个顶点分别记为 A，B，C(图 13－18)．

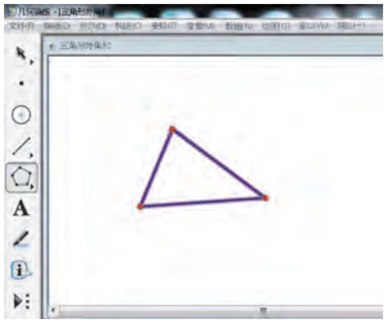


图 13－17

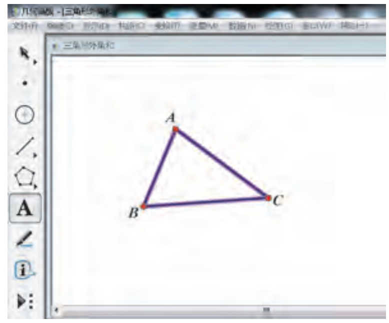


图 13－18

2. 依次选择点 A，B，在标题栏中点击“构造”，在下拉菜单中点击“射线”．同理，依次选择点 B，C 和点 C，A 作射线(图 13－19)．

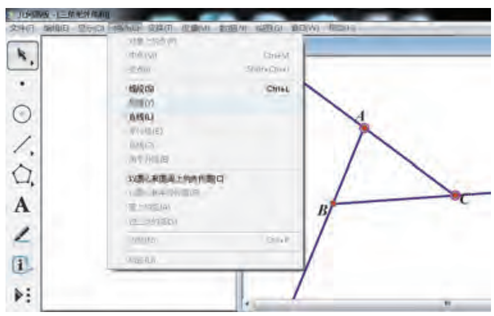


图 13－19

3. 选择“点工具”，分别在射线 AB，BC，CA 上取点 D，E，F(图 13－20)．

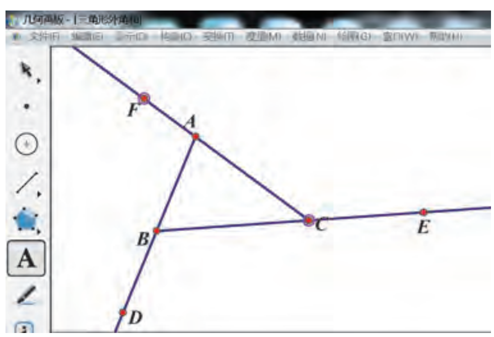


图 13－20

4. 依次选择点 F, A, B,在“度量”菜单下点击“角度”(图 13－21),得 $\angle FAB$ 的度数. 同法得到 $\angle DBC$, $\angle ECA$ 的度数(图 13－22).

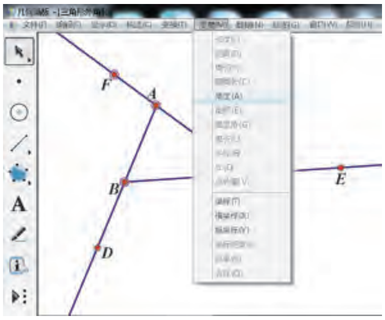


图　13－21

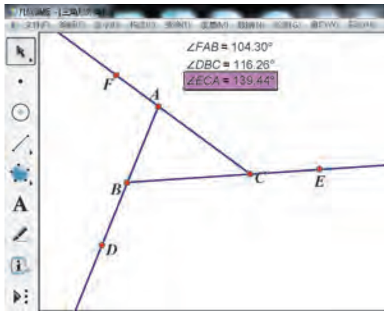


图　13－22

5. 从“数据”菜单中选择“计算”,在“新建计算”对话框中,从“数值”子菜单中选中第一个角,点“ ＋”号;选中第二个角,点“ ＋”号;选中第三个角(图 13－23).

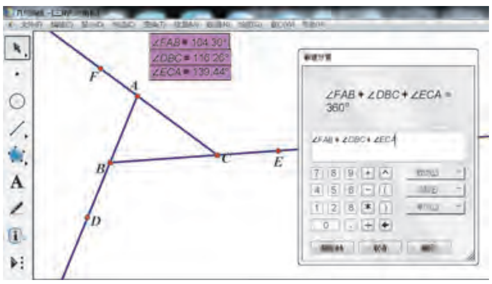


图　13－23

6. 在计数器的对话框中,点击“确定”得到△ABC 的外角和(图 13－24).

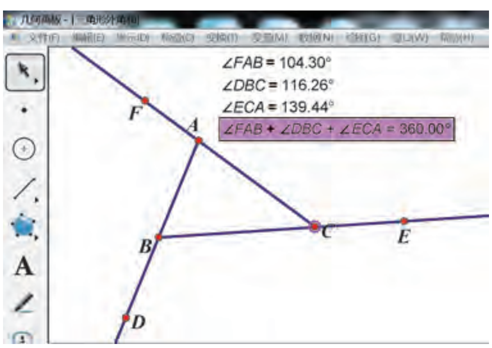


图　13－24

7. 选中△ABC 任一边拖动，观察△ABC 外角和的变化情况（图 13－25）.

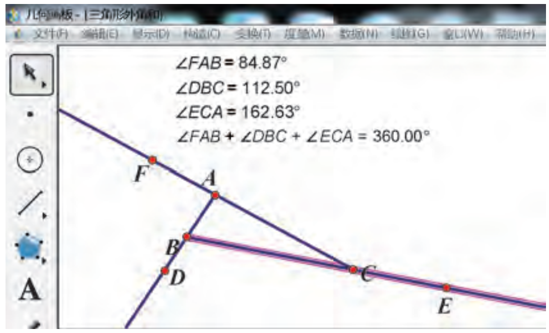
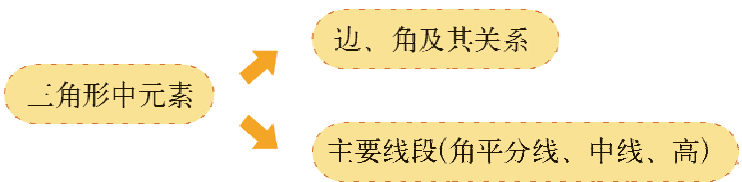
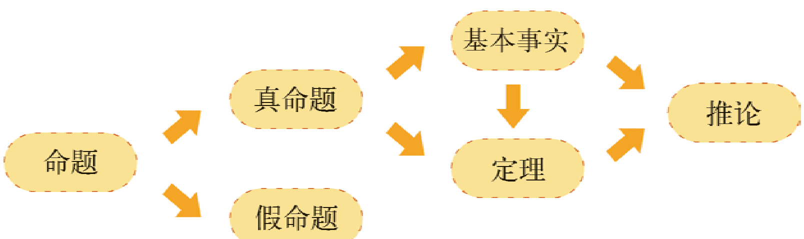


图 13－25

小结·评价

一、内容整理





二、主要知识回顾

1. 三角形中边角关系：

（1）三角形中，任一边______其余两边和，______其余两边差；

（2）三角形三内角和等于________.

2. 用自己的语言叙述命题、基本事实和定理的意义.

3. 命题有真假之分. 要说明一个命题是假命题,只要________________就可以了;而要说明一个命题是真命题,必须________________.

4. 用自己的语言说说证明的基本步骤.

5. 推理与论证是数学学习的重要内容,要学会有条理地思考与表达. 要逐步体会证明的必要性,理解证明的基本过程,掌握直接证明的格式. 请举例说明证明的必要性.

6. 由三角形内角和定理可以推出三角形外角与内角的关系:

(1) __________________________;

(2) __________________________.

三、自评与互评

1. 一个三角形的角平分线、中线和高各有几条? 它们的交点位置与三角形的形状有关系吗?

2. 基本事实与定理都是真命题,都可以作为证明其他命题的依据. 它们之间的区别是什么?

3. 一个命题是真命题,那么它的逆命题也一定是真命题吗? 举例说明.

如果一个定理的逆命题是真命题,那么这个逆命题就叫做原定理的逆定理. 整理一下你学过的定理,看看哪些存在逆定理,写成书面材料,在班里交流.

A组 复习题

1. 判断下列命题是真命题还是假命题:

(1) 三角形的三条高所在直线一定相交于三角形内. ( )

(2) 三角形三个内角中至少有两个是锐角. ( )

2. 写出下列命题的逆命题,并判断原命题和它的逆命题是真命题还是假命题.

(1) 对顶角相等;

(2) 一个数能被 4 整除,这个数也能被 2 整除.

3. 填空：

（1）有 4 条线段的长度分别是 3 cm，7 cm，9 cm 和 11 cm，选择其中能组成三角形的三条线段作三角形，共可作______个不同的三角形；

（2）三角形中，已知两边长为 4 cm 和 8 cm，还有一边与前面两边中的一边长相等，这个三角形周长是______cm；

（3）如果三角形的一个外角等于 140°，且 $\angle B = \angle C$，那么 $\angle A =$________.

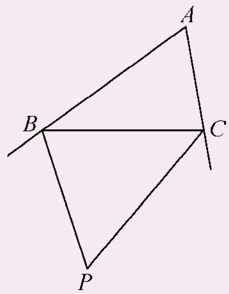
4. 已知三角形两边长分别为 4 和 5，第三边长为正整数. 求第三边长.

5. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle A = 64°$.

（1）若 $\triangle ABC$ 的两个外角平分线 BP，CP 交于点 P，求 $\angle P$ 的度数；

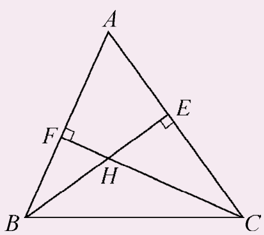
（2）如果 BP，CP 分别是 $\angle B$，$\angle C$ 两内角平分线，求 $\angle P$ 的度数；

（3）如果 BP，CP 中一个是内角平分线，另一个是外角平分线，求 $\angle P$ 的度数.

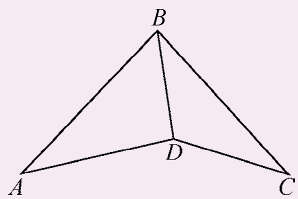


（第 5 题）

6. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC = 66°$，$\angle ACB = 54°$，BE，CF 是两边 AC，AB 上的高，它们交于点 H. 求 $\angle ABE$，$\angle ACF$ 和 $\angle BHC$ 的度数.



（第 6 题）

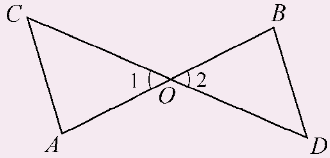


（第 7 题）

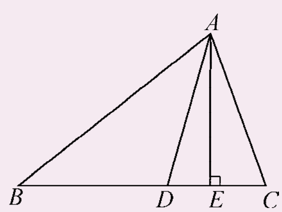
7. 已知：如图，$\angle A = 33°$，$\angle ABC = 83°$，$\angle C = 30°$. 求 $\angle ADC$ 的度数.

8. 已知：如图，AB 与 CD 相交于点 O，$\angle 1 = \angle C$，$\angle 2 = \angle D$.

求证：$AC \parallel DB$.



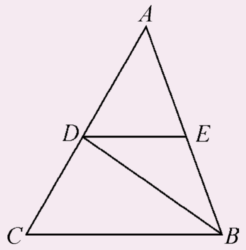
（第 8 题）



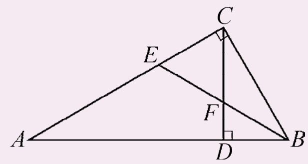
（第 9 题）

9. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，AD 平分 $\angle BAC$，$AE \perp BC$，垂足为 E. $\angle B = 38°$，$\angle C = 70°$. 求 $\angle DAE$ 的度数.

10. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，若$\angle A=50°$，$\angle C=60°$，BD平分$\angle ABC$，$DE // BC$，DE交AB于点E. 求$\angle BDE$与$\angle BDC$的度数.



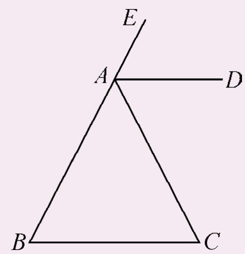
（第 10 题）



（第 11 题）

11. 已知：如图，$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，CD为AB边上的高，BE平分$\angle ABC$，且分别交CD，AC于点F，E.
求证：$\angle CFE=\angle CEF$.

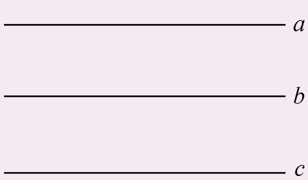
12. 已知：如图，$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle C$，AD平分外角$\angle EAC$.
求证：$AD // BC$.



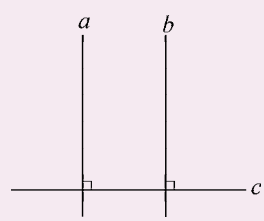
（第 12 题）

B组 复习题

1. 已知：如图，直线a，b，c在同一平面内，$a // c$，$b // c$.
求证：$a // b$.



（第 1 题）



（第 2 题）

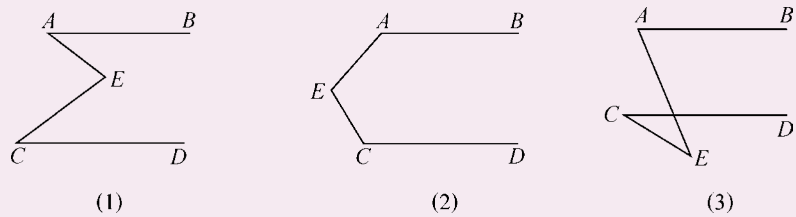
2. 已知：如图，直线a，b，c在同一平面内，$a \perp c$，$b \perp c$.
求证：$a // b$.

3. 已知：$AB \parallel CD$.

(1) 点 E 在 AB 与 CD 之间，如图(1)，问 $\angle A$，$\angle C$ 与 $\angle E$ 有什么关系？

(2) 点 E 在 AB 与 CD 之间，如图(2)，问 $\angle A$，$\angle C$ 与 $\angle E$ 又有什么关系？

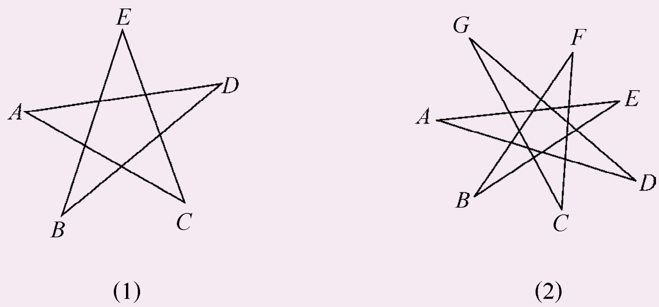
(3) 点 E 在 AB 与 CD 之外[图(3)]呢？



(第 3 题)

4. (1) 已知：图(1)是五角星形. 求 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E$ 的度数；

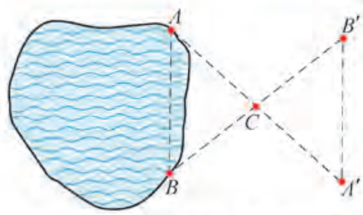
(2) 已知：图(2)是七角星形. 求 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G$ 的度数.



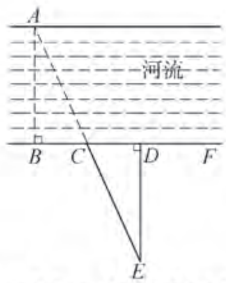
(第 4 题)

第14章

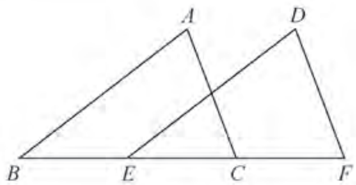
全等三角形



$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'(SAS)$



$\triangle ABC \cong \triangle EDC(ASA)$



$\triangle ABC \cong \triangle DEF(SSS)$

全等三角形的判定和性质是初中平面几何中的重要内容.

本章就来学习全等三角形判定定理及其应用.

14.1 全等三角形

如图 14－1，按同一底版印制的两枚邮票，它们的形状相同、大小一样.

(1)　　(2)

图　14－1

像图 14－2 那样，把 $\triangle ABC$ 叠到 $\triangle DEF$ 上，两个三角形能够完全重合，表明它们的形状和大小一样.

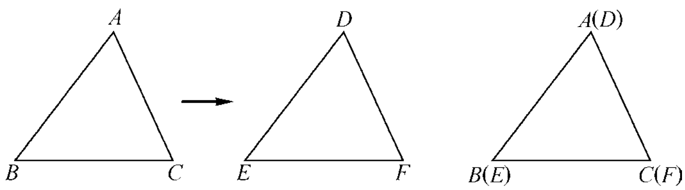


图　14－2

能够完全重合的两个图形，叫做**全等形**（congruent figures）.

全等三角形（congruent triangles）中互相重合的边叫做**对应边**（图 14－2）. 显然，**全等三角形的对应边相等**，即

$$AB = DE,\ BC = EF,\ CA = FD.$$

全等三角形中互相重合的角叫做**对应角**. 显然，**全等三角形的对应角相等**，即

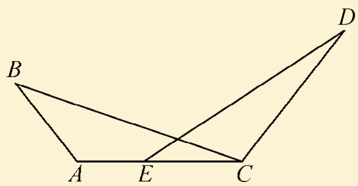
$$\angle A = \angle D,\ \angle B = \angle E,\ \angle C = \angle F.$$

全等三角形中互相重合的顶点叫做**对应顶点**，如点 A 和点 D，点 B 和点 E，点 C 和点 F.

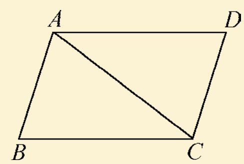
记两个三角形全等时，通常把表示对应顶点的字母写在对应的位置上，如 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等，记作 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$，读作“$\triangle ABC$ 全等于 $\triangle DEF$”.

练习

1. 已知：如图，$\triangle ABC \cong \triangle CED$，$\angle B$ 与 $\angle DEC$ 是对应角，BC 与 ED 是对应边. 说出另外两组对应角和对应边.



（第 1 题）

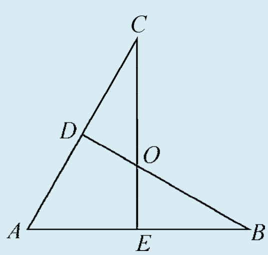


（第 2 题）

2. 图中两个三角形全等，其中 B 和 D 是对应顶点，AB 和 CD 是对应边. 请按对应顶点的对应顺序写出表示这两个三角形全等的式子；写出这两个全等三角形的对应边和对应角.

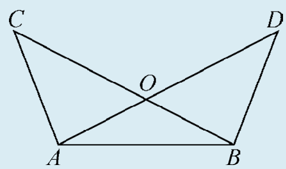
习题 14.1

1. 回答下列问题：
   （1）什么样的两个三角形叫做全等三角形？
   （2）全等三角形有哪些性质？
2. 已知：如图，$\triangle ABD \cong \triangle ACE$，$\angle B = \angle C$，指出其他的对应角和对应边；又知 $\triangle OBE \cong \triangle OCD$，指出这一对全等三角形中所有的对应角与对应边.

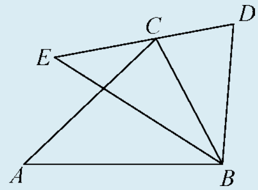


（第 2 题）

3. 已知：如图，$\triangle ABC \cong \triangle BAD$，$BC = AD$，指出其他的对应边与对应角；又知 $\triangle OAC \cong \triangle OBD$，指出这一对全等三角形中所有的对应边与对应角.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 已知：如图，$\triangle ABC \cong \triangle EBD$，$AB = EB$，那么 $AC =$________，$\angle$________ $= \angle ABE$.

14.2 三角形全等的判定

操作

三角形有六个基本元素(三条边和三个角),只给定其中的一个元素或两个元素,能够确定一个三角形的形状和大小吗?通过画图,说明你的判断.

1. 只给定一个元素:

(1) 一条边长为 4 cm;

(2) 一个角为 45°.

2. 只给定两个元素:

(1) 两条边长分别为 4 cm, 5 cm;

(2) 一条边长为 4 cm,一个角为 45°;

(3) 两个角分别为 45°, 60°.

通过上述操作,我们发现只给定三角形的一个或两个元素,不能完全确定一个三角形的形状、大小,那么还需增加什么条件才行呢?

探究

1. 如图 14－3,把圆规平放在桌面上,在圆规的两脚上各取一点 A, C,自由转动其一个脚,$\triangle ABC$ 的

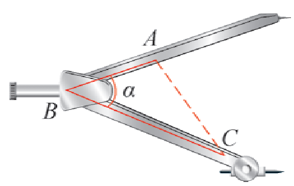


图 14-3

形状、大小随之改变. 那么还需增加什么条件才可以确定$\triangle ABC$的形状、大小呢?

图 14-4

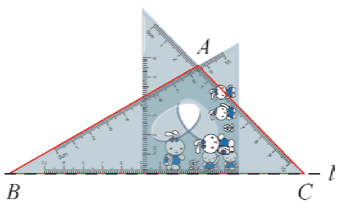


图 14-5

2. 如图 14-5,把两块三角尺的一条直角边放在同一条直线l上,其中$\angle B$, $\angle C$已知,并记两块三角尺斜边的交点为A. 沿着直线l分别向左右移动两个三角尺,$\triangle ABC$的大小随之改变,这直观地说明一个三角形,只知道两个角,这个三角形是不确定的. 那么还需增加什么条件才可以使$\triangle ABC$确定呢?

由上可知,确定一个三角形的形状、大小至少需要有三个元素. 确定三角形的形状、大小的条件能否作为判定三角形全等的条件呢?

下面,我们利用尺规作图作出三角形,来研究两个三角形全等的条件.

1. 两边及其夹角分别相等的两个三角形

已知: $\triangle ABC$[图 14-6(1)].

求作: $\triangle A'B'C'$,使$A'B' = AB$, $\angle B' = \angle B$, $B'C' = BC$.

作法:

(1) 作$\angle MB'N = \angle B$;

(2) 在$B'M$上截取$B'A' = BA$,在$B'N$上截取$B'C' = BC$;

(3) 连接$A'C'$.

则$\triangle A'B'C'$[图 14-6(2)]就是所求作的三角形.

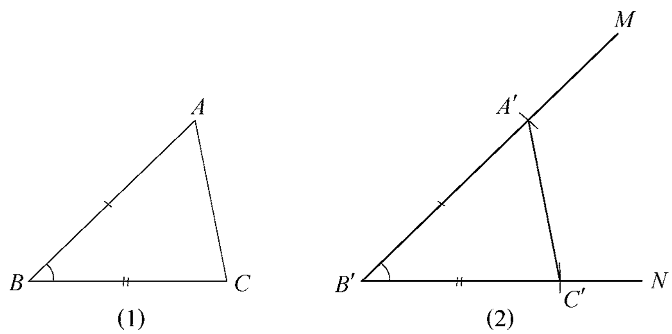


图　14－6

将所作的$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$叠一叠，看看它们能否完全重合？由此你能得到什么结论？

判定两个三角形全等的第1种方法是如下的**基本事实**.

两边及其夹角分别相等的两个三角形全等. 简记为“**边角边**”或“***SAS***”（S表示边，A表示角）.

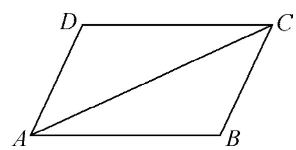


图　14－7

例1　已知：如图14－7，$AD \parallel CB$，$AD = CB$.

求证：$\triangle ADC \cong \triangle CBA$.

证明　$\because$　$AD \parallel CB$，（已知）

$\therefore$　$\angle DAC = \angle BCA$.（两直线平行，内错角相等）

在$\triangle ADC$和$\triangle CBA$中，

$$\because \begin{cases} AD = CB, & (\text{已知}) \\ \angle DAC = \angle BCA, & (\text{已证}) \\ AC = CA, & (\text{公共边}) \end{cases}$$

$\therefore$　$\triangle ADC \cong \triangle CBA$.（$SAS$）

例2　如图14－8，在湖泊的岸边有A，B两点，难以直接量出A，B两点间的距离. 你能设计一种量出A，B两点之间距离的方案吗？说明你这样设计的理由.

解　在岸上取可以直接到达A，B的一点C，连接AC，延长AC到点A'，使$A'C = AC$；连接BC，并延长BC到点B'，使$B'C = BC$. 连接$A'B'$，量出$A'B'$的长度，就是A，B两点间距离.

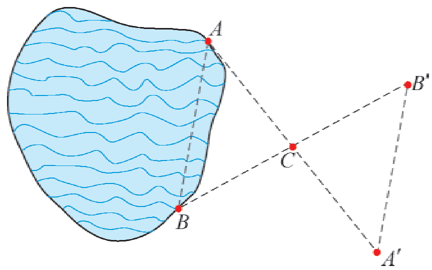


图　14-8

理由：在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C$中，

$$\because \begin{cases} AC = A'C, (\text{已知}) \\ \angle ACB = \angle A'CB', (\text{对顶角相等}) \\ BC = B'C, (\text{已知}) \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C$.（SAS）

$\therefore$ $A'B' = AB$.（全等三角形对应边相等）

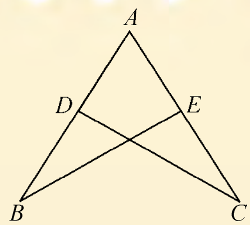
练习

1. 已知：如图，$AB = AC$，$AD = AE$.

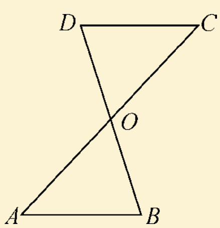
   求证：$\triangle ABE \cong \triangle ACD$.

2. 已知：如图，AC和BD相交于点O，$OA = OC$，$OB = OD$.

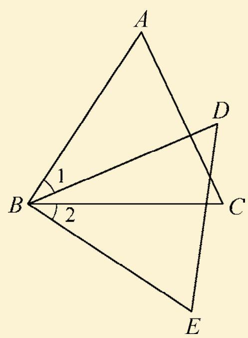
   求证：$DC \parallel AB$.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 已知：如图，$AB = DB$，$CB = EB$，$\angle 1 = \angle 2$.

   求证：$\angle A = \angle D$.

2. 两角及其夹边分别相等的两个三角形

已知：$\triangle ABC$[图 14－9(1)].

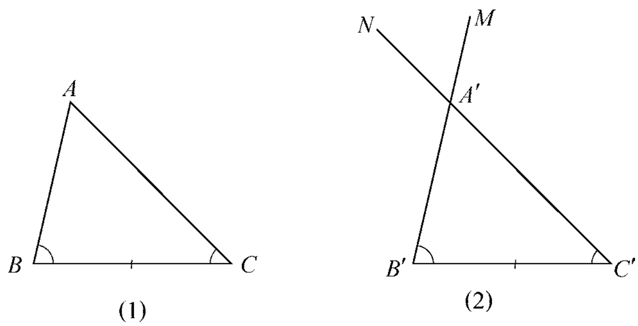


图 14－9

求作：$\triangle A'B'C'$,使$\angle B'=\angle B$, $B'C'=BC$, $\angle C'=\angle C$.

作法：

（1）作线段$B'C'=BC$;

（2）在 $B'C'$ 的同旁，分别以 B', C' 为顶点作$\angle MB'C'=\angle ABC$, $\angle NC'B'=\angle C$, $B'M$ 与 $C'N$ 交于点 A'.

则$\triangle A'B'C'$[图 14－9(2)]就是所求作的三角形.

将所作的$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$叠一叠,看看它们能否完全重合？由此你能得到什么结论？

判定两个三角形全等的第 2 种方法是如下的**基本事实**.

两角及其夹边分别相等的两个三角形全等. 简记为“**角边角**”或“**ASA**”.

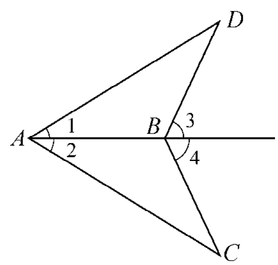


图 14－10

例 3 已知：如图 14－10, $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$.

求证：$DB=CB$.

证明 ∵ $\angle ABD$ 与 $\angle 3$ 互为邻补角,

$\angle ABC$ 与 $\angle 4$ 互为邻补角,(已知)

又 ∵ $\angle 3=\angle 4$,(已知)

∴ $\angle ABD=\angle ABC$.(等角的补角相等)

在 $\triangle ADB$ 与 $\triangle ACB$ 中,

$$\because \begin{cases} \angle 1 = \angle 2, (\text{已知}) \\ AB = AB, (\text{公共边}) \\ \angle ABD = \angle ABC, (\text{已证}) \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ADB \cong \triangle ACB$. ($ASA$)

$\therefore$ $DB = CB$. (全等三角形的对应边相等)

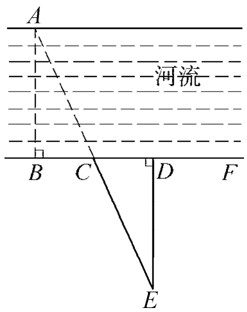


图 14-11

例 4 已知:如图 14-11,要测量河两岸相对的两点 A, B 之间的距离,可以在 AB 的垂线 BF 上取两点 C, D(BF 在河岸上),使 $BC = CD$,再过点 D 作 BF 的垂线 DE,使点 A, C, E 在一条直线上,这时测得 DE 的长等于 AB 的长,请说明道理.

证明 $\because$ $AB \perp BD$, $ED \perp BD$, (已知)

$\therefore$ $\angle ABC = \angle EDC = 90°$. (垂直的定义)

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EDC$ 中,

$$\because \begin{cases} \angle ABC = \angle EDC, (\text{已证}) \\ BC = CD, (\text{已知}) \\ \angle ACB = \angle ECD, (\text{对顶角相等}) \end{cases}$$

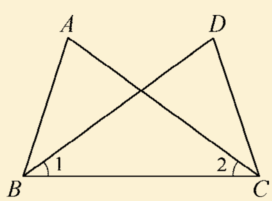
$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle EDC$. ($ASA$)

$\therefore$ $AB = DE$. (全等三角形的对应边相等)

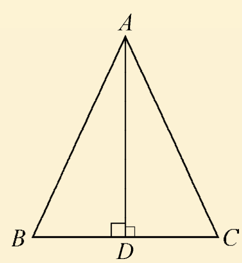
练习

1. 已知:如图, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle ABC = \angle DCB$.

   求证: $\triangle ABC \cong \triangle DCB$.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 已知:如图, $\angle BAD = \angle CAD$, $AD \perp BC$, 点 D 为垂足.

求证：$\triangle ABD \cong \triangle ACD$.

3. 两个直角三角形中，斜边和一个锐角分别对应相等. 求证这两个三角形全等.

3. 三边分别相等的两个三角形

已知：$\triangle ABC$[图 14－12(1)].

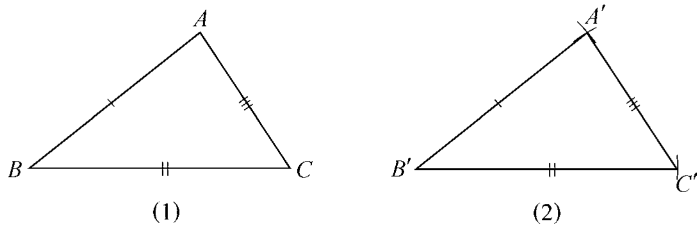


图 14－12

求作：$\triangle A'B'C'$，使 $A'B' = AB$，$B'C' = BC$，$C'A' = CA$.

作法：

(1) 作线段 $B'C' = BC$；

(2) 分别以点 B'，C'为圆心，BA，CA 的长为半径画弧，两弧相交于点 A'；

(3) 连接 $A'B'$，$A'C'$.

则$\triangle A'B'C'$[图 14－12(2)]就是所求作的三角形.

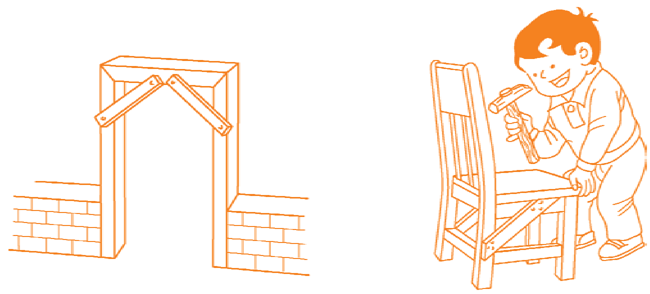
$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 全等吗？

判定两个三角形全等的第 3 种方法是如下的**基本事实**.

三边分别相等的两个三角形全等. 简记为“**边边边**”或“**SSS**”.

上面的结论说明，只要三角形三边的长度确定了，这个三角形的形状和大小就完全确定，这个性质叫做**三角形的稳定性**. 日常生活中，常会看到应用三角形稳定性的例子，如斜拉桥上的三角形结构、自行车的三角形车架；又如在预制的

木门框（或木窗框）上加两根木条［图 14－13（1）］、晃动了的椅子腿与坐板间钉一根木条［图 14－13（2）］构成三角形，以防门框变形、椅子摇晃.



（1）　　　　（2）

图　14－13

例 5　已知：如图 14－14，点 B，E，C，F 在同一直线上，$AB=DE$，$AC=DF$，$BE=CF$. 求证：$AB \parallel DE$，$AC \parallel DF$.

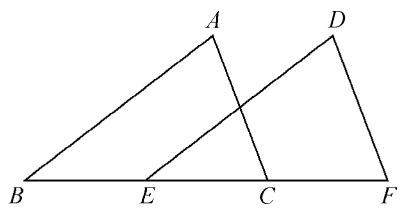


图　14－14

证明　$\because$　$BE=CF$，（已知）

$\therefore$　$BE+EC=CF+EC$，（等式的性质）

即　$BC=EF$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，

$$\because \begin{cases} AB=DE, \text{（已知）} \\ AC=DF, \text{（已知）} \\ BC=EF, \text{（已证）} \end{cases}$$

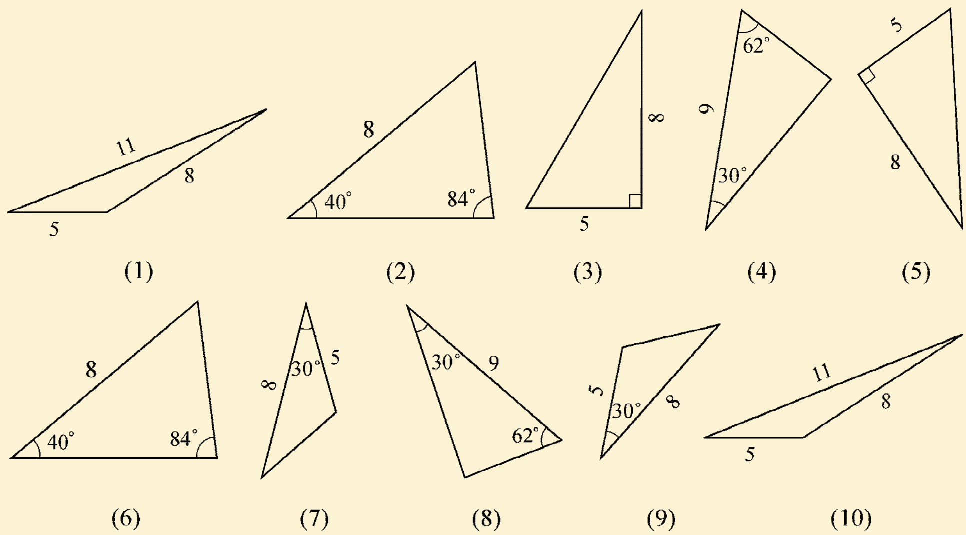
$\therefore$　$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.（SSS）

$\therefore$　$\angle B=\angle DEF$，$\angle ACB=\angle F$.（全等三角形的对应角相等）

$\therefore$　$AB \parallel DE$，$AC \parallel DF$.（同位角相等，两直线平行）

练习

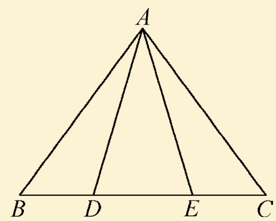
1. 在下列图中找出全等三角形.



（第 1 题）

2. 你能举出身边运用三角形稳定性的实例吗？和同学交流.

3. 已知：如图，在△*ABC* 中，*AB* = *AC*. 点 *D*，*E* 在 *BC* 上，且 *AD* = *AE*，*BE* = *CD*. 求证：△*ABD* ≌ △*ACE*.



（第 3 题）

4. 其他判定两个三角形全等的条件

探究

我们知道，*SAS*，*ASA*，*SSS* 都可以作为判定两个三角形全等的条件. 其实，在三角形的六个基本元素

中选择三个元素对应相等，除了可以配成 SAS，ASA，SSS 外，还可以配成：AAA，SSA，AAS.

想一想，满足下面三组条件中任一组的两个三角形，即

(1) 三个角分别相等；

(2) 两边和其中一边的对角分别相等；

(3) 两角和其中一角的对边分别相等.

能判定这两个三角形全等吗？

上述“探究”中的命题(1)(2)，它们是不成立的. 这很容易举出反例. 如边长不等的两个等边三角形三个角都是 $60°$，但这两个等边三角形不全等.

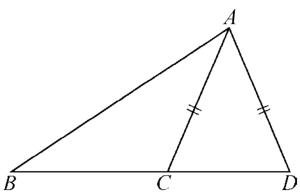


图 14－15

又如图 14－15 中的 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 满足条件 $AB = AB$，$AC = AD$，$\angle ABC = \angle ABD$，但它们也不全等.

对于(3)，由三角形内角和等于 $180°$，可以推得这两个三角形的第三个角也分别相等，这样 AAS 就可以转化成 ASA，从而可以判定这样的两个三角形全等.

定理　两角分别相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等. 简记为“**角角边**”或“***AAS***”.

由上可知，判定两个三角形全等的依据，有 SAS，ASA，AAS 和 SSS 四种.

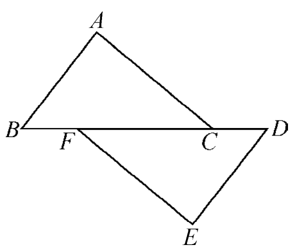


图 14－16

例 6　已知：如图 14－16，点 B，F，C，D 在一条直线上，$AB = ED$，$AB \parallel ED$，$AC \parallel EF$. 求证：$\triangle ABC \cong \triangle EDF$.

证明　$\because$　$AB \parallel ED$，$AC \parallel EF$，(已知)

$\therefore$　$\angle B = \angle D$，$\angle ACB = \angle EFD$.（两直线平行，内错角相等）

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle EDF$ 中，

$$\because \begin{cases} \angle B = \angle D, (\text{已证}) \\ \angle ACB = \angle EFD, (\text{已证}) \\ AB = ED, (\text{已知}) \end{cases}$$

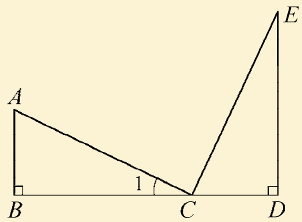
$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle EDF.$ (AAS)

练习

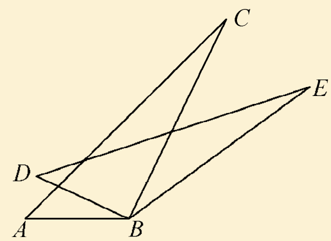
1. 分别写出下列两题中符合已知条件的全等三角形，并说明全等的依据.

(1) 已知：如图，点 C 在 BD 上，$\angle B = \angle D = 90°$，且 $AB = CD$，$\angle 1 = \angle E$；

(2) 已知：如图，$AB = DB$，$BC = BE$，$\angle ABC = \angle DBE$.



(1)



(2)

(第 1 题)

2. 如果要使 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等，在下列各种情况下还要添加哪些条件？

(1) $AB = DE$，$\angle B = \angle E$；

(2) $\angle A = \angle D$，$\angle C = \angle F$.

3. 回忆在本套教科书七年级上册 4.6 节中如何用尺规作一个角等于已知角. 请证明作法的正确性.

5. 两个直角三角形全等的判定

判定两个直角三角形全等，除了根据上面一般三角形的判定方法外，有没有特定的方法？

已知：Rt$\triangle ABC$，其中 $\angle C$ 为直角[图 14 − 17(1)].

求作：Rt$\triangle A'B'C'$，使 $\angle C'$ 为直角，$A'C' = AC$，$A'B' = AB$.

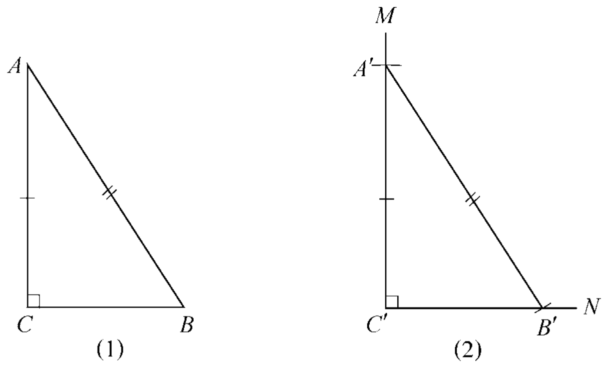


图　14－17

作法：

（1）作∠$MC'N$＝∠C＝90°；

（2）在 $C'M$ 上截取 $C'A'$＝CA；

（3）以 A'为圆心、AB 长为半径画弧，交 $C'N$ 于点 B'；

（4）连接 $A'B'$.

则 Rt△$A'B'C'$［图 14－17（2）］就是所求作的直角三角形.

将画好的 Rt△$A'B'C'$与 Rt△ABC 叠一叠，看看它们能否完全重合？由此你能得到什么结论？

本定理将在 15.3 节中给出证明.

判定两个直角三角形全等的另一种方法是：

定理　斜边和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等. 简记为"**斜边、直角边**"或"***HL***".

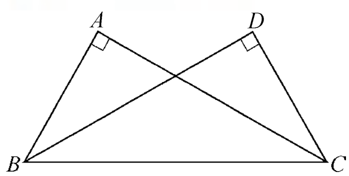


图　14－18

例 7　已知：如图 14－18，∠BAC ＝ ∠CDB ＝ 90°，AC ＝ DB. 求证：AB ＝ DC.

证明　∵　∠BAC ＝ ∠CDB ＝ 90°，（已知）

∴　△BAC，△CDB 都是直角三角形.

又　∵　AC ＝ DB，（已知）

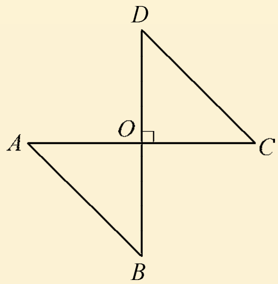
BC ＝ CB，（公共边）

∴　Rt△ABC≌Rt△DCB.（HL）

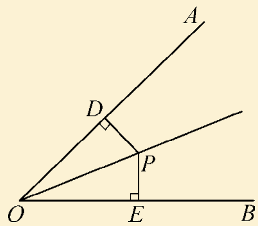
∴　AB ＝ DC.（全等三角形的对应边相等）

练习

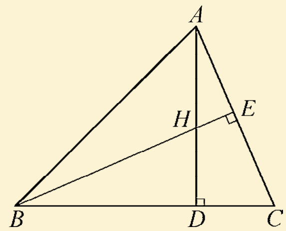
1. 已知：如图，$AC \perp BD$ 于点 O，且 $OA = OC$，$AB = CD$.
   求证：$AB \parallel DC$.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

2. 已知：如图，P 为 $\angle AOB$ 内一点，$PD \perp OA$，$PE \perp OB$，垂足分别为点 D，E，且 $PD = PE$. 猜想 $\angle AOP$ 与 $\angle BOP$ 有什么关系？试说明理由.
3. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，高 AD，BE 相交于点 H，当满足什么条件时，$\triangle BDH \cong \triangle ADC$?

例 8 已知：如图 14－19，$AB = CD$，$BC = DA$，E，F 是 AC 上的两点，且 $AE = CF$. 求证：$BF = DE$.

证明 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 中，

$$\because \begin{cases} AB = CD, & \text{(已知)} \\ BC = DA, & \text{(已知)} \\ CA = AC, & \text{(公共边)} \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.（$SSS$）

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$.（全等三角形的对应角相等）

在 $\triangle BCF$ 与 $\triangle DAE$ 中，

$$\because \begin{cases} BC = DA, & \text{(已知)} \\ \angle 1 = \angle 2, & \text{(已证)} \\ CF = AE, & \text{(已知)} \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle BCF \cong \triangle DAE$.（$SAS$）

$\therefore$ $BF = DE$.（全等三角形的对应边相等）

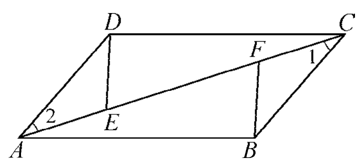


图 14－19

例 9　证明：全等三角形对应边上的高相等.

已知：如图 14－20，$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. AD，$A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的高. 求证：$AD = A'D'$.

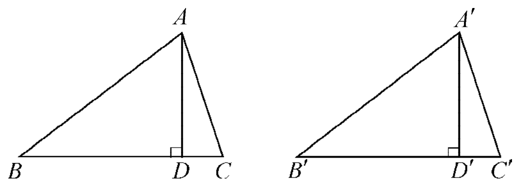


图　14－20

证明　$\because$　$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$，（已知）

$\therefore$　$AB = A'B'$，$\angle B = \angle B'$.（全等三角形的对应边相等、对应角相等）

$\because$　AD，$A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$ 的高，

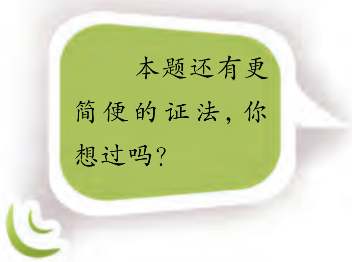
$\therefore$　$\angle ADB = \angle A'D'B' = 90°$.（垂直的定义）

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle A'B'D'$ 中，

$$\because \begin{cases} \angle B = \angle B', & \text{（已证）} \\ \angle ADB = \angle A'D'B', & \text{（已证）} \\ AB = A'B', & \text{（已证）} \end{cases}$$

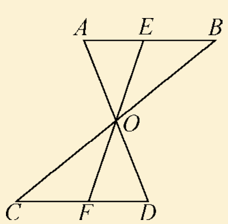
$\therefore$　$\triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$.（AAS）

$\therefore$　$AD = A'D'$.（全等三角形的对应边相等）

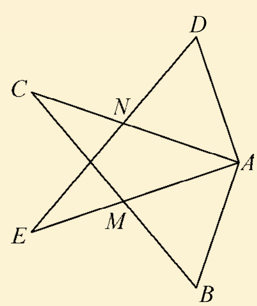


练习

1. 已知：如图，$AB \parallel CD$，$AB = CD$，AD 与 BC 交于点 O，EF 过点 O，分别交 AB，CD 于点 E、点 F. 求证：$OE = OF$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，$AB = AD$，$AC = AE$，$\angle BAE = \angle DAC$.

(1) 求证：$\triangle ABC \cong \triangle ADE$；

(2) $BM = DN$ 成立吗？为什么？

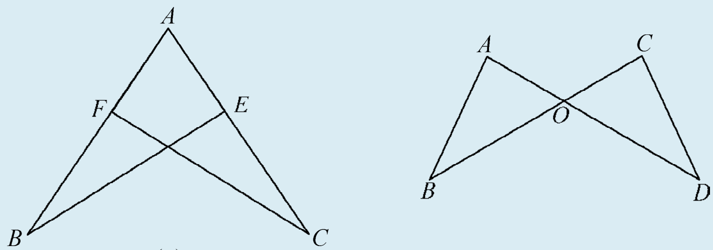
3. 求证：两个全等三角形对应边上的中线相等.

4. 求证：两个全等三角形对应角的平分线相等.

习题 14.2

1. (1) 已知：如图(1)，$\triangle ABE \cong \triangle ACF$，$AB = AC = 5$，$AE = 2$，求 BF 的长度；

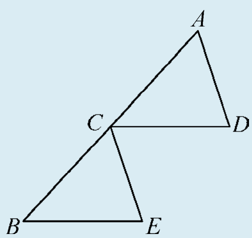
(2) 已知：如图(2)，$\triangle ABO \cong \triangle CDO$，$\angle BAO = 85°$，$\angle AOB = 60°$，求 $\angle CDO$ 的度数.



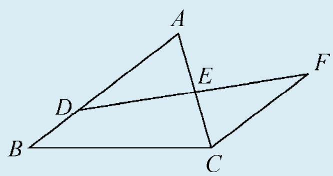
(1) (2)

（第 1 题）

2. 已知：如图，点 C 是 AB 的中点，$CD \parallel BE$，且 $CD = BE$. 求证：$\triangle ACD \cong \triangle CBE$.



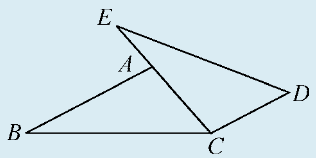
（第 2 题）



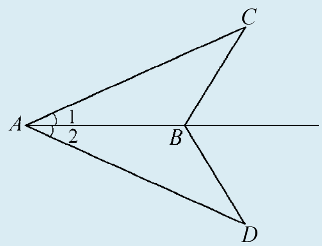
（第 3 题）

3. 已知：如图，D 是 $\triangle ABC$ 边 AB 上一点，E 是 AC 中点，点 F 在线段 DE 的延长线上，且 $EF = DE$. 求证：$CF \parallel AD$，$CF = AD$.

4. 已知：如图，点 E，A，C 在同一条直线上，$AB \parallel CD$，$AB = CE$，$AC = CD$. 求证：$BC = ED$.



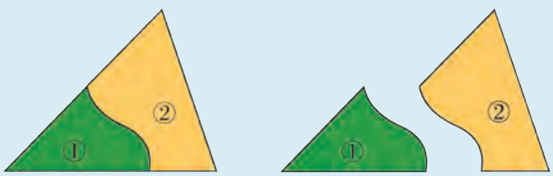
（第 4 题）



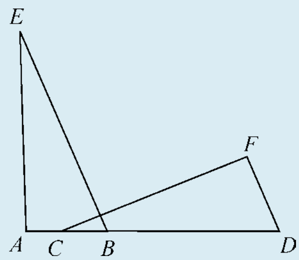
（第 5 题）

5. 已知：如图，$\angle 1 = \angle 2$，$\angle C = \angle D$. 求证：$AC = AD$.

6. 如图，假设有一块较大的三角形玻璃摔成了两半，需要去玻璃店重新配置，不量尺寸，试问是否要将两块碎片都带去还是只选带一块？选哪一块，为什么？



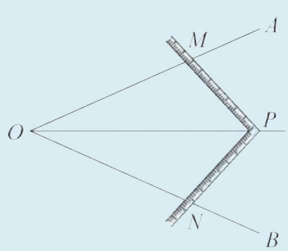
（第 6 题）



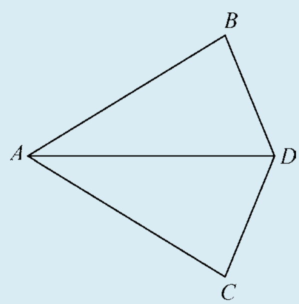
（第 7 题）

7. 已知：如图，点 A，C，B，D 在同一条直线上，$BE \parallel DF$，$\angle A = \angle F$，$AB = FD$. 求证：$AE = FC$.

8. 工人师傅常用角尺平分一个任意角，做法如图：$\angle AOB$ 是一个任意角，在边 OA，OB 上分别取 $OM = ON$，移动角尺，使角尺两边相同的刻度分别与 M，N 重合. 过角尺顶点 P 的射线 OP 便是 $\angle AOB$ 的平分线，试说明这种做法的理由.



（第 8 题）

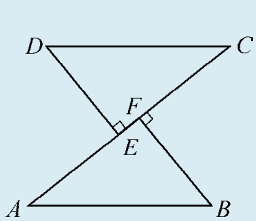


（第 9 题）

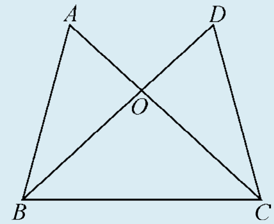
9. 已知：如图，$\angle BDA = \angle CDA$，还要具备什么条件，就能使 $\triangle ADB$ 与 $\triangle ADC$ 全等？

10. 已知：如图，$AB = CD$，$DE \perp AC$，$BF \perp AC$，点 E，F 是垂足，$DE = BF$. 求证：

(1) $AE = CF$；　　(2) $AB \parallel DC$.



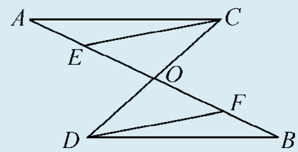
（第 10 题）



（第 11 题）

11. 已知：如图，AC，DB 相交于点 O，$AB = DC$，$AC = DB$. 求证：$OA = OD$.

12. 已知：如图，AB，CD 相交于点 O，$AC \parallel DB$，$OC = OD$，E，F 为 AB 上两点，且 $AE = BF$. 求证：$CE = DF$.



（第 12 题）

小结·评价

一、内容整理

三角形全等 → 确定三角形形状与大小的条件

三角形全等 → 判定两个三角形全等的条件 → 判定两个直角三角形全等的条件

三角形全等 → 判定两个直角三角形全等的条件

二、主要知识回顾

1. 全等三角形判定方法有：

   SAS，________，________，________.

2. 两个直角三角形全等的特定判定方法有：________.

三、自评与互评

如何判定两个三角形全等？在本章学习中，你解决问题时，有根据道理、步步有据的说理体验吗？与同学谈谈自己的体会.

A组 复习题

1. 判断正误：

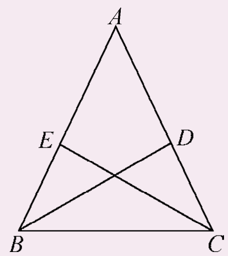
（1）两边分别相等且其中一组等边所对的角相等的两个三角形全等.（　　）

（2）两边分别相等的两个直角三角形全等.（　　）

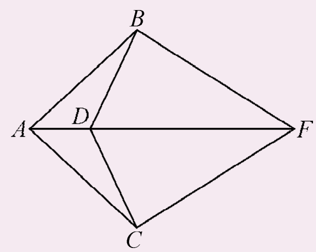
（3）一个锐角和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等.（　　）

2. 已知：如图，$\angle ABC = \angle ACB$，BD，CE 分别是 $\angle ABC$，$\angle ACB$ 的平分线.

求证：$BD = CE$.



（第 2 题）

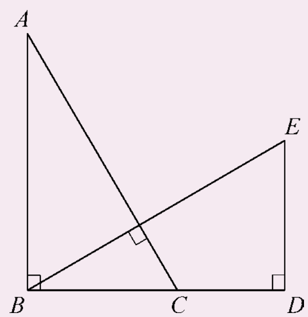


（第 3 题）

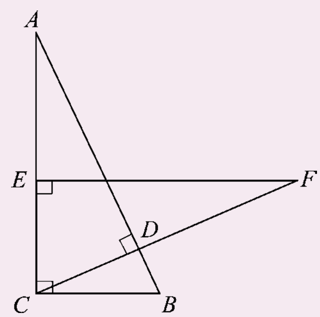
3. 已知：如图，$AB = AC$，$DB = DC$，F 是 AD 延长线上的一点.

求证：$\angle BFA = \angle CFA$.

4. 已知：如图，在直角三角形 ABC 中，$\angle ABC = 90°$，点 D 在 BC 的延长线上，且 $BD = AB$，过点 B 作 $BE \perp AC$，与 BD 的垂线 DE 交于点 E. 求证：$\triangle ABC \cong \triangle BDE$.



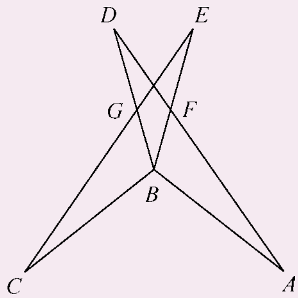
（第 4 题）



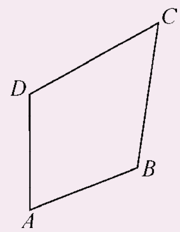
（第 5 题）

5. 已知：如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$BC = 2$ cm，$CD \perp AB$，在 AC 上取一点 E，使 $EC = BC$，过点 E 作 $EF \perp AC$，交 CD 的延长线于点 F，若 $EF = 5$ cm，求 AE 的长度.

6. 已知：如图，在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBE$ 中，AD 与 BE 交于点 F，CE 与 BD 交于点 G，$AB = CB$，$\angle AFB = \angle CGB$，$\angle ABE = \angle CBD$. 求证：$AD = CE$.



（第 6 题）



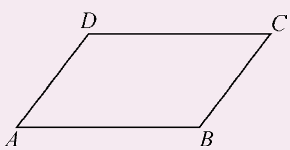
（第 7 题）

7. 已知：如图，$AB = AD$，$CB = CD$. 求证：$\angle B = \angle D$.

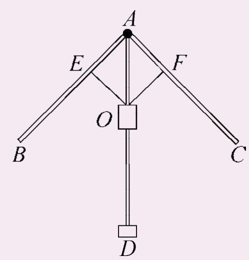
8. 已知：如图，$AB = DC$，$AD = BC$. 求证：

（1）$AB \parallel DC$，$AD \parallel BC$；

（2）$\angle A = \angle C$，$\angle B = \angle D$.

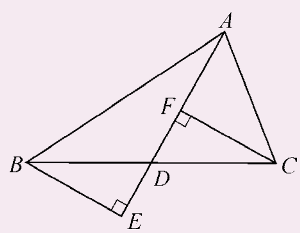


（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，在雨伞的截面图中，伞骨 $AB = AC$，支撑杆 $OE = OF$，$AE = \frac{1}{3}AB$，$AF = \frac{1}{3}AC$. 当点 O 沿 AD 滑动时，雨伞开闭. 问雨伞开闭过程中，$\angle BAD$ 与 $\angle CAD$ 有什么关系？说明理由.

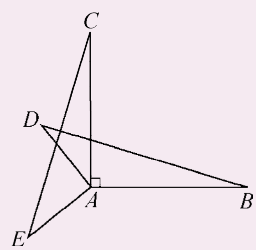


（第 10 题）

10. 已知：如图，AD 为 $\triangle ABC$ 的中线，$BE \perp AD$，垂足为点 E，$CF \perp AD$，垂足为点 F.

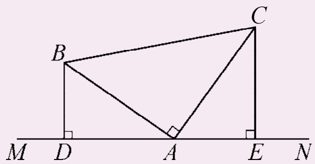
求证：$BE = CF$.

11. 已知：如图，$AB \perp AC$，且 $AB = AC$，$AD = AE$，$BD = CE$. 试问：AD 与 AE 是否垂直？若是，请给出证明；若不是，试说出理由.

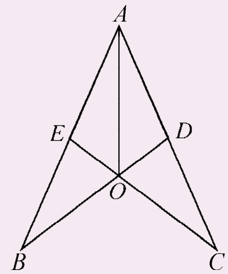


（第 11 题）

12. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，直线MN经过点A，$BD\perp MN$，$CE\perp MN$，垂足分别为点D，E. 试判断$BD+CE$与DE的关系，并给出证明.



（第 12 题）



（第 13 题）

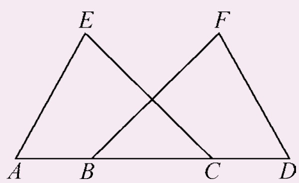
13. 已知：如图，$AB=AC$，$AD=AE$，BD，CE相交于点O.

（1）求证：$OD=OE$；

（2）AO平分$\angle BAC$吗？为什么？

B组 复习题

1. 已知：如图，$AB=CD$，$\angle A=\angle D$，要使$\triangle AEC\cong\triangle DFB$，还需增加一个什么条件？说出你增加的条件及理由.



（第 1 题）

2. 已知：在$\triangle ABC$中，$CA=CB$，$\angle C=90°$，D为AB上任一点，$AE\perp CD$，垂足为点E，$BF\perp CD$，垂足为点F. 求证：$EF=|AE-BF|$.

第15章 轴对称图形与等腰三角形

现实世界中，许多物体具有对称性，如气势恢弘的天安门的正面图，显示出和谐、庄重的对称美.

本章我们将学习轴对称图形、线段的垂直平分线、等腰三角形及角的平分线.

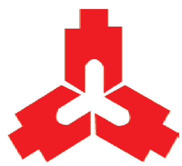
15.1 轴对称图形

观察

人们很欣赏物体的对称美，设计师、艺术家常利用对称性使作品美观大方(图 15－1).

北京天坛祈年殿正面平面图

铁路标志



中国人民银行标志

图 15－1

在我们的周围存在着许多具有对称性的平面

(1) 蜻蜓

(2) 雪花

(3) 枫叶

图 15－2

图形(图 15－2).

上述这些平面图形的对称性有什么特点呢?

以蜻蜓的图案为例,在它身体正中间画一条直线 l(图 15－3),以直线 l 为折痕,将图纸折叠,蜻蜓图中直线 l 一侧的部分与另一侧的部分能够重合.

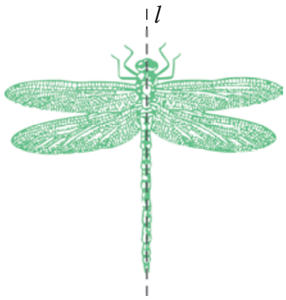


图 15－3

如果一个平面图形沿着一条直线折叠,直线两旁的部分能够完全重合,那么这个图形叫做**轴对称图形**(symmetric figure),这条直线叫做**对称轴**(axis of symmetry).

雪花、枫叶、祈年殿等正面平面图各有几条对称轴?

可见,蜻蜓的图案是轴对称图形.雪花、枫叶、祈年殿等正面平面图也都是轴对称图形.

操作

使用折纸的方法,很容易画出或剪成一个轴对称图形.如图 15－4 是制作一片枫叶平面图的过程图.

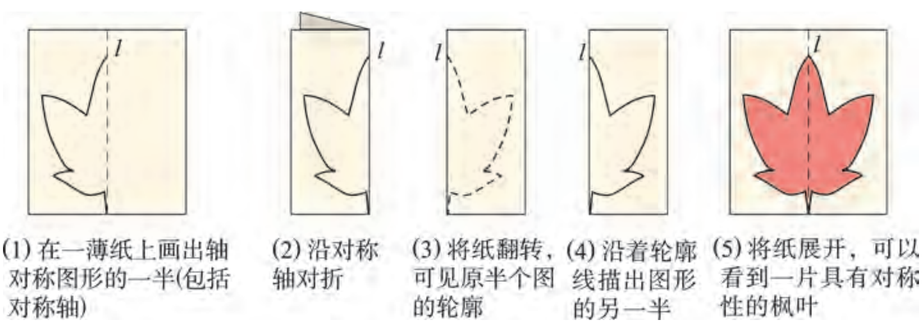
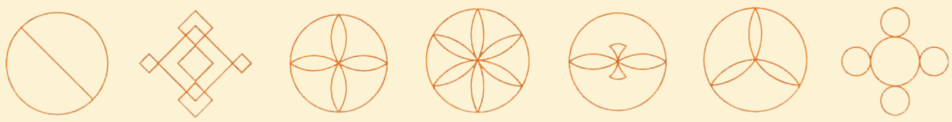


图 15－4

练习

1. 指出下列图形各有几条对称轴,画出每个图的对称轴.

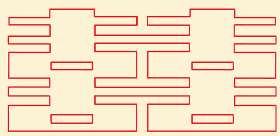


①　②　③　④　⑤　⑥　⑦

(第 1 题)

图形代号	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
对称轴条数							

2. 如图是民间双喜图,它是轴对称图形吗? 若是,请你尝试画出它的对称轴. 你能用纸剪一个双喜图吗? 试试看.



(第 2 题)

观察

图 15－5 中有两对图形,其中的每一对图形,它们在一条直线(图中画成虚线)的两旁,如果沿着这条直线折叠,两个图形重合.

(1)　(2)

图　15－5

像上述这样(图 15－5),平面内两个图形在一条直线的两旁,如果沿着这条直线折叠,这两个图形能够重合,那么称这两个图形成**轴对称**,这条直线就是对称轴. 折叠后重合的两点叫做**对应点**(也叫对称点).

一个轴对称图形,如果把它沿对称轴分成两个图形(图 15－6),那么这两个图形关于这条轴对称.

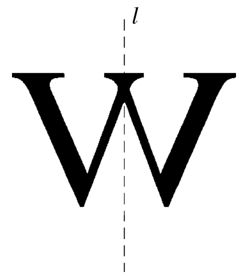


图 15-6

思考

如图 15－7,$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$,关于直线 l 对称,点 A', B', C'分别是点 A, B, C 的对应点. 连接 AA',设 AA'与直线 l 交于点 O_1.

(1) 直线 l 与线段 AA'有怎样的位置关系?

(2) O_1A 与 O_1A'的长度有何关系?

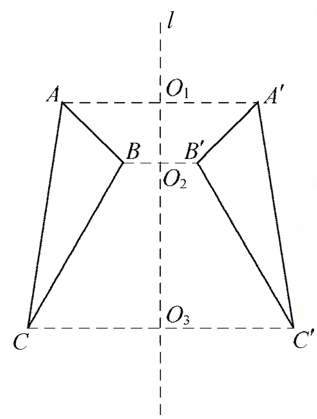


图 15-7

由于$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$关于直线 l 对称,将$\triangle ABC$ 沿直线 l 折叠后,它与$\triangle A'B'C'$重合,所以有

$$O_1A = O_1A',$$
$$\angle O_2O_1A = \angle O_2O_1A' = 90°.$$

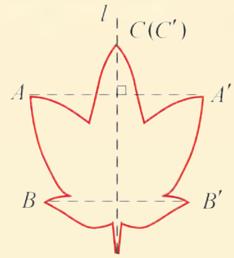
对于其他的对应点,如点 B 与 B',点 C 与 C'也有同样结论. 即对称轴经过连接对应点的线段的中点,并且垂直于这条线段.

经过线段的中点并且垂直于这条线段的直线叫做这条线段的**垂直平分线**(perpendicular bisector),又叫做线段的中垂线.

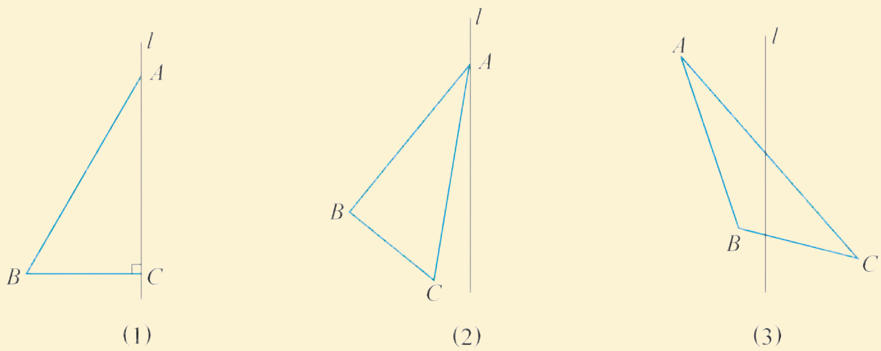
一般地，如果两个图形关于某直线对称，那么对称轴是任何一对对应点所连线段的垂直平分线；反过来，成轴对称的两个图形中，对应点的连线被对称轴垂直平分.

练习

1. 将一张纸片对折，在折痕上选两点 A，B，从 A 到 B 任意剪去纸片的一部分，打开时，你能看到什么样的图案？请试试看.
2. 如图，枫叶平面图是轴对称图形，叶尖 A，A'与对称轴 l 的位置有什么关系？叶尖 B，B'与对称轴 l 的位置存在同样的关系吗？
3. 已知直线 l 和 $\triangle ABC$（如图），画 $\triangle A'B'C'$，使得它与 $\triangle ABC$ 关于直线 l 对称.

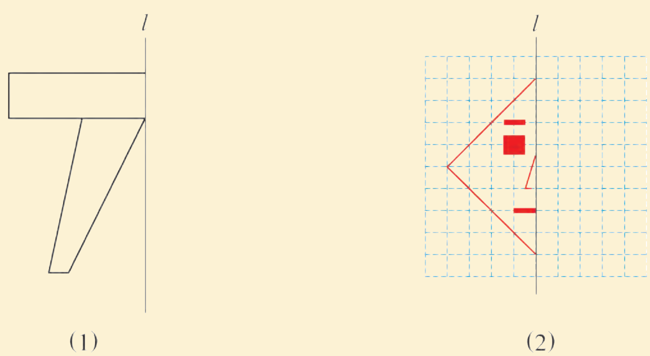


（第 2 题）



（第 3 题）

4. 画出下列以 l 为对称轴的轴对称图形.



（第 4 题）

思考

在平面直角坐标系中，如何作出图形的轴对称图呢？下面只介绍以特殊直线（坐标轴）为对称轴的情形.

如图 15－8，在平面直角坐标系中，正方形 $ABCD$ 四个顶点的坐标分别为 $A(1,1)$，$B(3,1)$，$C(3,3)$，$D(1,3)$.

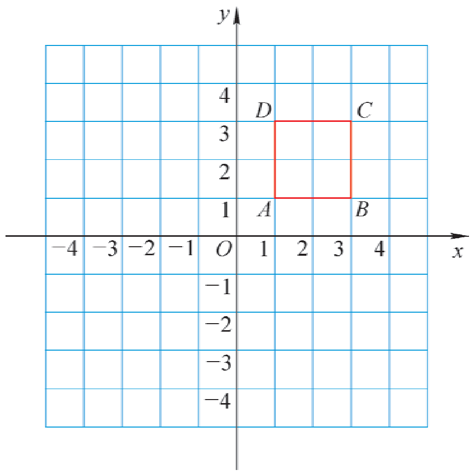


图 15-8

（1）分别作出点 A，B，C，D 关于 x 轴对称的对应点 A_1，B_1，C_1，D_1，并写出它们的坐标；

（2）分别作出点 A，B，C，D 关于 y 轴对称的对应点 A_2，B_2，C_2，D_2，并写出它们的坐标.

已知点的坐标	$A(1,1)$	$B(3,1)$	$C(3,3)$	$D(1,3)$
关于 x 轴对称的点的坐标	A_1(__，__)	B_1(__，__)	C_1(__，__)	D_1(__，__)
关于 y 轴对称的点的坐标	A_2(__，__)	B_2(__，__)	C_2(__，__)	D_2(__，__)

观察上表，指出已知点与它关于 x 轴对称的点的坐标有什么关系？与它关于 y 轴对称的点的坐标又有什么关系呢？

一般地，已知点 $P(x, y)$，它关于 x 轴对称的点的坐标为 P_1(_____，_____)，它关于 y 轴对称的点的坐标为 P_2(____，____).

练习

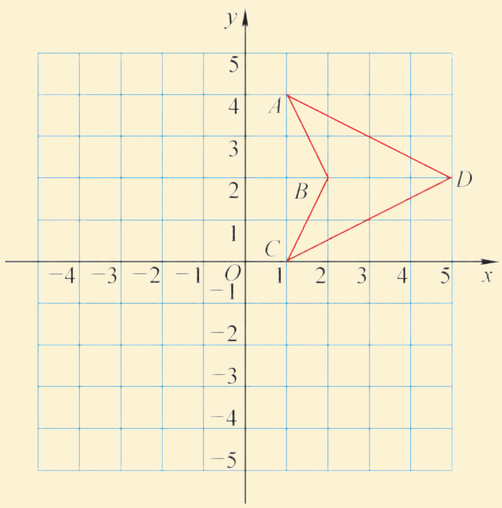
1. 分别写出下列各点关于 x 轴、y 轴对称的点的坐标：

$A(-2, 0)$，　　$B(2, -3)$，

$C(-4, -2)$，　　$D(-3, 2)$，

$E(0, -1)$，　　$F(2, 3)$.

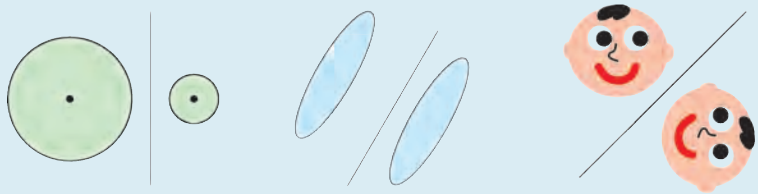
2. 作出图中多边形 $ABCD$ 关于 x 轴、y 轴的对称图形.



（第 2 题）

习题 15.1

1. 下列各组中的两个图形是否关于给定的直线对称？为什么？



(1)　(2)　(3)

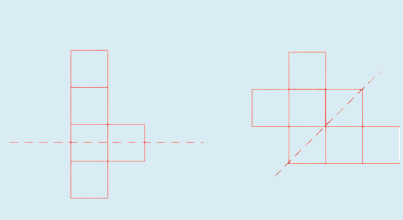
（第 1 题）

2. 下列各图案是我国几家银行的标志，哪些标志是轴对称图形？若是，请你画出它的所有对称轴.

(1)　(2)　(3)　(4)

（第 2 题）

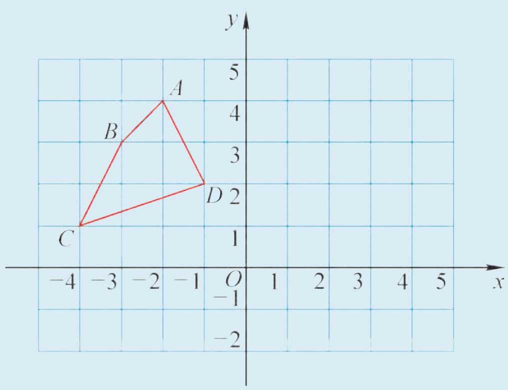
3. 在下列各图中适当位置添加小方格，使得到的图形关于虚线成轴对称：



(1)　(2)　(3)　(4)

（第 3 题）

4. （1）如图，写出四边形 $ABCD$ 的 4 个顶点的坐标；



（第 4 题）

（2）画出四边形 $ABCD$ 关于 y 轴的对称图形 $A_1B_1C_1D_1$；

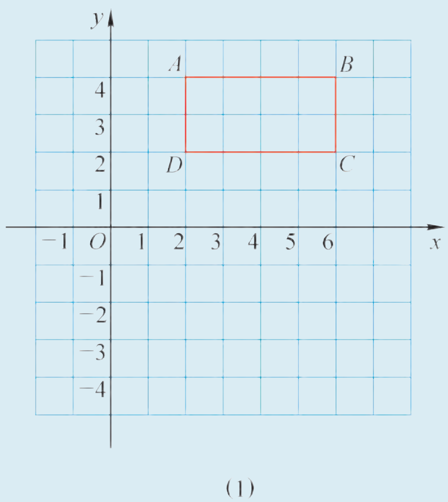
（3）写出点 A_1，B_1，C_1，D_1 的坐标.

5. 已知长方形 $ABCD$ 的顶点坐标为 $A(2, 4)$，$B(6, 4)$，$C(6, 2)$，$D(2, 2)$.

（1）在图(1)中画出长方形 $ABCD$ 向下平移 6 个单位得到的长方形 $A_1B_1C_1D_1$，写出点 A_1，B_1，C_1，D_1 的坐标；

（2）在图(2)中画出长方形 $ABCD$ 关于 x 轴对称的长方形 $A_2B_2C_2D_2$，写出点 A_2，B_2，C_2，D_2 的坐标；

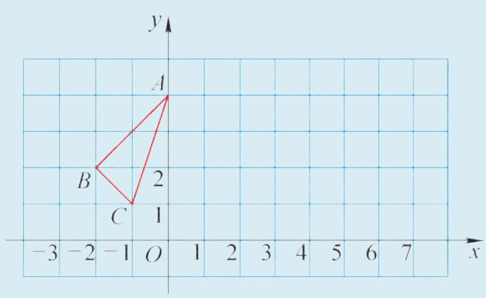
（3）你认为上述两题变换所得的结果是否一样？为什么？



（第 5 题）

6. △ABC 在平面直角坐标系中的位置如图所示.

（1）作出△ABC 关于 y 轴对称的△$A_1B_1C_1$，并写出△$A_1B_1C_1$ 各顶点的坐标；



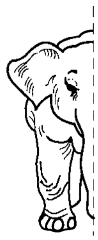
（第 6 题）

（2）将$\triangle ABC$向右平移6个单位，作出平移后的$\triangle A_2B_2C_2$，并写出$\triangle A_2B_2C_2$各顶点的坐标；

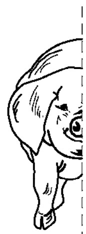
（3）观察$\triangle A_1B_1C_1$和$\triangle A_2B_2C_2$，它们是否关于某直线对称？若是，请在图上画出这条对称轴.

数学园地

1. 用透明纸放在图15－9上，照样子描出来，再按对称线（虚线）折过去，那么，合在一起看它们是什么动物的图形？



(1)



(2)

图 15-9

2. 京剧的脸谱多数作成轴对称图形，每位同学设计一个只有半边脸谱的面具，请与同桌同学互相交换，完成另一半，然后在班上评选出制作优秀的脸谱供大家欣赏.

15.2 线段的垂直平分线

问题 怎样作出线段的垂直平分线?

通过折纸可以作出线段的垂直平分线. 在半透明纸上画一条线段 AA',折纸,使 A 与 A' 重合,得到的折痕 l 是线段 AA' 的垂直平分线(图 15-10).

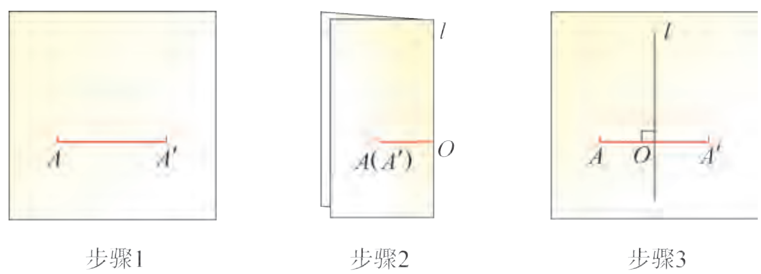


图 15-10

也可以用刻度尺量出线段的中点,再用三角尺过中点画垂线的方法作出线段的垂直平分线.

下面介绍用尺规作图,作出线段 AB 的垂直平分线.

作法:

1. 分别以点 A, B 为圆心,大于 $\frac{1}{2}AB$ 长为半径(为什么?)画弧交于点 E, F.

2. 过点 E, F 作直线.

则直线 EF 就是线段 AB 的垂直平分线(图 15-11).

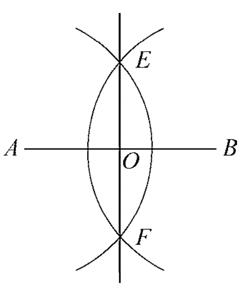


图 15-11

思考

为什么这样作出的直线 EF，就是线段 AB 的垂直平分线呢？设所作直线 EF 交 AB 于点 O，你能给出证明吗？

线段的垂直平分线有如下性质：

定理　线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等.

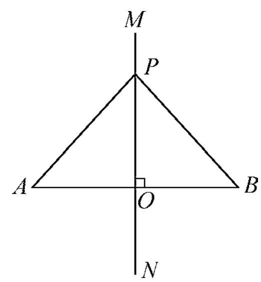


图　15-12

已知：如图 15-12，直线 MN 经过线段 AB 的中点 O，且 $MN \perp AB$，P 是 MN 上任意一点.

求证：$PA = PB$.

证明　$\because$　$MN \perp AB$，(已知)

$\therefore$　$\angle AOP = \angle BOP = 90°$.(垂直定义)

在 $\triangle AOP$ 与 $\triangle BOP$ 中，

$$\because \begin{cases} AO = BO, & (\text{已知}) \\ \angle AOP = \angle BOP, & (\text{已证}) \\ PO = PO, & (\text{公共边}) \end{cases}$$

$\therefore$　$\triangle AOP \cong \triangle BOP$.($SAS$)

$\therefore$　$PA = PB$.(全等三角形的对应边相等)

如果点 P 与点 O 重合，那么直接可得 $PA = PB$.

思考

你能写出上面定理的逆命题吗？它是真命题吗？如果是真命题，请给出证明.

定理　到线段两端距离相等的点在线段的垂直平分线上.

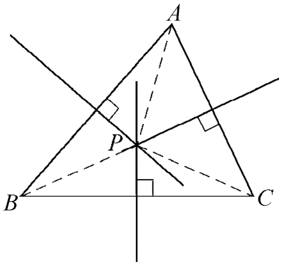


图 15-13

例 已知：如图 15-13，$\triangle ABC$ 的边 AB，AC 的垂直平分线相交于点 P.

求证：点 P 在 BC 的垂直平分线上.

证明 连接 PA，PB，PC.

∵ 点 P 在 AB，AC 的垂直平分线上，（已知）

∴ $PA=PB$，$PA=PC$.（线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等）

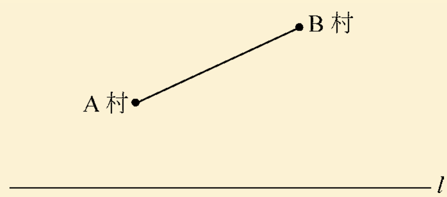
∴ $PB=PC$.（等量代换）

∴ 点 P 在 BC 的垂直平分线上.（到线段两端距离相等的点在线段的垂直平分线上）

这个例子说明：三角形三边的垂直平分线相交于一点，这点到三角形三个顶点的距离相等.

练习

1. 公路 l 同侧的 A，B 两村，共同出资在公路边修建一个停靠站 C，使停靠站到 A，B 两村距离相等. 请你确定停靠站 C 的位置.



（第 1 题）

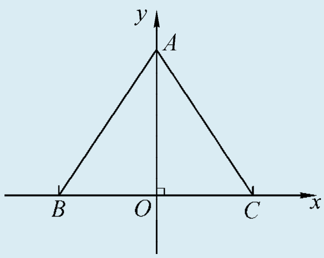
2. 已知：直线 l 是线段 AB 的垂直平分线，C，D 是 l 上任意两点（除 AB 的中点外）.
   求证：（1）$\triangle ABC$，$\triangle ABD$ 是等腰三角形；
   （2）$\angle CAD=\angle CBD$.
3. 已知：C，D 是线段 AB 外的两点，且 $CA=CB$，$DA=DB$. 求证：直线 CD 垂直平分线段 AB.

习题 15.2

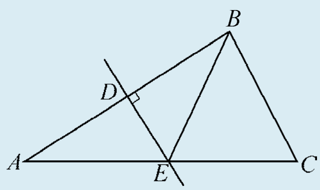
1. 已知：如图，y 轴垂直平分线段 BC，点 A 在 y 轴上，点 B，C 在 x 轴上.

   (1) 若点 C 的坐标为$(3, 0)$，则点 B 的坐标是什么？

   (2) 若点 B 的坐标为$(m, 0)$，则点 C 的坐标是什么？



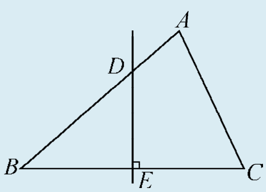
（第 1 题）



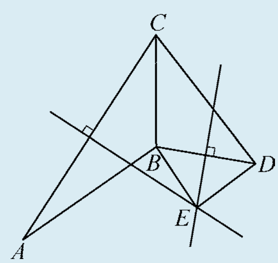
（第 2 题）

2. 已知：如图，DE 是$\triangle ABC$ 的边 AB 的垂直平分线，D 为垂足，DE 交 AC 于点 E，且 $AC = 8$，$BC = 5$，则$\triangle BEC$ 的周长等于多少？

3. 已知：如图，$\triangle ABC$ 的边 BC 的垂直平分线 DE 分别与边 AB，BC 交于点 D，E. 求证：$AB > AC$.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 已知：如图，$AB = CD$，线段 AC 的垂直平分线与线段 BD 的垂直平分线相交于点 E. 求证：$\angle ABE = \angle CDE$.

15.3 等腰三角形

等腰三角形是一类特殊的三角形. 等腰三角形除具有一般三角形的性质外,还具有什么样的特殊性质呢?

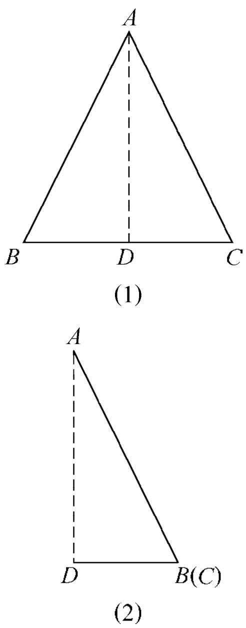


图 15-14

操作

画一个等腰三角形 ABC,如图 15-14(1). 把边 AB 叠合到边 AC 上,这时点 B 与点 C 重合,并出现折痕 AD,如图 15-14(2). 观察图形: $\triangle ADB$ 与 $\triangle ADC$ 有什么关系? 图中哪些线段或角相等? AD 与 BC 垂直吗? 为什么?

等腰三角形是轴对称图形,底边上的中线所在的直线是它的对称轴.

由上面的操作,我们可以得到等腰三角形的如下性质:

定理 1　等腰三角形的两底角相等. 简称“**等边对等角**”.

下面我们来证明定理 1.

已知: 如图 15-14(1), $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$.

求证: $\angle B = \angle C$.

证明　取 BC 的中点 D,连接 AD.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$\because \begin{cases} AB = AC, (\text{已知}) \\ AD = AD, (\text{公共边}) \\ BD = CD, (\text{已作}) \end{cases}$$

$\therefore\quad \triangle ABD \cong \triangle ACD.$（SSS）

$\therefore\quad \angle B = \angle C.$（全等三角形的对应角相等）

由上面的证明可得，$BD = DC$，$\angle BAD = \angle CAD$，$\angle ADB = \angle ADC = 90°$.

因此有如下的性质：

定理 2　等腰三角形顶角的平分线垂直平分底边.

由此可知，等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线和底边上的高“三线合一”.

根据定理 1 可得：

推论　等边三角形三个内角相等，每一个内角都等于 60°.

例 1　已知：如图 15 - 15，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle BAC = 120°$，点 D，E 是底边上两点，且 $BD = AD$，$CE = AE$. 求 $\angle DAE$ 的度数.

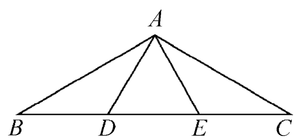


图　15－15

解　$\because\quad AB = AC$，（已知）

$\therefore\quad \angle B = \angle C.$（等边对等角）

$\therefore\quad \angle B = \angle C = \frac{1}{2} \times (180° - 120°) = 30°.$

又　$\because\quad BD = AD$，（已知）

$\therefore\quad \angle BAD = \angle B = 30°.$（等边对等角）

同理，$\angle CAE = \angle C = 30°.$

$\therefore\quad \angle DAE = \angle BAC - \angle BAD - \angle CAE$

$= 120° - 30° - 30°$

$= 60°.$

本例中去掉 $AB = AC$ 这个条件，能否求得 $\angle DAE$ 的度数？本题给你怎样的启示？

练习

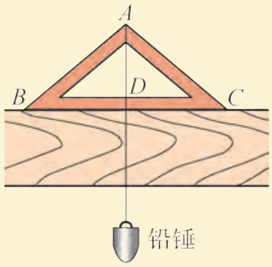
1. 填空：

（1）等腰直角三角形的每一个锐角的度数是________；

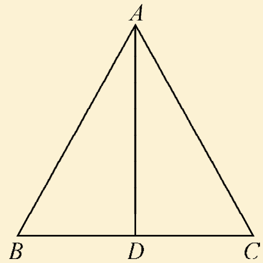
（2）如果等腰三角形的底角等于 40°，那么它的顶角的度数是________；

(3) 如果等腰三角形有一个内角等于80°,那么这个三角形的最小内角等于________.

2. 如图,用一块等腰三角板,在底边中点做一个记号 D;再从顶点悬下一个铅锤,把这块等腰三角板的底边放在屋梁上,看铅垂线是不是通过记号 D,就能检查屋梁是不是水平. 这是为什么?



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 填空:如图,在△ABC 中,$AB = AC$.

(1) ∵ $AD\perp BC$, ∴ ∠________ = ∠________, ________ = ________(等腰三角形底边上的高与________、________重合);

(2) ∵ AD 是中线,∴ ________ ⊥ ________, ∠________ = ∠________(等腰三角形底边上的中线与________、________重合);

(3) ∵ AD 是角平分线,∴ ________ ⊥ ________, ________ = ________(等腰三角形顶角平分线与________、________重合).

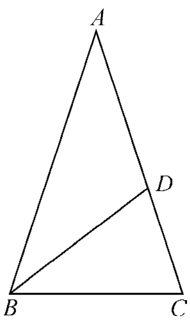


图 15-16

例 2 已知:如图 15-16,在△ABC 中,$AB = AC$,点 D 在 AC 上,且 $BD = BC = AD$,求∠A 和∠C 的度数.

解 ∵ $AB = AC$, $BD = BC = AD$,(已知)

∴ $\angle ABC = \angle C = \angle BDC$,

$\angle A = \angle ABD$. (等边对等角)

设 $\angle A = x°$,

则 $\angle BDC = \angle A + \angle ABD = 2x°$. (三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和)

∵ $\angle ABC = \angle C = \angle BDC = 2x°$,

∴ $x + 2x + 2x = 180$. (三角形内角和等于180°)

解方程,得 $x = 36$.

$\therefore \quad \angle A = 36°, \angle C = 72°.$

例 3　求证：斜边和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等.

本例是 14.2 节中已经学过的判定两个直角三角形全等的定理 "**HL**" 的证明.

已知：如图 15－17(1)，在 Rt△ABC 和 Rt△$A'B'C'$中，$\angle C = \angle C' = 90°$, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$.

求证：Rt△ABC≌Rt△$A'B'C'$.

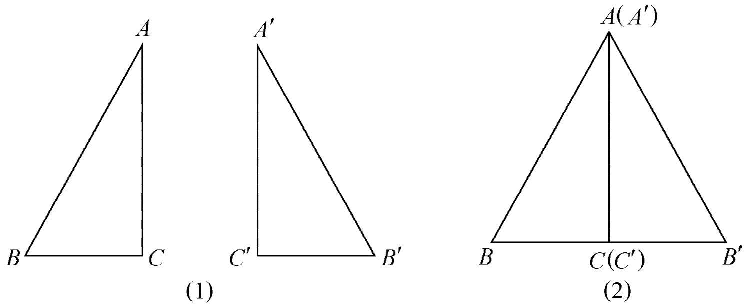


图　15－17

证明　在平面内移动 Rt△ABC 和 Rt△$A'B'C'$，使点 A 和点 A'、点 C 和点 C'重合，点 B 和点 B'在 AC 的两侧[图 15－17(2)].

$\because \quad \angle BCB' = 90° + 90° = 180°$，(等式性质)

$\therefore \quad B, C, B'$ 三点在一条直线上.(平角的定义)

在 △ABB' 中，

$\because \quad AB = AB'$，(已知)

$\therefore \quad \angle B = \angle B'$.(等边对等角)

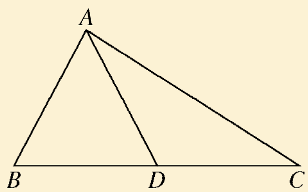
在 Rt△ABC 和 Rt△$A'B'C'$ 中，

$$\because \begin{cases} \angle ACB = \angle A'C'B', \text{(已知)} \\ \angle B = \angle B', \text{(已证)} \\ AB = A'B', \text{(已知)} \end{cases}$$

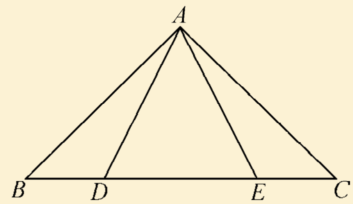
$\therefore$　Rt△ABC≌Rt△$A'B'C'$.(AAS)

练习

1. 已知：如图，D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的一点，且 $AB = BD = AD = DC$. 求 $\angle B$，$\angle C$，$\angle BAC$，$\angle DAC$ 的度数.

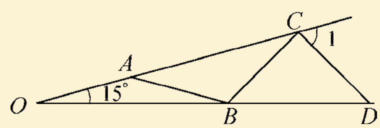


（第 1 题）

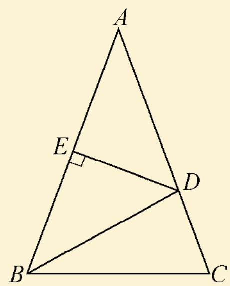


（第 2 题）

2. 已知：如图，点 D，E 在 $\triangle ABC$ 的底边 BC 上，$AB = AC$，$AD = AE$. 求证：$BD = CE$.
3. 已知：如图，$\angle AOB = 15°$，并且 $OA = AB = BC = CD$. 求 $\angle 1$ 的度数.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 已知：如图，$AB = AC$，AB 的垂直平分线 ED 交 AC 于点 D，$\angle A = 40°$. 求 $\angle DBC$ 的度数.

思考

“等腰三角形两个底角相等”的逆命题是真命题吗？请与你的同学研究讨论后作出判断.

定理　有两个角相等的三角形是等腰三角形. 简称

“等角对等边”.

已知：如图 15 - 18，在$\triangle ABC$中，$\angle B = \angle C$.

求证：$AB = AC$.

证明 过点 A 作 $AD \perp BC$，D 为垂足，

$\therefore \quad \angle ADB = \angle ADC = 90°$.（垂直定义）

在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle ADC$ 中，

$$\because \begin{cases} \angle B = \angle C,\text{（已知）} \\ \angle ADB = \angle ADC,\text{（已证）} \\ AD = AD,\text{（公共边）} \end{cases}$$

$\therefore \quad \triangle ADB \cong \triangle ADC$.（AAS）

$\therefore \quad AB = AC$.（全等三角形的对应边相等）

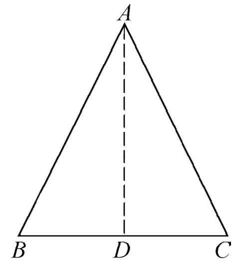


图 15-18

这个定理叫做等腰三角形的判定定理，它是判断一个三角形是否为等腰三角形的重要依据.

由上述定理可以直接得到：

推论 1 三个角都相等的三角形是等边三角形.

推论 2 有一个角是 60°的等腰三角形是等边三角形.

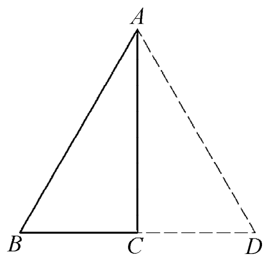


图 15-19

如图 15 - 19，在$\triangle ABC$中，$\angle C = 90°$，$\angle A = 30°$，延长 BC 到点 D，使 $CD = BC$. 连接 AD，则 $\triangle ACD \cong \triangle ACB$. $\therefore \quad AD = AB$，$\angle BAC = \angle DAC = 30°$，$\angle BAD = 60°$. 由推论 2，得 $\triangle ABD$ 是等边三角形，$\therefore \quad BD = AB$.

$$BC = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB.$$

于是有：

定理 在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半.

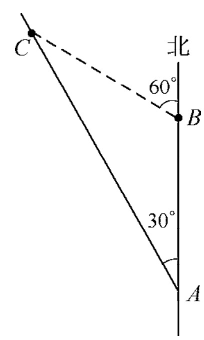


图 15-20

例 4 如图 15 - 20，一艘船从 A 处出发，以每时 10 n mile（海里）的速度向正北航行，从 A 处测得一礁石 C

在北偏西30°的方向上. 如果这艘船上午8:00从A处出发, 10:00到达B处,从B处测得礁石C在北偏西60°的方向上.

(1) 画出礁石C的位置;

(2) 求从B处到礁石C的距离.

解 (1) 以B为顶点,向北偏西60°作角,这角一边与AC交于点C,则点C为礁石所在地.

(2) $\because$ $\angle ACB = 60° - 30° = 30°$,(三角形的外角性质)

又 $\because$ $\angle BAC = 30°$,

$\therefore$ $\angle BCA = \angle BAC$.

$\therefore$ $BC = BA$.

$\because$ $BA = 10 \times (10 - 8) = 20$ (n mile),

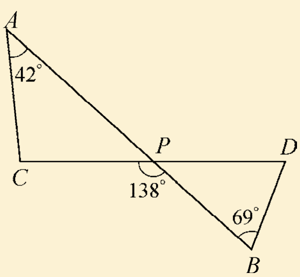
$\therefore$ $BC = 20$ (n mile).

即从B处到礁石C的距离是20 n mile.

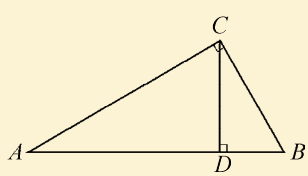
练习

1. 已知:如图,AB与CD交于点P, $CP = PD$, $\angle A = 42°$, $\angle CPB = 138°$, $\angle B = 69°$. 求证: $AC = PB$.

2. 已知: $\triangle ABC$中, $AB = AC$, AD平分$\angle BAC$交BC于点D,若$\angle B = 45°$, $BC = 10$ cm. 求AD的长度.



(第1题)

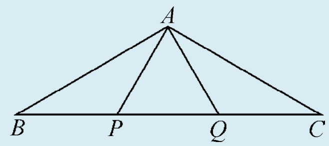


(第3题)

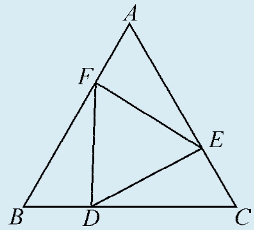
3. 已知:如图, $\triangle ABC$中, $\angle ACB = 90°$, CD是斜边上的高, $\angle A = 30°$. 求证: $BD = \frac{1}{4}AB$.

习题 15.3

1. 已知：P，Q 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上两点，并且 $BP=PQ=QC=AP=AQ$. 求 $\angle BAC$ 的度数.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，$\triangle ABC$ 为等边三角形，点 D，E，F 分别在 BC，CA，AB 上，且 $AF=BD=CE$.

   求证：$\triangle DEF$ 是等边三角形.

3. 求证：等腰三角形两个底角平分线的交点到底边两端点的距离相等.

4. 本节的例 4 中，这艘船到达 B 处后继续以原来速度向北航行，中午某时到达 B_1 处，从 B_1 处测得礁石 C 在南偏西 $60°$的方向上.

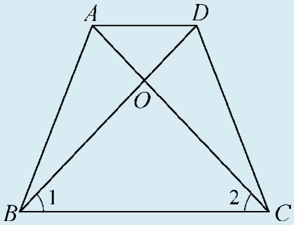
   （1）画出此时船的位置；

   （2）求从 B_1 处到礁石 C 的距离.

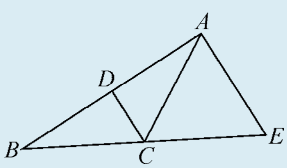
5. 已知：如图，$AC=DB$，$\angle 1=\angle 2$，AC 与 DB 相交于点 O.

   求证：（1）$AB=DC$；

   （2）$OA=OD$.



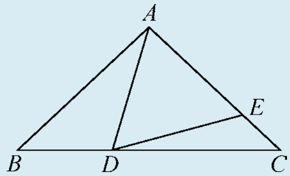
（第 5 题）



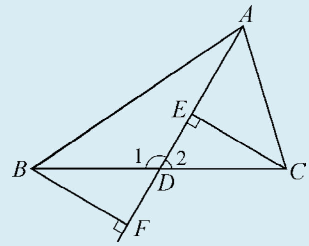
（第 6 题）

6. 已知：如图，CD 平分 $\angle ACB$，$AE \parallel DC$，交 BC 的延长线于点 E. 求证：$\triangle ACE$ 是等腰三角形.

7. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$AB = AC$，点D，E分别在边BC，AC上，$AD = AE$，若$\angle BAD = 30°$. 求$\angle EDC$的度数.



（第 7 题）

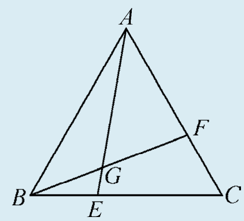


（第 8 题）

8. 已知：如图，AD是$\triangle ABC$的中线，$\angle 1 = 2\angle 2$. $CE \perp AD$，$BF \perp AD$，点E，F为垂足. 求证：$EF = BD$.

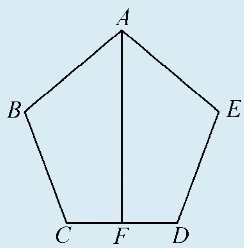
9. 已知：一个等腰三角形的底角等于$15°$，腰长为$2a$. 求腰上的高.

10. 已知：如图，点E，F分别在等边三角形ABC的边BC，CA上，$BE = CF$，AE与BF交于点G. 求$\angle AGF$的度数.

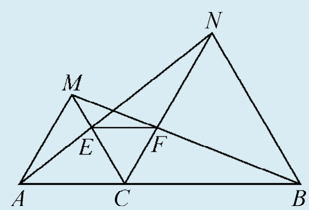


（第 10 题）

11. 已知：如图，$AB = AE$，$\angle B = \angle E$，$BC = ED$，F是CD的中点. 求证：$AF \perp CD$.



（第 11 题）



（第 12 题）

12. 已知：如图，点C为线段AB上一点，$\triangle ACM$和$\triangle CBN$是等边三角形，AN交CM于点E，BM交CN于点F.

求证：(1) $CE = CF$；

(2) $EF \parallel AB$.

15.4 角的平分线

问题　怎样作出角的平分线？

通过折纸可以作出一个角的角平分线. 在半透明纸上任画一个角，请你用折叠的方法，找出角的平分线，如图 15－21.

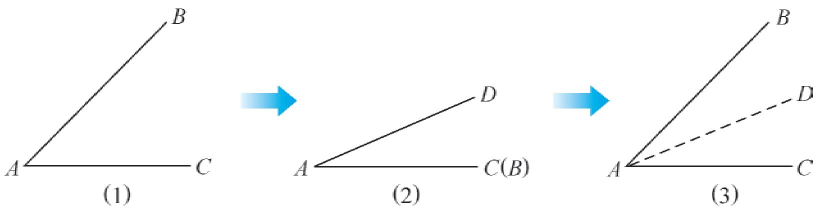


图　15－21

角是轴对称图形，角平分线所在的直线是它的对称轴.

也可以用量角器来画一个角的平分线.

下面介绍用尺规作图的方法作出 $\angle AOB$ 的平分线（图 15－22）.

作法：

1. 以 O 为圆心，任意长为半径画弧分别交 OA，OB 于点 M，N，如图 15－22(1).

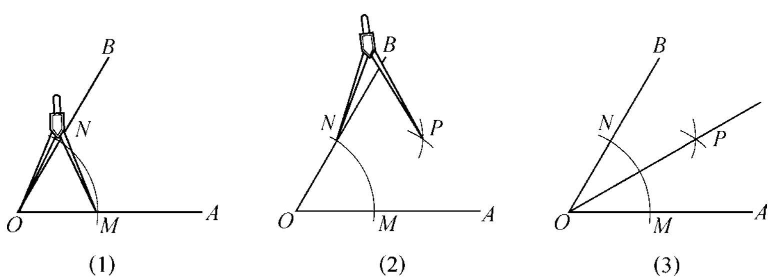


图　15－22

2. 分别以点 M, N 为圆心,以大于$\frac{1}{2}MN$长为半径(为什么?)在角的内部画弧交于点 P,如图 15-22(2).

3. 作射线 OP,则 OP 为所要求作的$\angle AOB$的平分线,如图 15-22(3).

思考

1. 根据作图,你能证明所作射线 OP,就是$\angle AOB$的平分线吗?

2. 当$\angle AOB$的两边成一直线时(即$\angle AOB = 180°$),你会作这个角的平分线吗?这时的角平分线与直线 AB 是什么关系?

通过上面作图,启发我们可以用尺规完成:“经过一点作已知直线的垂线.”

由于这一点可能在直线上或直线外,这个作图要分两种情况:

1. 经过已知直线上的一点作这条直线的垂线.

已知:直线 AB 和 AB 上一点 C[图 15-23(1)].

求作:AB 的垂线,使它经过点 C.

作法:

作平角 ACB 的平分线 CF.

直线 CF 就是所求作的垂线.

2. 经过已知直线外一点作这条直线的垂线.

已知:直线 AB 和 AB 外一点 C[图 15-23(2)].

求作:AB 的垂线,使它经过点 C.

作法:

(1) 任意取一点 K,使 K 和 C 在 AB 的两旁;

(2) 以点 C 为圆心,CK 长为半径作弧,交 AB 于点 D

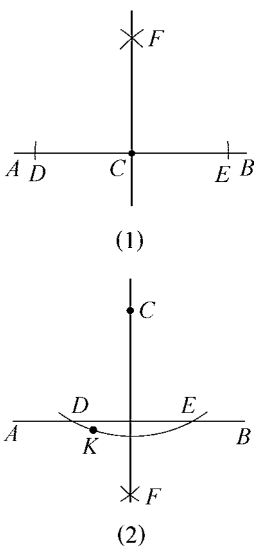


图 15-23

和 E；

（3）分别以点 D 和点 E 为圆心，大于$\frac{1}{2}DE$ 的长为半径作弧，两弧交于点 F；

（4）作直线 CF.

直线 CF 就是所求作的垂线.

思考

为什么这样作出的直线 CF 就是所求作的垂线？你能说说道理吗？

练习

在下面尺规作图中，了解作图道理，保留作图痕迹，不要求写作法.

1. 已知一直角边和斜边作直角三角形.
2. 已知底边及底边上的高作等腰三角形.

思考

如图 15－24，OP 是 $\angle AOB$ 的平分线，P 是 OP 上的任一点，过点 P 分别作 $PC \perp OA$，$PD \perp OB$，点 C，D 是垂足. 你能猜想 PC，PD 长度间有什么关系吗？证明你的猜想.

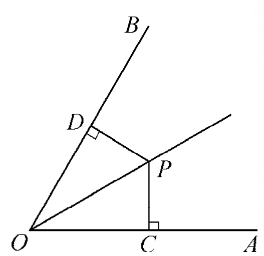


图 15－24

下面我们给出上面“思考”中猜想结论的证明.

证明 $\because$ OP 平分 $\angle AOB$,(已知)

$\therefore$ $\angle AOP = \angle BOP$.(角平分线定义)

又 $\because$ $PC \perp OA$, $PD \perp OB$,(已知)

$\therefore$ $\angle PCO = \angle PDO = 90°$.(垂直的定义)

在 $\triangle PCO$ 和 $\triangle PDO$ 中,

$$\because \begin{cases} \angle AOP = \angle BOP, & (\text{已证}) \\ \angle PCO = \angle PDO, & (\text{已证}) \\ OP = OP, & (\text{公共边}) \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle PCO \cong \triangle PDO$.($AAS$)

$\therefore$ $PC = PD$.

由上面证明,我们得到角平分线的性质定理:

定理 角平分线上的点到角两边的距离相等.

思考

写出上面角平分线性质定理的逆命题.

这个逆命题是真命题吗?如果是真命题请写出已知、求证,并给出证明.

定理 角的内部到角两边距离相等的点在角的平分线上.

练习

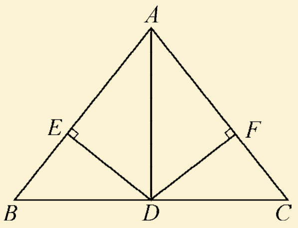
1. 已知:如图,$\triangle ABC$ 中,$AB = AC$, AD 是 $\angle BAC$ 的平分线,$DE \perp AB$, $DF \perp AC$,垂足分别为点 E, F. 判断下列结论是否正确:

(1) $DE = DF$. ( )

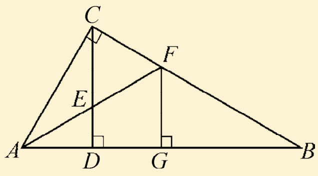
(2) $BD = CD$. ( )

(3) AD 上任一点到 AB, AC 的距离相等. ( )

(4) AD 上任一点到点 B, C 距离相等. ( )



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 已知：如图，CD 为 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 上的高，$\angle BAC$ 的平分线分别交 CD, CB 于点 E, F, $FG \perp AB$，垂足为点 G. 求证：$CE = FG$.

例　已知：如图 15－25，$\triangle ABC$ 中，$\angle B$ 的平分线 BE 与 $\angle C$ 的平分线 CF 相交于点 P.

求证：AP 平分 $\angle BAC$.

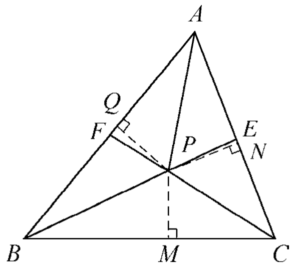


图　15−25

证明　过点 P 分别作 $PM \perp BC$, $PN \perp AC$, $PQ \perp AB$，垂足分别为点 M, N, Q.

$\because$　BE 是 $\angle B$ 的平分线，点 P 在 BE 上，(已知)

$\therefore$　$PQ = PM$.（角平分线上的点到角两边的距离相等）

同理，　$PN = PM$.

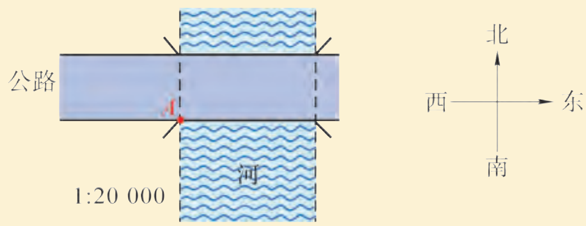
$\therefore$　$PN = PQ$.（等量代换）

$\therefore$　AP 平分 $\angle BAC$.（角的内部到角两边距离相等的点在角的平分线上）

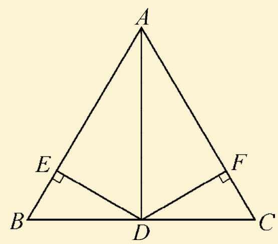
这个例子说明：三角形三条内角平分线相交于一点，这点到三角形三边的距离相等.

练习

1. 如图,一所学校在公路的南侧,在河的西岸,学校到公路边与到河沿的距离相等,且与河上公路桥西首的点 A 距离为 200 m. 请在图上标出学校的位置,并说明理由.



(第 1 题)

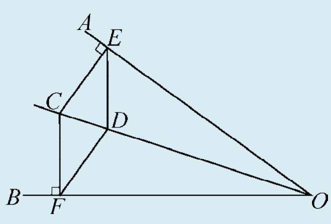


(第 2 题)

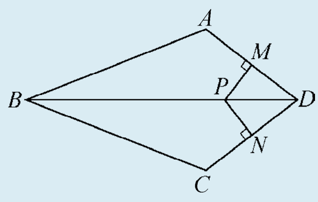
2. 如图,$\triangle ABC$ 中,AD 平分 $\angle BAC$, $DE \perp AB$ 于点 E, $DF \perp AC$ 于点 F, $BD = CD$.
求证: $\angle B = \angle C$.

习题 15.4

1. 已知:如图,C, D 是 $\angle AOB$ 平分线上的点, $CE \perp OA$,垂足为点 E, $CF \perp OB$,垂足为点 F. 求证: $\angle CDE = \angle CDF$.



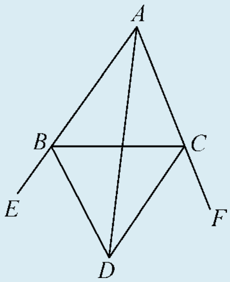
(第 1 题)



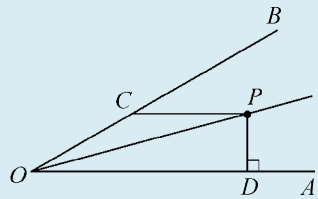
(第 2 题)

2. 已知:如图,BD 平分 $\angle ABC$, $AB = CB$,点 P 在 BD 上,$PM \perp AD$, $PN \perp CD$,点 M, N 为垂足.
求证: $PM = PN$.

3. 已知：如图，$\triangle ABC$ 的外角 $\angle EBC$，$\angle BCF$ 的平分线交于点 D. 求证：AD 是 $\angle BAC$ 的平分线.



（第 3 题）



（第 5 题）

4. 到三角形三边所在直线距离相等的点有几个？各是如何找到的？

5. 已知：如图，$\angle AOB=30°$，P 是 $\angle AOB$ 的平分线上一点，$PC \parallel OA$，交 OB 于点 C，$PD \perp OA$，垂足为点 D. 如果 $PC=4$，求 PD 的长.

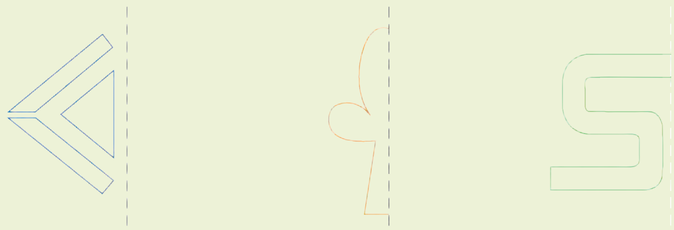
数学活动

剪　纸

剪纸是中国民间艺术的瑰宝之一. 节日的窗花、婚嫁彩车上的双“喜”都是通过剪纸得到的. 剪纸是轴对称变换在实际生活中的运用.

1. 收集 1～2 个具有轴对称性质的剪纸图案，观察它是怎样“剪”出来的.

2. 取一张宽 5 cm、长 24 cm 的白纸片，把它纵向对折（折痕与白纸片的长边垂直），对折 3 次后，在折叠好的纸片上画出图 15－26 中的某一图案（或自己重新设计图案）. 再用剪刀沿轮廓线剪去所画图案（折叠线处应保留一小条，为什么？），将所叠纸片展开就得到一段花边.



(1)　　(2)　　(3)

图　15-26

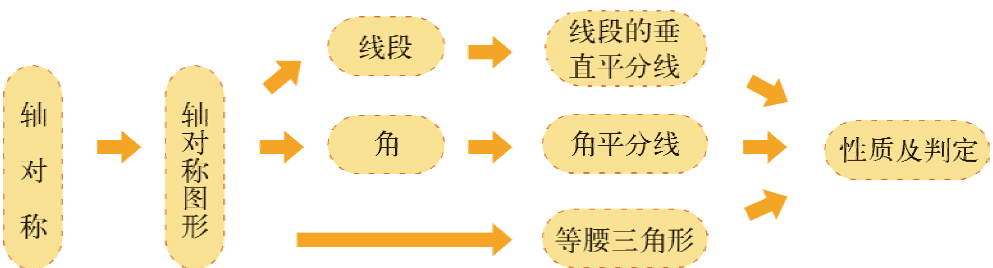
（1）把花边铺平在另一张较大的白纸上，花边中相邻的图案有什么关系？

我们通过折叠剪纸得到的花边图案，也可以看作是基本图案连续向左（或向右）平移得到的.

（2）自己设计一个图案，并作出相应的剪纸，同学之间相互交流和欣赏对方的作品.

小结·评价

一、内容整理



二、主要知识回顾

1. 轴对称通常指______个图形关于某一条直线对称. 轴对称图形通常指______个图形关于某一条直线对称.

2. 轴对称和轴对称图形中，对应点的连线被______垂直平分.

3. 一般地，点 $P(x, y)$ 关于 x 轴对称的点的坐标是（______，______），关

于 y 轴对称的点的坐标是(______，______).

三、自评与互评

1. 建议你与同学运用轴对称变换设计图案，并相互交流，评选出较好作品.

2. 线段、角、等腰三角形是基本的轴对称图形. 对它们的性质，你掌握得如何？

A组 复习题

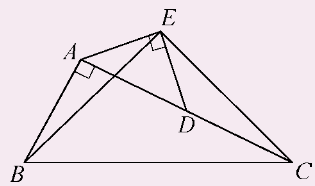
1. 已知：点 $A(a, b)$ 与点 $B(c, d)$.

   (1) 如果点 A，B 关于 y 轴对称，那么 a，b，c，d 应满足什么条件？

   (2) 如果点 A，B 关于 x 轴对称，那么 a，b，c，d 应满足什么条件？

2. 直线 l 与直线 $y=2x$ 关于 y 轴对称，写出直线 l 所表示的函数表达式.

3. 已知：如图，在△ABC 中，$\angle BAC=90°$，$AC=2AB$，点 D 是 AC 的中点. △EAD 为等腰直角三角形，$\angle AED=90°$. 试猜想线段 BE 和 EC 的关系，并证明你的猜想.

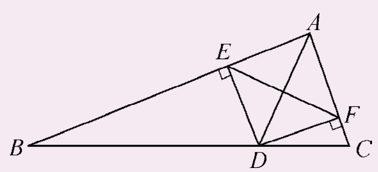


(第 3 题)

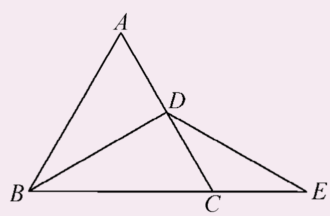
4. 已知：△ABC 中，$AB=AC$，AD 是 BC 边上中线，AB 的垂直平分线交 AD 于点 O，$\angle B$ 的平分线交 AD 于点 I. 求证：

   (1) $OA=OB=OC$；(2) 点 I 到 BC，CA，AB 的距离相等.

5. 已知：如图，AD 是△ABC 的角平分线，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，点 E，F 为垂足. 求证：AD 垂直平分 EF.



(第 5 题)

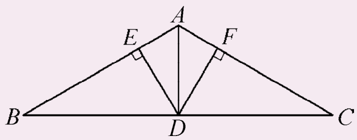


(第 6 题)

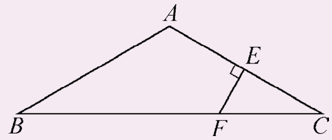
6. 已知：如图，△ABC 是等边三角形，BD 是中线. 点 E 在 BC 的延长线上，使 $CE=CD$. 求证：$DB=DE$.

7. 求证：有两条高相等的三角形是等腰三角形.

8. 已知：如图，$\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 边上的高，$AB = AC$，$\angle BAC = 120°$，$DE \perp AB$，$DF \perp AC$，垂足分别是 E，F. 求证：$DE + DF = \frac{1}{2}BC$.



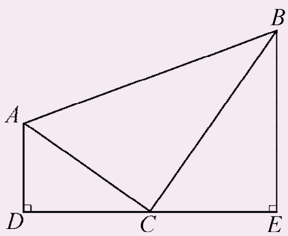
（第 8 题）



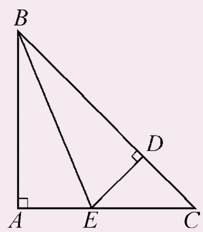
（第 9 题）

9. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，$\angle A = 120°$，AC 的垂直平分线 EF 交 AC 于点 E、交 BC 于点 F. 求证：$BF = 2CF$.

10. 已知：如图，$AD \perp DE$，$BE \perp DE$，AC，BC 分别平分 $\angle DAB$，$\angle ABE$，点 C 在线段 DE 上. 求证：$AB = AD + BE$.



（第 10 题）



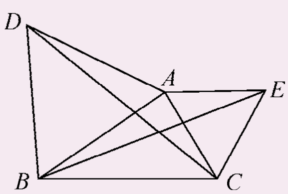
（第 11 题）

11. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A = 90°$，$AB = AC$，点 D 在 BC 上，$BD = AB$，作 $DE \perp BC$，点 E 在边 AC 上. 求证：

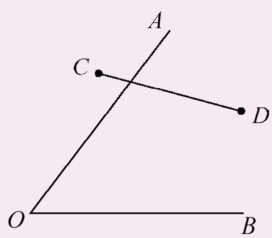
（1）BE 平分 $\angle ABC$；　　（2）$AE = ED = DC$.

12. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，以它的边 AB，AC 为边，分别在形外作等边三角形 ABD，ACE，连接 BE，DC.

求证：$BE = DC$.



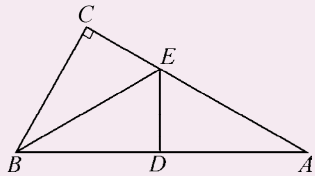
（第 12 题）



（第 13 题）

13. 已知：如图，线段 CD 与 $\angle AOB$，通过作图求一点 P，使 $PC = PD$，并且点 P 到 $\angle AOB$ 两边的距离相等.

14. 已知：如图，Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，沿过点 B 的一条直线 BE 折叠这个三角形，使点 C 与边 AB 上的点 D 重合. 要使 D 恰好为 AB 的中点，问还需增加一个什么条件？说出你增加的条件及依据.



（第 14 题）

B组 复习题

1. 根据下列点的坐标的变化，判断它们进行了怎样的变换？

   （1）$(-3,\ -1)\to(3,\ -1)$；

   （2）$(-5,\ 6)\to(-5,\ 1)$；

   （3）$(4,\ 3)\to(4,\ -3)$；

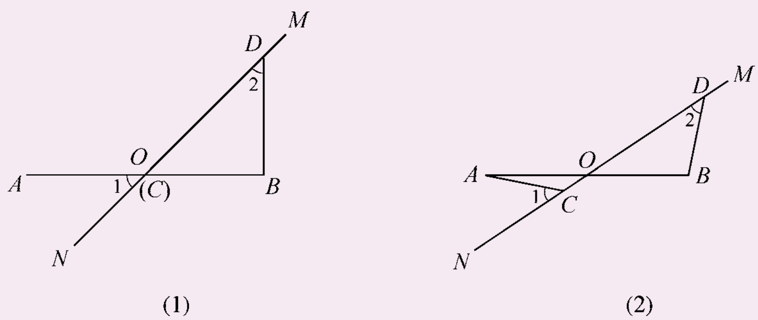
   （4）$(2,\ -3)\to(3,\ -2)$.

2. BD 是△ABC 的角平分线，BD 的垂直平分线交 CA 的延长线于点 E. 求证：$\angle EAB=\angle EBC$.

3. 已知：O 是线段 AB 的中点，直线 MN 经过点 O，点 C，D 在直线 MN 上，$\angle 1=\angle 2=45°$.

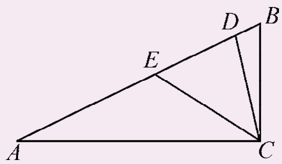
   （1）若点 C 与点 O 重合[图(1)]，请直接写出 AC 与 BD 的数量关系和位置关系；

   （2）若点 C，D 不与点 O 重合[图(2)]，求证：$AC=BD$，$AC\perp BD$.

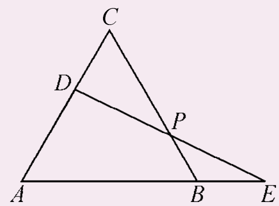


（第 3 题）

4. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，D，E是边AB上的两点，且$AD=AC$，$BE=BC$. 求证：$\angle DCE=45°$.



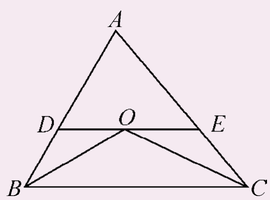
（第 4 题）



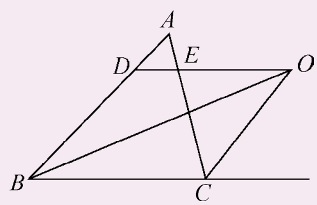
（第 5 题）

5. 已知：如图，点D在等边三角形ABC的边AC上，点E在边AB的延长线上，使$BE=CD$，DE交BC于点P. 求证：$PD=PE$.

6. (1) 已知：如图(1)，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC$，$\angle ACB$的平分线交于点O，过点O的直线$DE\parallel BC$，DE分别与AB，AC交于点D，E.
求证：$BD+CE=DE$.



(1)



(2)

（第 6 题）

(2) 将(1)题条件“$\angle ACB$的平分线”改为“$\angle ACB$的外角平分线”，如图(2)所示. 原来的关系式$BD+CE=DE$还成立吗？如果不成立，你能推断出BD，CE，DE存在的数量关系式吗？请证明你的推断.

C组 复习题

1. 已知：等腰三角形ABC中，$AB=AC$.

（1）P 为底边 BC 上任一点，自点 P 向两腰所在直线作垂线 PE，PF，点 E，F 为垂足. 求证：$PE+PF$ 等于定值；

（2）证得(1)中结论后，请你对本章 A 组复习题第 8 题的条件和你原来的证明方法进行反思；

（3）若点 P 在底边 BC 延长线上时，情况如何？

2. 已知：等边三角形 ABC.

（1）P 为 $\triangle ABC$ 内任一点，自点 P 向三边所在直线作垂线 PD，PE，PF，点 D，E，F 为垂足. 求证：$PD+PE+PF$ 等于定值；

（2）若点 P 在 $\triangle ABC$ 外时，情况如何？

附录　部分中英文词汇索引

（续表）

中　　文	英　　文	页　码
全等三角形	congruent triangles	94
轴对称图形	symmetric figure	119
对称轴	axis of symmetry	119
垂直平分线	perpendicular bisector	121

后 记

1999 年，我们根据《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲（试用修订版）》，编写了一套华东版初中数学教材，经三年实验后，于 2002 年报教育部经全国中小学教材审定委员会审查通过.

2001 年，国家颁布了《基础教育课程改革纲要（试行）》及《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》，正式启动了新一轮中小学课程、教材改革. 本套教科书就是根据课程标准，在吸取了华东版教材实验过程中的经验后重新编写的，并于 2004 年经全国中小学教材审定委员会初审通过. 现教育部决定全面启动义务教育课程标准实验教材的修订工作，我们已切实把《义务教育数学课程标准（2011 年版）》的要求落实到新修订的教材中，使教材的质量进一步得到提升，特色更加鲜明.

本套教材在送审和实验过程中，得到了许多专家、学者、教研人员与广大师生的关爱，特别是人民教育出版社张孝达先生与陈宏伯先生直接参与教材的整体设计和章节审稿，他们以实际行动给予我们很大的支持与鼓舞，我们衷心地感谢他们.

为了做好这次的修订工作，我们调整并充实了编写队伍，本套教科书编写组主要人员有：

吴之季　苏　淳　杜先能　徐子华　郭要红　胡　涛　陈先荣　王南林
胡茂侠　邱广东

本册主要编写人员有：

贾　兵　陶学礼　于学杰　董建功　纪迎春　胡茂侠　程乐根　王　锐
龚维陆　孙　滨　杨惠卿　王志刚

此外，参与本册修改工作的还有：

周家敏　刘文合　何　钧　杨光辉　李海涛　郭良才　汪宗兴　罗为民
杨　辉　高道才　范宏业

教材建设是一项长期任务，需要通过实验、修改，反复锤炼. 这不仅需要全体编写人员的努力，还要有广大师生的积极支持与参与，恳请使用本套教材的师生批评指正.

新时代数学编写组

2013 年 4 月

说　明

本书下列图片由东方IC提供：图12－6(1) robertharding、图12－29 LEON NEAL、P61第6题图、P65第3题图amana、P117章头图方框、图15－1祈年殿amana.

绿色印刷产品

审批编号：皖费核（2021年秋季）第0107号
举报电话：12315

ISBN 978-7-5478-1799-5
9 787547 817995
06
定价：10.42元