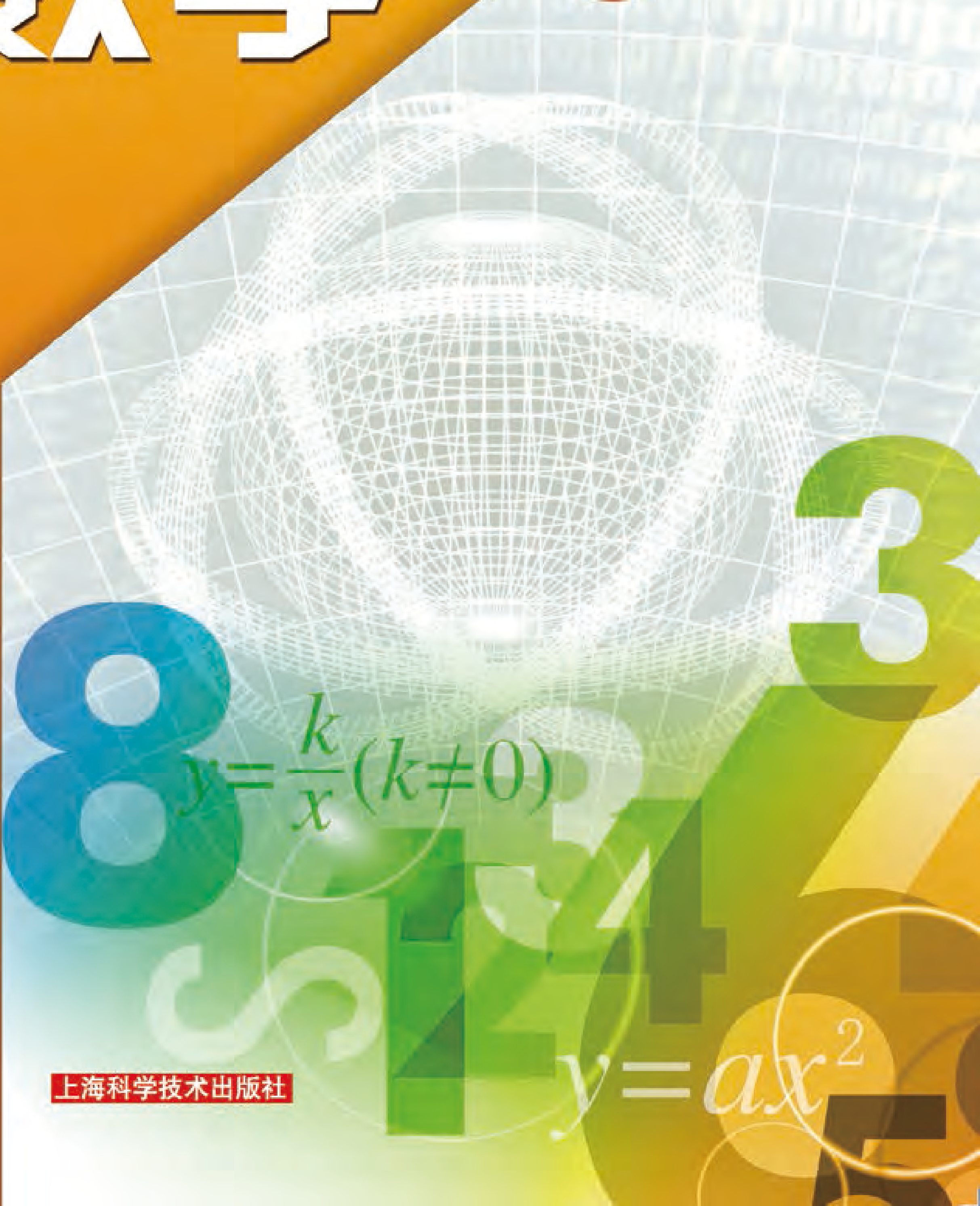
教育部审定 2013

义务教育教科书

数学

九年级 上册



上海科学技术出版社

义 务 教 育 教 科 书

数 学

九年级 上册

新时代数学编写组 编著

上海科学技术出版社

主　　编　吴之季　苏　淳

副 主 编　杜先能　徐子华

本册主编　徐子华

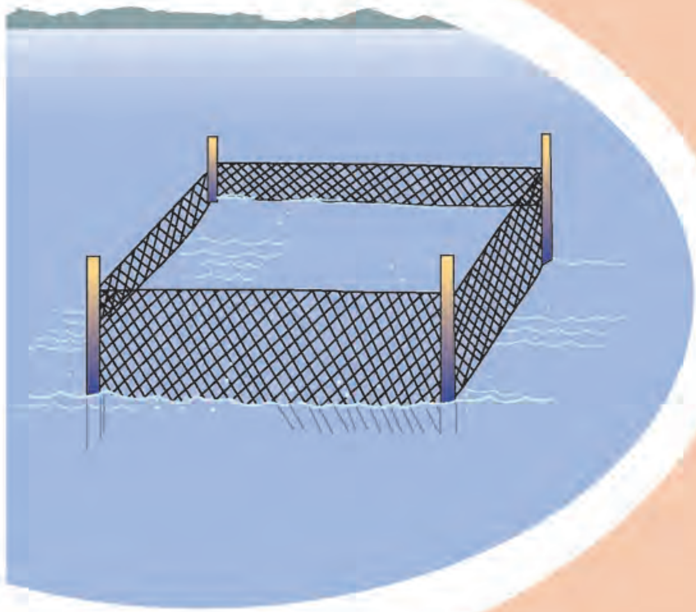
策划编辑　苏德敏
责任编辑　吴　敏
美术编辑　陈　蕾

义务教育教科书
数　学
九年级　上册
新时代数学编写组　编著
上海世纪出版(集团)有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社　出版
(上海市钦州南路71号　邮政编码200235)
新华书店发行
安徽新华印刷股份有限公司印刷
开本 787×1092　1/16　印张 9.25　字数 151 000
2014年6月第1版　2021年6月第11次印刷
ISBN 978－7－5478－2170－1/G·504
定价:9.47元

如发现印装质量问题或对内容有意见建议,请与本社联系
电话:021－64848025,邮箱:jc@sstp.cn
审批编号:皖费核(2021年秋季)第0101号　举报电话:12315

目　录

第21章 二次函数与反比例函数



某水产养殖户用长 40 m 的围网，在水库中围一块矩形的水面，投放鱼苗. 设围成的矩形水面的一边长为 x m，面积为 S m^2，那么，S 与 x 之间有怎样的函数关系？要使围成的水面面积最大，则它的一边长应是多少米？

$$S = x(20 - x).$$

某市距省城 248 km，汽车行驶全程所需的时间 t h 与平均速度 v km/h 之间有怎样的函数关系？

$$t = \frac{248}{v}.$$

本章我们将学习两种函数——二次函数与反比例函数，并应用它们解决一些简单的实际问题.

21.1 二次函数

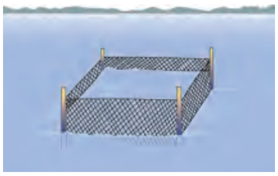


图 21-1

问题❶ 某水产养殖户用长 40 m 的围网，在水库中围一块矩形的水面，投放鱼苗(图 21－1)．要使围成的水面面积最大，则它的边长应是多少米？

这个问题首先要找出围成的矩形水面面积与其边长之间的关系．

设围成的矩形水面的一边长为 x m，那么，矩形水面的另一边长应为 $(20-x)$ m．若它的面积是 S m^2，则有

$$S=x(20-x).$$

这里 x 的取值有什么限制？

问题❷ 有一玩具厂，如果安排装配工 15 人，那么每人每天可装配玩具 190 个；如果增加人数，那么每增加 1 人，可使每人每天少装配玩具 10 个．问增加多少人才能使每天装配玩具总数最多？玩具总数最多是多少？

设增加 x 人，这时，则共有 $(15+x)$ 个装配工，每人每天可少装配 $10x$ 个玩具，因此，每人每天只装配 $(190-10x)$ 个玩具．所以，增加人数后，每天装配玩具总数 y 可表示为

$$y=(190-10x)(15+x).$$

在问题❶中，函数的表达式为

$$\begin{aligned} S&=x(20-x)\\ &=-x^2+20x. \end{aligned}$$

在问题❷中，函数的表达式为

$$\begin{aligned} y&=(190-10x)(15+x)\\ &=-10x^2+40x+2\,850. \end{aligned}$$

这两个问题中，函数的表达式是自变量的二次式.

一般地，表达式形如 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，且 $a\neq 0$）的函数叫做 x 的**二次函数**（quadratic function），其中 x 是自变量.

二次函数自变量的取值范围一般都是全体实数，但是在实际问题中，自变量的取值范围应使实际问题有意义. 如问题❶中，$0<x<20$，因为矩形的两边之和是 20 m.

练习

1. 设圆的半径为 r，请填空：

   （1）这个圆的周长 $C=$________，它是 r 的________函数；

   （2）这个圆的面积 $S=$________，它是 r 的________函数.

2. 在下列表达式中，哪些是二次函数？

   （1）正常情况下，一个人在运动时每分所能承受的最高心跳次数 b 与这个人的年龄 a 之间的关系可表示为
   $$b=0.8(220-a);$$

   （2）圆锥的高为 h，它的体积 V 与底面半径 r 之间的关系可表示为
   $$V=\frac{1}{3}\pi r^2h\quad（h\text{ 为定值}）;$$

   （3）物体自由下落时，下落高度 h 与下落时间 t 之间的关系可表示为
   $$h=\frac{1}{2}gt^2\quad（g\text{ 为定值}）;$$

   （4）导线的电阻为 R，当导线中有电流通过时，电功率 P 与电流 I 之间的关系可表示为
   $$P=RI^2\quad（R\text{ 为定值}）.$$

习题 21.1

1. 在下列表达式中，x 为自变量，问哪些是二次函数？

$y=3x^2-1$，　$y=5x^2-2x$，　$y=-2x^2+x-1$，

$y=4-x^3$，　$y=\dfrac{1}{x^2}$，　$y=2x^2+\dfrac{1}{x}$，　$y=(x-2)(2x+1)$.

2. 正方形的边长为 5，如果边长增加 x，那么面积增加 y，求 y 与 x 之间的函数表达式.
3. 长方体的长与宽均为 x，高为 8，求长方体表面积 S 与 x 之间的函数表达式.
4. 从已知半径为 R 的圆板上挖掉一个半径为 r（$r<R$）的同心圆板，求所剩圆环面积 S 与 r 之间的函数表达式.
5. 在一块一边长为 35 m、另一边长为 20 m 的矩形空地上修建花坛，如果在四周留出宽度为 x m 的小路，中间花坛面积为 y m^2，求 y 与 x 之间的函数表达式.
6. 某商场今年一月份销售额为 50 万元，二、三月份平均每月销售增长率为 x，求三月份销售额 y 与 x 之间的函数表达式.

21.2 二次函数的图象和性质

1. 二次函数 $y = ax^2$ 的图象和性质

一次函数的图象是一条直线，二次函数的图象是什么形状呢？它又有什么性质？

下面我们先来研究最简单的二次函数 $y = x^2$.

例 1 画出二次函数 $y = x^2$ 的图象.

解 列表：由于自变量 x 可以取任意实数，因此以 0 为中心选 x 的一些值列表.

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
$y=x^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…

描点：根据上表中各列 x，y 的数值在平面直角坐标系中描点 (x, y).

描点后，相邻两点间能用线段连接吗？

连线：用平滑曲线顺次连接各点，得二次函数 $y = x^2$ 的

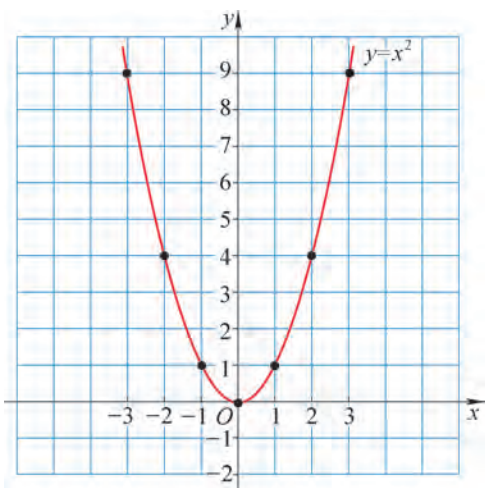


图 21-2

图象，如图 21－2.

观察

观察二次函数 $y=x^2$ 的图象（图21－2），回答下列问题.

(1) 图象是轴对称图形吗？如果是，它的对称轴是什么？

(2) 图象有最低点吗？如果有，最低点的坐标是什么？

(3) 当 $x<0$ 时，随着 x 的增大，函数 y 如何变化？当 $x>0$ 时呢？

从上述观察中，我们可以看到，函数 $y=x^2$ 的图象是一条关于 y 轴对称的曲线，我们把这条曲线叫做**抛物线**(parabola). 函数 $y=x^2$ 的图象可以简称为抛物线 $y=x^2$.

由图 21－2 可知：抛物线 $y=x^2$ 的**开口向上**；y 轴（直线 $x=0$）是它的**对称轴**；对称轴与抛物线的交点是抛物线的**顶点**，顶点的坐标为 $(0, 0)$.

从图上看，抛物线 $y=x^2$ 的顶点也是图象的**最低点**，也就是说，当 $x\neq 0$ 时，对应的 y 均大于0；当 $x=0$ 时，对应的 $y=0$ 是该函数的最小函数值（这时可记作 $y_{最小值}=0$）.

还可以看到，在 y 轴左侧，抛物线是下降的，即当 $x<0$ 时，随着 x 的增大，函数 y 减小；在 y 轴右侧，抛物线是上升的，即当 $x>0$ 时，随着 x 的增大，函数 y 也增大.

例2 在同一平面直角坐标系中，画出函数 $y=\frac{1}{2}x^2$、$y=2x^2$ 的图象.

解 列表：

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	…	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8	…

x	…	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	…
$y=2x^2$	…	8	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5	8	…

描点、连线，即得这两个函数的图象，如图 21－3.

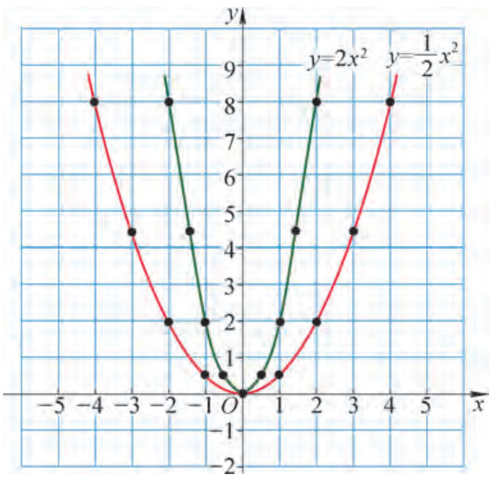
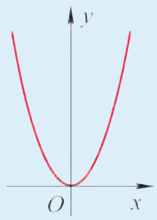


图　21－3

探究

1. 观察二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=2x^2$ 的图象，分别指出它们的开口方向、对称轴和顶点坐标；再指出图象有最高点还是有最低点？图象何时上升、下降？

2. 你能根据函数 $y=x^2$、$y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=2x^2$ 的图象的共同特点，总结出二次函数 $y=ax^2(a>0)$ 的性质吗？

<table>
<tr><th colspan="4">二次函数 $y=ax^2(a>0)$</th></tr>
<tr><th>图象的形状</th><th colspan="2">图象的特点</th><th>函数的性质</th></tr>
<tr><td rowspan="4">$y=ax^2(a>0)$
</td><td>1.</td><td>向 x 轴左右方向无限延伸</td><td>自变量 x 的取值范围是全体实数</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>是轴对称图形,对称轴是 y 轴</td><td>对于 x 和 $-x$ 可得到相同的函数 y</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>在 y 轴左侧是下降的,在 y 轴右侧是上升的</td><td>当 $x<0$ 时,函数 y 随 x 的增大而减小;
当 $x>0$ 时,函数 y 随 x 的增大而增大</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>顶点就是原点(0,0),顶点是图象的最低点. 开口向上,图象向上无限延伸</td><td>当 $x=0$ 时,函数取得最小值,$y_{最小值}=0$,且 y 没有最大值,即 $y\geq 0$</td></tr>
</table>

3. 仿例 1、例 2 在同一平面直角坐标系中,画出函数 $y=-x^2$、$y=-\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=-2x^2$ 的图象,分别指出它们的开口方向、对称轴和顶点坐标;再指出图象有最高点还是最低点? 图象何时上升、下降?

列表:

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=-x^2$	…	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	…

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$y=-\frac{1}{2}x^2$	…										…

x	…	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	…
$y=-2x^2$	…										…

描点、连线,得这三个函数的图象(图 21-4).

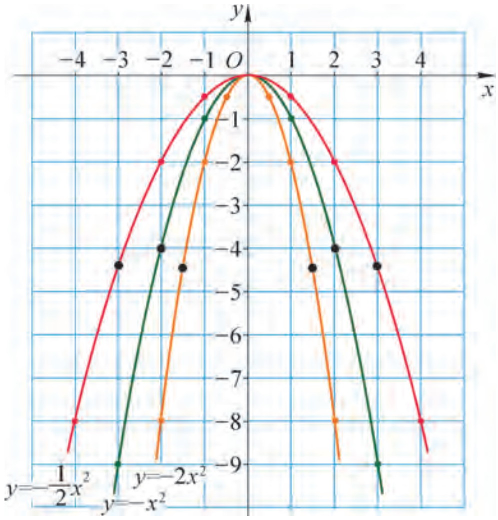
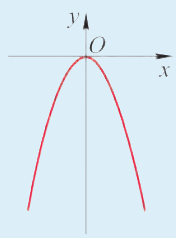


图　21−4

4. 根据函数 $y=-x^2$、$y=-\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=-2x^2$ 的图象特点，仿照上面的表格，总结出二次函数 $y=ax^2(a<0)$ 的性质.

二次函数 $y=ax^2(a<0)$			
图象的形状	图象的特点		函数的性质
$y=ax^2(a<0)$ 	1.		
	2.		
	3.		
	4.		

5. 分别比较函数 $y=x^2$ 与 $y=-x^2$、$y=\frac{1}{2}x^2$ 与 $y=-\frac{1}{2}x^2$、$y=2x^2$ 与 $y=-2x^2$ 的图象，指出它们之间相同与不同之处.

思考

1. 当 $a>0$ 时，函数 $y=ax^2$ 的图象与 $a<0$ 时有什么不同？

2. $|a|$的大小对函数 $y=ax^2$ 的图象的开口大小有什么影响？

一般地，二次函数 $y=ax^2$ 的图象都是抛物线，因此，二次函数 $y=ax^2$ 的图象可以简称为抛物线 $y=ax^2$.

练习

1. (1) 在同一平面直角坐标系中，画出函数 $y=\frac{1}{3}x^2$、$y=-\frac{1}{3}x^2$、$y=3x^2$、$y=-3x^2$ 的图象；

   (2) 观察上述图象，并说出图象的顶点坐标、开口方向、对称轴；

   (3) 说出各图象中的最高点或最低点的坐标；

   (4) 说明各函数图象在对称轴两侧部分，函数 y 随 x 增大而变化的情况.

2. 在下列抛物线中，开口最大、最小的各是哪一个？

   $y=-\frac{1}{3}x^2$、$y=-\frac{1}{2}x^2$、$y=\frac{5}{3}x^2$、$y=(2+\sqrt{2})x^2$.

3. 在同一平面直角坐标系中，下列各组中两个函数的图象有怎样的位置关系？

   (1) $y=-2x^2$ 与 $y=2x^2$；

   (2) $y=3x^2$ 与 $y=-3x^2$；

   (3) $y=ax^2$ 与 $y=-ax^2$.

4. 画出函数 $y=x^2$ 的图象，并根据图象求：

   (1) 当 $x=2$，-1.7 时的 y 值(精确到 0.1)；

   (2) 当 $y=2$，5.8 时的 x 值(精确到 0.1)；

   (3) 图象上最低点的坐标.

5. 二次函数 $y = ax^2$ 的图象经过点 $(2, -2)$.

(1) 求这个函数的表达式;

(2) 当 x 为何值时,函数 y 随 x 的增大而增大?

2. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象和性质

问题❶ 在同一平面直角坐标系中,怎样画出函数 $y = 2x^2$、$y = 2x^2 + 1$ 和 $y = 2x^2 - 1$ 的图象?

列表:

x	…	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	…
$y = 2x^2$	…										…
$y = 2x^2 + 1$	…										…
$y = 2x^2 - 1$	…										…

描点、连线,即得各函数的图象(请补全上述表格和图 21-5).

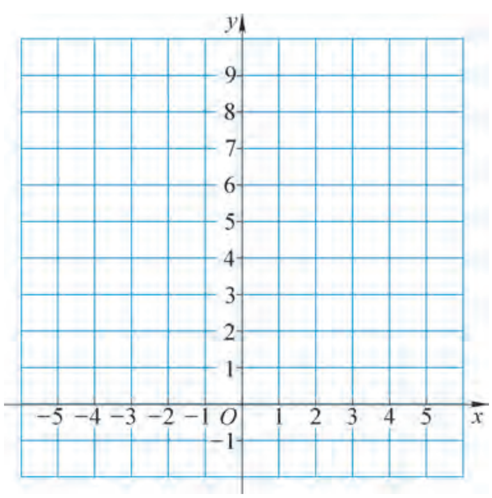


图 21-5

观察

观察 $y=2x^2$、$y=2x^2+1$ 和 $y=2x^2-1$ 三个函数的图象(图 21－5),回答下列问题.

(1) 这三个函数图象的开口方向如何?顶点坐标、对称轴分别是什么?

(2) 对于同一个 x,这三个函数对应的 y 之间有什么关系?这三个函数的图象在位置上有什么关系?

(3) 当 x 分别取何值时,这三个函数取得最小值?最小值分别是多少?

由图象可知,抛物线 $y=ax^2+k$ 与 $y=ax^2$ 的形状、开口大小和开口方向相同,只是位置不同. 抛物线 $y=ax^2+k$ 可由抛物线 $y=ax^2$ 沿 y 轴方向平移 $|k|$ 个单位得到,当 $k>0$ 时,向上平移;当 $k<0$ 时,向下平移.

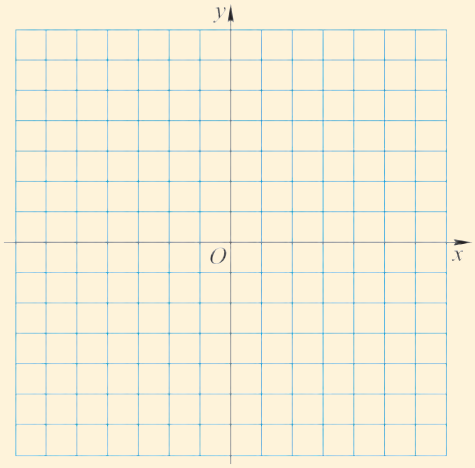
练习

1. 在同一平面直角坐标系中,画出函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$、$y=-\frac{1}{2}x^2-1$ 和 $y=-\frac{1}{2}x^2+1$ 的图象.

(1) 填表:

x	…								…
$y=-\frac{1}{2}x^2$	…								…
$y=-\frac{1}{2}x^2-1$	…								…
$y=-\frac{1}{2}x^2+1$	…								…

（2）描点、连线：



（第 1 题）

2. 观察第 1 题所画的图象，并填空：

（1）抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2-1$ 的开口方向是________，顶点坐标是（____，____），对称轴是______，抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2-1$ 可由抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向________平移________个单位得到；

（2）对于函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+1$，当 $x>0$ 时，函数 y 随 x 的增大而____；当 $x<0$ 时，函数 y 随 x 的增大而________；

（3）对于函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$，当 $x=$________时，函数取得最________值，$y_{最}$___$=$________；

对于函数 $y=-\frac{1}{2}x^2-1$，当 $x=$________时，函数取得最________值，$y_{最}$___$=$________；

对于函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+1$，当 $x=$________时，函数取得最________值，$y_{最}$___$=$________.

3. 将抛物线 $y=3x^2$ 向上平移 2 个单位后得到新抛物线，其对应的函数表达式是什么？

问题❷　在同一平面直角坐标系中，怎样画出函数 $y=x^2$、$y=(x-1)^2$ 和 $y=(x+1)^2$ 的图象？

填表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=x^2$	…								…
$y=(x-1)^2$	…								…
$y=(x+1)^2$	…								…

描点、连线，即得各函数的图象（请补全上述表格和图 21－6）.

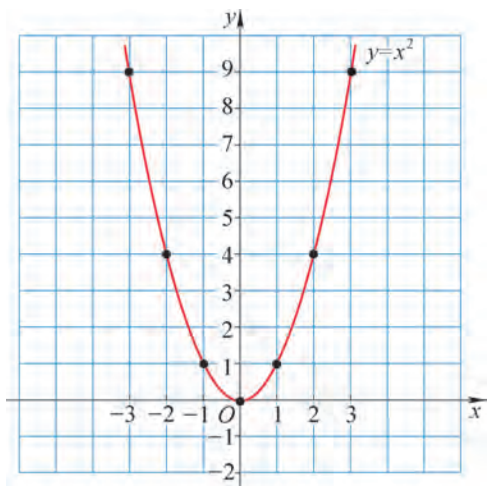


图　21－6

观察

观察 $y=x^2$、$y=(x-1)^2$ 和 $y=(x+1)^2$ 三个函数的图象（图 21－6），回答下列问题.

（1）这三个函数图象的开口方向如何？顶点坐标、对称轴分别是什么？

（2）对于同一个 y 值，这三个函数对应的 x 值之间有什么关系？这三个函数的图象在位置上有什么关系？

(3) 当 x 分别取何值时，这三个函数取得最小值？最小值分别是多少？

由图象可知，抛物线 $y=a(x+h)^2$ 与 $y=ax^2$ 的形状、开口大小和开口方向相同，只是位置不同. 抛物线 $y=a(x+h)^2$ 可由抛物线 $y=ax^2$ 沿 x 轴方向平移 $|h|$ 个单位得到，当 $h>0$ 时，向左平移；当 $h<0$ 时，向右平移.

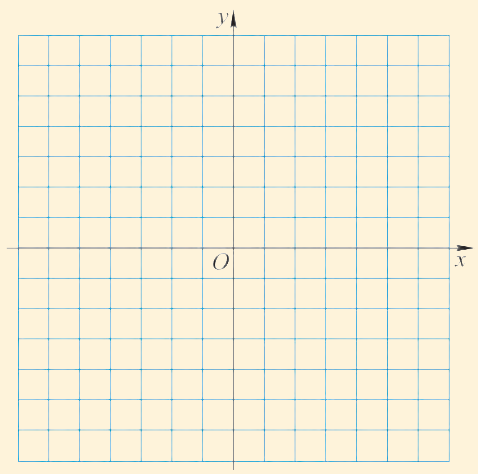
练习

1. 在同一平面直角坐标系中，画出函数 $y=-\frac{1}{3}x^2$、$y=-\frac{1}{3}(x+2)^2$ 和 $y=-\frac{1}{3}(x-2)^2$ 的图象.

(1) 填表：

x	…								…
$y=-\frac{1}{3}x^2$	…								…
$y=-\frac{1}{3}(x+2)^2$	…								…
$y=-\frac{1}{3}(x-2)^2$	…								…

(2) 描点、连线：



(第 1 题)

2. 观察第1题所画的图象，并填空：

抛物线 $y=-\frac{1}{3}(x+2)^2$ 的开口方向是________，顶点坐标是(____，____)，对称轴是________．当 x________时，函数 y 随 x 的增大而增大；当 x________时，函数 y 随 x 的增大而减小．抛物线 $y=-\frac{1}{3}(x+2)^2$ 可由抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 向________平移________个单位得到．

3. 当 $a>0$ 时，抛物线 $y=a(x+h)^2$ 的开口方向是________，顶点坐标是(____，____)，对称轴是________．当 $x=$________时，函数 $y=a(x+h)^2$ 取得最____值，$y_{最}$____=________．

当 $a<0$ 时，抛物线 $y=a(x+h)^2$ 的开口方向是________，顶点坐标是(____，____)，对称轴是________．当 $x=$________时，函数 $y=a(x+h)^2$ 取得最____值，$y_{最}$____=________．

4. 抛物线 $y=4(x-1)^2$ 可由抛物线 $y=4x^2$ 怎样平移后得到？

5. 抛物线 $y=a(x+b)^2$ 的顶点为 $(-2,0)$，形状与抛物线 $y=5x^2$ 相同，但开口方向相反．

(1) 求抛物线对应的函数表达式；

(2) 求抛物线与 y 轴交点坐标．

问题❸ 怎样画出函数 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 的图象？

我们已经知道二次函数 $y=ax^2+k$、$y=a(x+h)^2$ 的图象与 $y=ax^2$ 的图象之间的关系，因此本题在描点画图前，不妨先将函数 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 与 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$ 作一比较．

对于每一个给定的 x 值，函数 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 的值都要比函数 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$ 的值大1．由此可见，函数 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 的图象可由抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$ 向上

平移 1 个单位得到.

再由前面的研究可知,抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$ 可由抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向右平移 2 个单位得到.

因此,函数 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$ 的图象可由抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向右平移 2 个单位,再向上平移 1 个单位得到,如图 21-7.

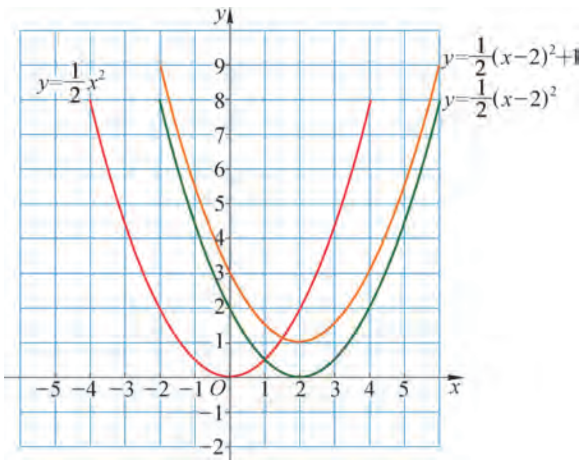


图 21-7

练习

1. 抛物线 $y=\frac{1}{2}(x-1)^2-1$ 的开口方向是________,顶点坐标是(____,____),对称轴是__________.当 x ________时,函数 y 随 x 的增大而增大;当 x ________时,函数 y 随 x 的增大而减小;当 $x=$ ______时,函数取得最______值,$y_{最}$____ = ______.
2. 仿照上题内容,讨论二次函数 $y=a(x+h)^2+k$ 的图象特点.

思考

通过前面几个问题的探究,我们已经熟悉了二次函数 $y=a(x+h)^2+k$ 的图象特点,你认为怎样画函数 $y=-2x^2-8x-7$ 的图象较简便?

我们可以先将这个函数的表达式配方,得

$$
\begin{aligned}
y &= -2x^2-8x-7 \\
&= -2(x^2+4x)-7 \\
&= -2(x^2+4x+4)-7+8 \\
&= -2(x+2)^2+1.
\end{aligned}
$$

列表时,自变量 x 为什么只取大于或等于 -2 的值?

可见,函数 $y=-2x^2-8x-7$ 的图象是一条开口向下的抛物线,顶点坐标是 $(-2,1)$,对称轴是直线 $x=-2$.

根据图象的对称性列表:

x	…	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	…
$y=-2(x+2)^2+1$	…	1	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{7}{2}$	-7	…

描点、连线:根据上表描点,并由函数图象的对称性画出它们关于直线 $x=-2$ 的对称点,用平滑曲线顺次连接各点,即得函数 $y=-2x^2-8x-7$ 的图象,如图 21-8.

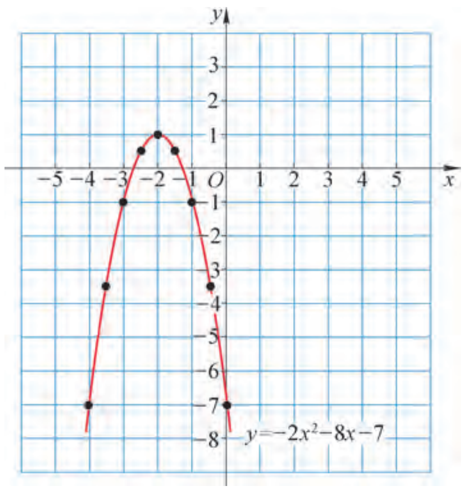


图 21-8

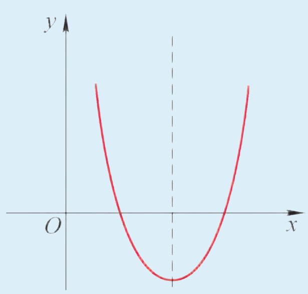
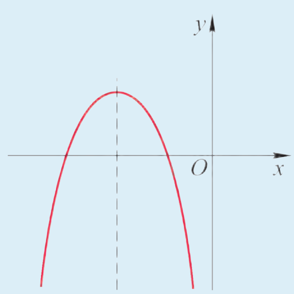
思考

一般的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象特点是怎样的？从中可看出函数有哪些性质？

如果将这个函数的表达式配方，则有

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2+bx+c \\
&= a(\underline{\qquad\qquad\qquad})+\underline{\qquad\qquad\qquad} \\
&= a(\underline{\qquad\qquad\qquad})^2+\underline{\qquad\qquad\qquad}.
\end{aligned}
$$

因而，可得二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质如下：

函数 $y=ax^2+bx+c$	$a>0$	$a<0$
函数图象		

（续表）

函数 $y=ax^2+bx+c$	$a>0$	$a<0$
抛物线开口方向	抛物线的开口向____	抛物线的开口向____
抛物线顶点坐标	顶点坐标是(____，____)	顶点坐标是(____，____)
抛物线对称轴	对称轴是直线 $x=$________	对称轴是直线 $x=$________
函数增减情况	当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，函数 y 随 x 的增大而________； 当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，函数 y 随 x 的增大而________	当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，函数 y 随 x 的增大而________； 当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，函数 y 随 x 的增大而________
函数最大值或最小值	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，函数取得最小值，$y_{最小值}=$________	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，函数取得最大值，$y_{最大值}=$________

练习

1. 用配方法把下列函数的表达式化成 $y=a(x+h)^2+k$ 的形式，并指出抛物线的开口方向、顶点坐标和对称轴，然后再用描点法画出函数图象.

(1) $y=2x^2+8x+5$；　　(2) $y=-3x^2+6x$；

(3) $y=\frac{1}{3}x^2+2x-1$；　　(4) $y=(2-x)(2x+1)$.

2. 将函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2}$ 化成 $y=a(x+h)^2+k$ 的形式是________________，其对应的抛物线的开口方向是________，顶点坐标是(____，____)，对称轴是________. 当 $x=$________时，函数取得最______值，$y_{最}$______ $=$________.

抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2}$ 可由抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向____平移____个单位，再向____平移____个单位得到.

3. 抛物线 $y=3x^2-5x$ 的最低点坐标是(____,____),可由抛物线 $y=3x^2$ 向____平移____个单位,再向____平移____个单位得到. 当 x ________时,函数 y 随 x 的增大而减小;当 x ________时,函数 y 随 x 的增大而增大;当 $x=$ ________时,函数取得最____值,$y_{最\_\_\_\_}=$ ________.

4. 函数 $y=x^2-1$ 的图象可由下列哪个函数的图象向右平移 1 个单位,向下平移 2 个单位得到(　　).

(A) $y=(x-1)^2+1$　　　(B) $y=(x+1)^2+1$

(C) $y=(x-1)^2-3$　　　(D) $y=(x+1)^2+3$

5. 已知抛物线 $y=x^2-4x+a$ 的顶点在直线 $y=-4x-1$ 上,求抛物线的顶点坐标.

*3. 二次函数表达式的确定

我们知道,当给出一次函数图象上两点的坐标时,就可以求出这个一次函数的表达式. 那么,对于二次函数,需要什么条件,才可以求出它的表达式呢?

例 3　已知一个二次函数的图象经过 $(-1,10)$, $(1,4)$, $(2,7)$ 三点,求这个二次函数的表达式.

解　设所求二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$,由已知函数图象经过 $(-1,10)$, $(1,4)$, $(2,7)$ 三点,得

$$\begin{cases} a-b+c=10, \\ a+b+c=4, \\ 4a+2b+c=7. \end{cases}$$

解方程组,得

$$\begin{cases} a=2, \\ b=-3, \\ c=5. \end{cases}$$

答:所求二次函数的表达式为 $y=2x^2-3x+5$.

例 4 有一个二次函数，当 $x=0$ 时，$y=-1$；当 $x=-2$ 时，$y=0$；当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$y=0$，求这个二次函数的表达式.

解 设所求二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$，根据题意，得

$$\begin{cases} c=-1, \\ 4a-2b+c=0, \\ \frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c=0. \end{cases}$$

解方程组，得

$$\begin{cases} a=1, \\ b=\frac{3}{2}, \\ c=-1. \end{cases}$$

答：所求二次函数的表达式为 $y=x^2+\frac{3}{2}x-1$.

例 5 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-4x+8$ 与直线 $y=\frac{1}{2}x+1$ 交于 B，C 两点.

（1）在同一平面直角坐标系中画出直线与抛物线；

（2）记抛物线的顶点为 A，求△ABC 的面积.

解 （1）如图 21－9，画出直线 $y=\frac{1}{2}x+1$ 与抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-4x+8$.

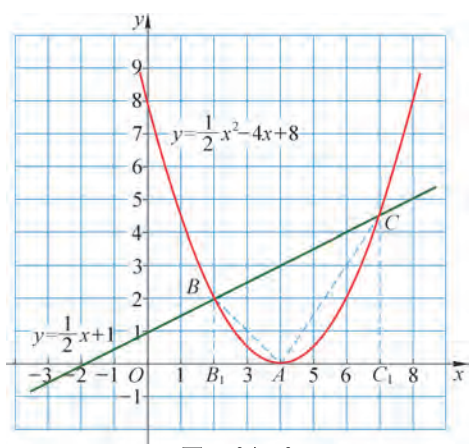


图 21－9

(2) 由 $y=\frac{1}{2}x^2-4x+8=\frac{1}{2}(x-4)^2$，得点 A 的坐标为 $(4,0)$.

解方程组

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+1, \\ y=\frac{1}{2}x^2-4x+8, \end{cases}$$

得 B，C 两点的坐标为

$$B(2,2),\ C(7,4.5).$$

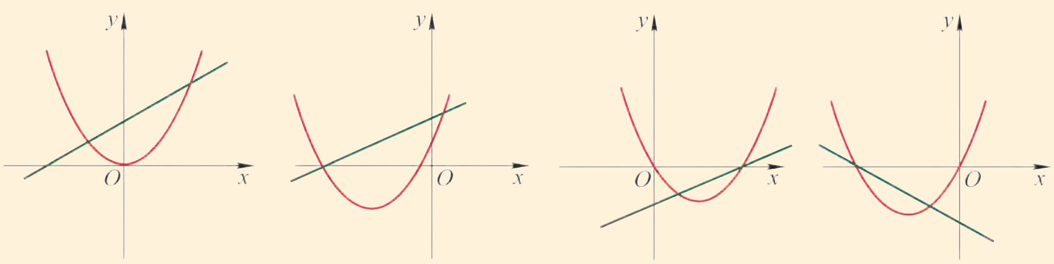
过 B，C 两点分别作 x 轴垂线，垂足为 B_1，C_1，则

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= S_{\text{梯形}BB_1C_1C}-S_{\triangle ABB_1}-S_{\triangle ACC_1} \\ &= \frac{1}{2}(BB_1+CC_1)B_1C_1-\frac{1}{2}AB_1\cdot BB_1 \\ &\quad -\frac{1}{2}AC_1\cdot CC_1 \\ &= \frac{1}{2}(2+4.5)\times 5-\frac{1}{2}\times 2\times 2-\frac{1}{2}\times 3\times 4.5 \\ &= 7.5. \end{aligned}$$

练习

1. 已知一个二次函数的图象经过 $(0,0)$，$(-1,-11)$，$(1,9)$ 三点，求这个二次函数的表达式.

2. 函数 $y=ax^2+bx$ 与 $y=ax+b$ 在同一平面直角坐标系中的图象大致是（　　）.



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

3. 直线 $y=2x+3$ 与抛物线 $y=x^2$ 的交点为 A，B 两点，求 $\triangle OAB$ 的面积.

信息技术应用

用《几何画板》研究二次函数的图象

《几何画板》可以方便地作出二次函数的图象，下面，我们就用它来研究二次函数的图象变化.

作函数 $y = a(x+h)^2 + k\ (a \neq 0)$ 的图象，研究 a, h, k 的变化对函数图象的影响. 操作步骤如下：

(1) 打开《几何画板》，选择“数据”菜单中的“新建参数”命令（图 21－10），在弹出的“新建参数”对话框中，将“名称”框改为“a”（图 21－11），点击“确定”按钮，得到参数 a. 同理，可得参数 h, k.

图　21－10

图　21－11

图　21－12

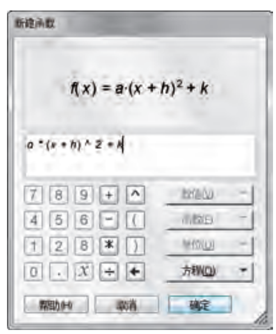


图　21－13

(2) 同时选中参数 a,h,k,选择“绘图”菜单中的“绘制新函数”命令(图 21 - 12),在弹出的“新建函数”对话框中,根据说明新建表达式“$a*(x+h)\wedge 2+k$”(图 21 - 13),点击“确定”按钮,就可以得到二次函数 $f(x)=a(x+h)^2+k$ 及其图象(图 21 - 14).

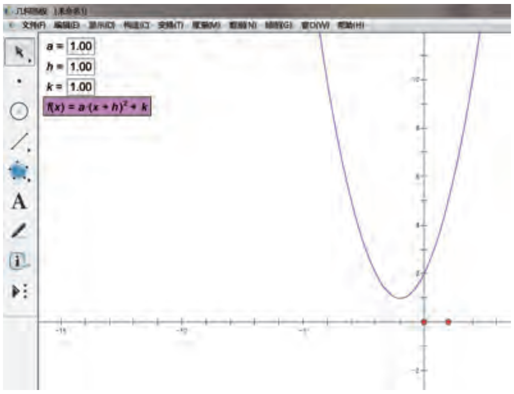


图 21-14

(3) 选中参数 a,选择“编辑”菜单的“操作类按钮”子菜单中的“动画”命令(图 21 - 15),在弹出的“操作类按钮动画参数”对话框中,选择“动画”选项卡,将“范围”框改为“-3 到 3”(图 21 - 16),选择“标签”选项卡,将“标签”框改为“参数 a 变化”(图21 - 17),点击“确定”按钮,得到参数 a 从 -3 到 3 变化的动画按钮. 同理,可得参数 h 和 k 分别从 -3 到 3 变化的动画按钮(图 21 - 18).

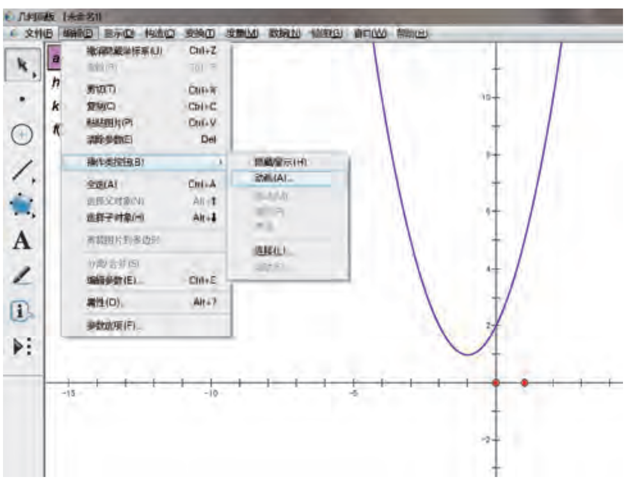


图 21-15

图 21-16

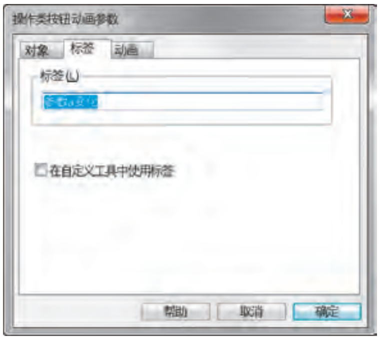


图　21−17

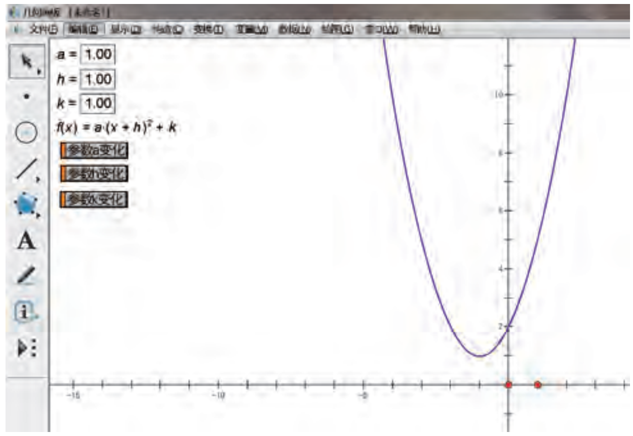


图　21−18

分别点击“参数 a 变化”“参数 h 变化”和“参数 k 变化”，观察随着 a,h,k 的变化，图象分别怎样变化？你能得到什么结论？

习题 21.2

1. 选择：

（1）如果直线 $y=ax+3$ 经过第一、二、三象限，那么抛物线 $y=ax^2$ 的开口方向是（　　）；

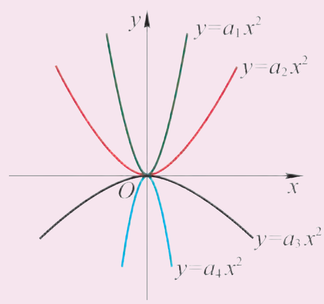
（A）向上　　（B）向左

（C）向下　　（D）向右

（2）如图，根据图象提供的信息，下列结论正确的是（　　）；

（A）$a_1>a_2>a_3>a_4$　　（B）$a_1<a_2<a_3<a_4$

（C）$a_4>a_1>a_2>a_3$　　（D）$a_2>a_3>a_1>a_4$



［第 1(2) 题］

（3）如果点 (a,b) 在抛物线 $y=-x^2$ 上，那么下列各点中一定在该抛物线上的是（　　）.

（A）$(-a,-b)$　　（B）$(-a,b)$

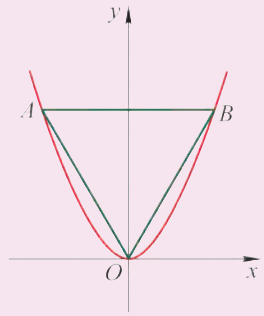
（C）$(a,-b)$　　（D）(b,a)

2. 已知：$y_1 = \frac{3}{2}x_1^2$，$y_2 = \frac{5}{2}x_2^2$.

(1) 当 $x_1 = x_2 = 2$ 时，y_1 比 y_2 大(或小)多少？

(2) 当 $y_1 = y_2 = 2$ 时，$|x_1|$ 比 $|x_2|$ 大(或小)多少？

3. 如图，一边长为 2 的正三角形 ABO 的三个顶点均在一抛物线上，O 为坐标原点，求此抛物线对应的函数表达式.



(第 3 题)

4. 在同一平面直角坐标系中，分别画出下列各组二次函数的图象，并写出它们的对称轴和顶点坐标：

(1) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ 与 $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$；

(2) $y = -\frac{1}{3}(x+2)^2$ 与 $y = -\frac{1}{3}(x-2)^2$；

(3) $y = \frac{1}{3}(x+2)^2 - 3$ 与 $y = \frac{1}{3}(x-2)^2 + 3$.

5. 通过配方，写出下列抛物线的对称轴和顶点坐标：

(1) $y = x^2 + 3x - 2$；

(2) $y = 1 - 6x - x^2$；

(3) $y = 3x^2 - 2x + 4$；

(4) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 7$.

6. 先确定下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标，再画图，并指出当 x 为何值时，二次函数取得最大值或最小值，最大值或最小值分别是多少？

(1) $y = 2x^2 - 3x + 1$；

(2) $y = -2x^2 - 8x + 3$.

7. 填空：

(1) 函数 $y = (2x+1)^2 + 1$，当 $x >$ ______ 时，函数 y 随 x 的增大而增大；

(2) 函数 $y = -2x^2 + x - 4$，当 $x >$ ______ 时，函数 y 随 x 的增大而减小.

8. 已知点 $A(-4, y_1)$，$B(-3, y_2)$，$C(2, y_3)$ 在抛物线 $y = -x^2 - 4x + 5$ 上，试比较 y_1，y_2，y_3 的大小.

9. 有一个二次函数，当 $x = -1$ 时，函数的最小值为 -3，它的图象经过点 $(1, 5)$，求这个二次函数的表达式.

10. 平移二次函数 $y=ax^2$ 的图象，使它满足下列条件，并分别求对应的函数表达式：

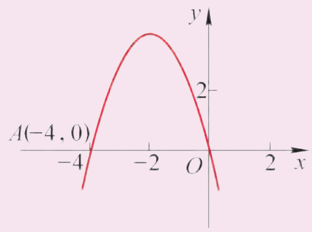
(1) 顶点为 $A(-1,\ -2)$，且经过点 $B(1,\ 10)$；

(2) 对称轴为直线 $x=3$，最大值为 -1，且经过点 $C(4,\ -3)$.

11. 如图，二次函数 $y=ax^2-4x+c$ 的图象经过坐标原点 O，并与 x 轴交于点 $A(-4,\ 0)$.

(1) 求此二次函数的表达式；

(2) 已知在抛物线上存在点 P，且 $S_{\triangle AOP}=8$，请直接写出点 P 的坐标.



（第 11 题）

12. 将抛物线 $y=x^2+bx+c$ 先向上平移 2 个单位，再向左平移 4 个单位，得到抛物线 $y=x^2$，求 b，c 的值.

13. 已知抛物线 $y=-x^2-4x+5$.

(1) 求与已知抛物线关于 x 轴对称的图象所对应的函数表达式；

(2) 求与已知抛物线关于 y 轴对称的图象所对应的函数表达式.

14. 抛物线 $y=x^2+bx-c$ 经过点 $A(3,\ 0)$，$B(0,\ -3)$.

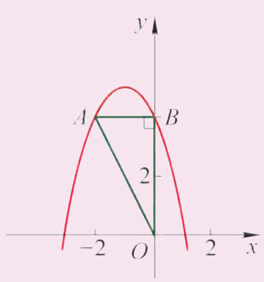
(1) 求这个抛物线对应的函数表达式；

(2) 记抛物线的顶点为 D，抛物线与 x 轴的另一个交点为 C，设 P 为抛物线上一动点，求使 $S_{\triangle PAC}=3S_{\triangle DAC}$ 时点 P 的坐标.

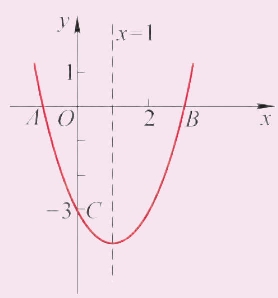
15. 如图，在平面直角坐标系中，O 是坐标原点，点 A 的坐标是 $(-2,\ 4)$，过点 A 作 AB 垂直于 y 轴，垂足为 B，连接 OA. 若抛物线 $y=-x^2-2x+c$ 经过点 A，则完成下列要求：

(1) 求 c 的值；

(2) 将抛物线向下平移 m 个单位，使平移后得到的抛物线顶点落在 $\triangle OAB$ 的内部（不包括 $\triangle AOB$ 的边界），求 m 的取值范围（可直接写出答案）.



（第 15 题）



（第 16 题）

16. 已知抛物线 $y=ax^2+bx-3\ (a\neq 0)$ 的对称轴为直线 $x=1$，且抛物线经过点 $A(-1,0)$，它与 x 轴的另一交点为 B，与 y 轴的交点为 C.

(1) 求这条抛物线所对应的函数表达式；

(2) 在直线 $x=1$ 上求点 M，使$\triangle AMC$的周长最小，并求出$\triangle AMC$的周长.

21.3 二次函数与一元二次方程

在第 12 章中,我们通过观察一次函数的图象,研究了一次函数与一次方程、一次不等式之间的关系. 例如,对于图 21-19 中的一次函数 $y = 2x - 3$ 的图象,它与 x 轴的交点坐标是$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$,即当 $x = \frac{3}{2}$ 时,$y = 0$,也就是交点的横坐标 $x = \frac{3}{2}$ 为一元一次方程 $2x - 3 = 0$ 的根;当 $x > \frac{3}{2}$ 时,图象在 x 轴上方,即 $y > 0$,所以 $x > \frac{3}{2}$ 为一元一次不等式 $2x - 3 > 0$ 的解集;当 $x < \frac{3}{2}$ 时,图象在 x 轴下方,即 $y < 0$,所以 $x < \frac{3}{2}$ 为一元一次不等式 $2x - 3 < 0$ 的解集.

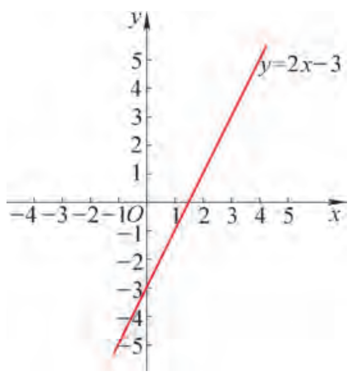


图 21-19

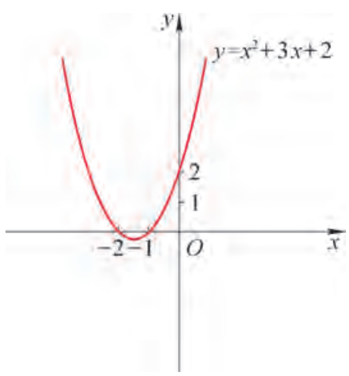


图 21-20

类似地,通过观察二次函数的图象,也可以帮助我们认识二次函数与一元二次方程之间的关系.

观察

观察图 21-20，说一说二次函数 $y=x^2+3x+2$ 的图象与 x 轴有几个交点？交点的横坐标与一元二次方程 $x^2+3x+2=0$ 的根有什么关系？

通过上面的观察可以看出，对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，当 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$ 时有实数根，这个实数根就是对应二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的值等于 0 时自变量 x 的一个值，即二次函数的图象与 x 轴一个交点的横坐标.

由此可知，我们可以利用二次函数的图象求一元二次方程的根. 由于作图或观察有误差，由图象求得的根一般是近似解.

例 用图象法求一元二次方程 $x^2+2x-1=0$ 的近似解（精确到 0.1）.

解 画出函数 $y=x^2+2x-1$ 的图象，如图 21-21.

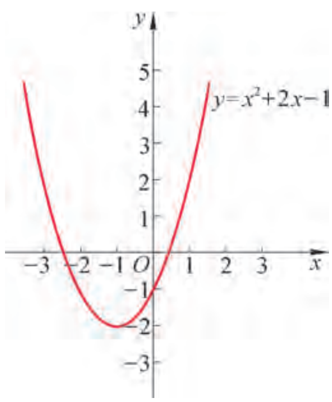


图 21-21

由图象可知，方程有两个实数根，一个在 -3 和 -2 之间，另一个在 0 和 1 之间.

观察 x 取何值时，y 值最接近 0？

用一元二次方程的求根公式验证一下.

先求位于 -3 和 -2 之间的根. 由图象可估计这个根是 -2.5 或 -2.4，利用计算器进行探索，见下表：

x	…	-2.5	-2.4	…
y	…	0.25	-0.04	…

观察上表可以发现，当 x 分别取 -2.5 和 -2.4 时，对应的 y 由正变负，可见在 -2.5 与 -2.4 之间肯定有一个 x 使 $y=0$，即有方程 $x^2+2x-1=0$ 的一个根. 题目只要求精确到 0.1，这时取 $x=-2.5$ 或 $x=-2.4$ 作为根都符合要求. 但当 $x=-2.4$ 时，$y=-0.04$ 比 $y=0.25$ $(x=-2.5)$ 更接近 0，故选 $x=-2.4$.

因而，方程 $x^2+2x-1=0$ 在 -3 和 -2 之间精确到 0.1 的根为 $x=-2.4$.

请同学们仿照上面的方法，求出上述方程精确到 0.1 的另一个根.

方程 $x^2+2x-1=0$ 的近似解还可以这样求：分别画出函数 $y=x^2$ 和 $y=-2x+1$ 的图象，如图 21-22，它们交点 A，B 的横坐标就是方程 $x^2+2x-1=0$ 的根.

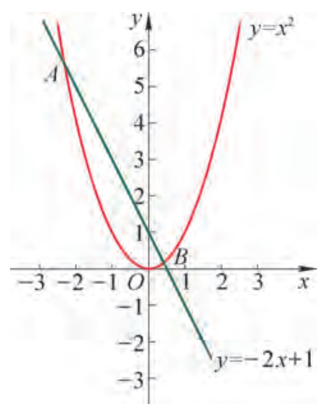


图　21-22

如有条件，还可以在计算机上用《几何画板》处理.

练习

1. 对于抛物线 $y=ax^2+bx+c$，当 $b^2-4ac>0$ 时，相应的方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数根个数的情况是________，抛物线与 x 轴的交点个数的情况是________；当 $b^2-4ac=0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数根个数的情况是________，抛物线与 x 轴的交点个数的情况是________；当 $b^2-4ac<0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数根个数的情况是________，抛物线与 x 轴的交点个数的情况是________；若顶点在 x 轴上，则满足条件________，若顶点在 y 轴上，则满足条件________.
2. 画出下列函数的图象，并求当 x 为何值时，$y=0$.

   (1) $y=4x^2+4x+1$；

   (2) $y=x^2-4x+5$.
3. 证明：抛物线 $y=x^2-(2p-1)x+p^2-p$ 与 x 轴必有两个不同的交点.
4. 用图象法求方程 $x^2-4x+1=0$ 的近似解(精确到 0.1).

阅读与思考

由二次函数的图象认识一元二次不等式的解集

观察图 21－20，可以清楚看到二次函数 $y=x^2+3x+2$ 的图象被 x 轴分成三部分：一部分与 x 轴相交，一部分在 x 轴上方，一部分在 x 轴下方.

图象与 x 轴相交部分，即 $y=0$，也就是 $x^2+3x+2=0$. 这时，由图象得，自变量 x 的值是 -2 和 -1.

所以 $x=-2$，$x=-1$ 是一元二次方程 $x^2+3x+2=0$ 的解.

图象在 x 轴上方部分，即 $y>0$，也就是 $x^2+3x+2>0$. 这时，由图象得，自变量 x 取值范围是 $x<-2$ 或 $x>-1$.

所以 $x<-2$ 或 $x>-1$ 是一元二次不等式 $x^2+3x+2>0$ 的解集.

图象在 x 轴下方部分，即 $y<0$，也就是 $x^2+3x+2<0$. 这时，由图象得，自变量 x 取值范围是 $-2<x<-1$.

所以 $-2<x<-1$ 是一元二次不等式 $x^2+3x+2<0$ 的解集.

练习

1. 先求出一元二次方程 $x^2+2x-1=0$ 的根，再结合二次函数 $y=x^2+2x-1$ 的图象（图 21－21），求出当 $y=x^2+2x-1>0$ 和 $y=x^2+2x-1<0$ 时，x 的取值范围.
2. 结合函数 $y=-2x^2+3x-5$ 的图象，求：

   (1) $-2x^2+3x-5>0$ 的解集；

   (2) $-2x^2+3x-5<0$ 的解集.

习题 21.3

1. 当 x 为何值时，函数 $y=x^2-4x+3$ 的值等于 0？
2. 判断下列二次函数的图象与 x 轴有无交点，如有，求出交点的坐标；如没有，请说明理由.

   (1) $y=x^2-2x-3$；

   (2) $y=x^2+x+1$；

   (3) $y=4x^2-4x+1$；

   (4) $y=-\frac{1}{2}x^2+x-4$.
3. 求抛物线 $y=-6x^2-x+2$ 与 x 轴和 y 轴的交点坐标.
4. 用图象法求下列方程的近似解：（精确到 0.1）

   (1) $x^2-x-1=0$；

   (2) $x^2=3x-1$.
5. 已知二次函数 $y=(k-8)x^2-6x+k$ 的图象与 x 轴只有一个交点，求该交点的坐标.
6. 设有函数 $y=x^2+px+q$，根据下列条件分别确定 p,q 的值.

   (1) 当 $x=5$ 时，函数有最小值为 -2；

   (2) 函数图象与 x 轴的交点坐标是 $(-4,0)$ 和 $(-1,0)$.

7. 如图，给出了二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，对于这个函数有下列五个结论：

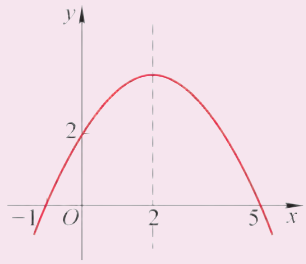
① $b^2-4ac<0$；② $ab>0$；③ $a-b+c=0$；

④ $4a+b=0$； ⑤ 当 $y=2$ 时，x 只能等于 0.

其中结论正确的是(　　).

(A) ①④　　　　(B) ③④

(C) ②⑤　　　　(D) ③⑤



(第 7 题)

8. 结合函数 $y=(x-2)^2-1$ 的图象，确定当 x 取何值时，有

(1) $y=0$?　(2) $y>0$?　(3) $y<0$?

9. 画出函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象，并根据图象回答：

(1) 当 x 取何值时，$x^2-2x-3=0$?

(2) 当 x 取何值时，$x^2-2x-3>0$?

(3) 当 x 取何值时，$x^2-2x-3<0$?

21.4 二次函数的应用

函数的最大值或最小值是二次函数的一个重要性质. 现在,我们就来利用这个性质解决实际问题.

例 1　在第 21.1 节的问题❶中,要使围成的水面面积最大,则它的边长应是多少米? 它的最大面积是多少平方米?

解　在第 21.1 节中,得

$$S = x(20 - x).$$

将这个函数的表达式配方,得

$$S = -(x - 10)^2 + 100 \quad (0 < x < 20).$$

这个函数的图象是一条开口向下抛物线中的一段,如图 21-23,它的顶点坐标是(10, 100). 所以,当 $x = 10$ 时,函数取得最大值,即

$$S_{最大值} = 100(m^2).$$

此时,另一边长 $= 20 - 10 = 10(m)$.

答: 当围成的矩形水面边长都为 10 m 时,它的面积最大为 100 m^2.

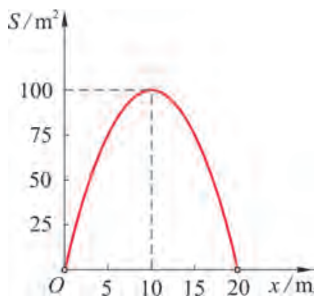


图　21-23

图 21-23 中为何有两个空心点?

练习

1. 解答第 21.1 节的问题❷.
2. 在直角三角形中,两直角边之和为 10. 问当两直角边的边长各是多少时,这个三角形的面积最大? 最大面积是多少?

例 2 如图 21－24(1)，悬索桥两端主塔塔顶之间的主悬钢索，其形状可近似地看作抛物线，水平桥面与主悬钢索之间用垂直钢索连接. 已知两端主塔之间水平距离为 900 m，两主塔塔顶距桥面的高度为 81.5 m，主悬钢索最低点离桥面的高度为 0.5 m.

(1) 若以桥面所在直线为 x 轴，抛物线的对称轴为 y 轴，建立平面直角坐标系，如图 21－24(2)，求这条抛物线对应的函数表达式；

(2) 计算距离桥两端主塔分别为 100 m，50 m 处垂直钢索的长.

图 21－24

解 (1) 根据题意，得抛物线的顶点坐标为(0, 0.5)，对称轴为 y 轴，设抛物线对应的函数表达式为

$$y = ax^2 + 0.5.$$

抛物线经过点(450, 81.5)，代入上式，得

$$81.5 = a \cdot 450^2 + 0.5.$$

解方程，得

$$a = \frac{81}{450^2} = \frac{1}{2\,500}.$$

答：所求抛物线对应的函数表达式为

$$y = \frac{1}{2\,500}x^2 + 0.5 \quad (-450 \leqslant x \leqslant 450).$$

(2) 当 $x = 450 - 100 = 350$(m) 时，得

$$y = \frac{1}{2\,500} \times 350^2 + 0.5 = 49.5\text{(m)}.$$

当 $x = 450 - 50 = 400$(m) 时，得

$$y=\frac{1}{2\,500}\times 400^2+0.5=64.5(\text{m}).$$

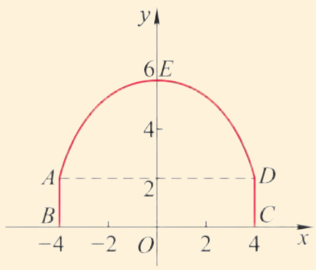
答：距离桥两端主塔分别为 100 m，50 m 处垂直钢索的长分别为 49.5 m，64.5 m.

练习

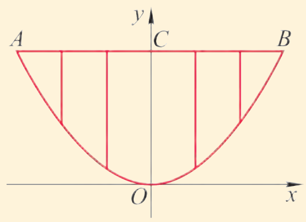
1. 如图，隧道的截面由抛物线 AED 和矩形 $ABCD$ 构成，矩形的一边 BC 为 8 m，另一边 AB 为 2 m，以 BC 所在的直线为 x 轴，线段 BC 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系，y 轴是抛物线的对称轴，顶点 E 到坐标原点 O 的距离为 6 m.

   (1) 求此抛物线对应的函数表达式；

   (2) 如果该隧道内设双行道，现有一辆货运车的高为 4.3 m，宽为 2.4 m，问这辆货运车能否在一侧行道内通过该隧道？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，某校的围墙上部由一段段相同的拱形栅栏连接而成，其中一段拱形栅栏（图中 AOB）为抛物线的一部分，拱形栅栏的跨径 AB 之间按相同的间距（0.2 m）用 5 根立柱加固，拱高 OC 为 0.6 m.

   (1) 以 O 为原点，OC 所在直线为 y 轴，建立平面直角坐标系，根据以上数据，求出抛物线 $y=ax^2$ 对应的函数表达式；

   (2) 计算一段拱形栅栏所需 5 根立柱的总长度.

例 3 上抛物体在不计空气阻力的情况下，有如下的表达式

$$h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 h 是物体上升的高度，v_0 是物体被上抛时竖直向上的初始速度，g 是重力加速度(取 $g=10\ \text{m/s}^2$)，t 是物体抛出后经过的时间.

在一次排球比赛中，排球从靠近地面处被垫起时竖直向上的初始速度为 10 m/s.

(1) 问排球上升的最大高度是多少?

(2) 已知某运动员在 2.5 m 高度时扣球效果最佳，如果她要打快攻，问该运动员在排球被垫起后多长时间扣球最佳?(精确到 0.1 s)

图　21-25

解　(1) 根据题意，得

$$h=10t-\frac{1}{2}\times 10t^2$$
$$=-5(t-1)^2+5\quad (t\geqslant 0).$$

因为抛物线开口向下，顶点坐标为(1, 5).

答：排球上升的最大高度是 5 m.

(2) 当 $h=2.5$ m 时，得

$$10t-5t^2=2.5.$$

解方程，得

$$t_1\approx 0.3(\text{s}),\ t_2\approx 1.7(\text{s}).$$

排球在上升和下落中，各有一次经过 2.5 m 高度，但第一次经过时离排球被垫起仅有 0.3 s，要打快攻，选择此时扣球，可令对方措手不及，易获成功.

答：该运动员应在排球被垫起后 0.3 s 时扣球最佳.

如果这位运动员来不及在0.3 s时扣球，她还可在何时扣球?

* **例 4**　行驶中的汽车，在制动后由于惯性，还要继续向前滑行一段距离才能停止，这段距离称为“制动距离”. 为了了解某型号汽车的制动性能，对其进行了测试，测得数据如下表：

制动时车速/km·h^{-1}	0	10	20	30	40	50
制动距离/m	0	0.3	1.0	2.1	3.6	5.5

有一辆该型号汽车在公路上发生了交通事故，现场测得制

动距离为46.5 m,试问交通事故发生时车速是多少?是否因超速(该段公路限速为110 km/h)行驶导致了交通事故?

分析:要解答这个问题,就是要解决在知道了制动距离时,如何求得相应的制动时车速.题中给出了几组制动距离与制动时车速之间的关联数据,为此,求出制动距离与制动时车速的函数表达式是解答本题的关键.

解 以制动时车速的数据为横坐标(x值)、制动距离的数据为纵坐标(y值),在平面直角坐标系中,描出各组数据对应的点,如图21-26.

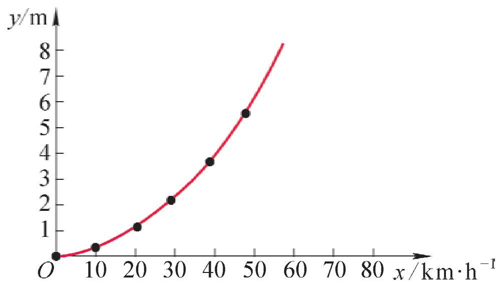


图 21-26

观察图中描出的这些点的整体分布,它们基本上是在一条抛物线附近,因此,y(制动距离)与x(制动时车速)之间的关系可以近似地以二次函数来模拟,即设

$$y=ax^2+bx+c.$$

在已知数据中任选三组,如取(0, 0),(10, 0.3),(20, 1.0),分别代入所设函数的表达式,得

$$\begin{cases}c=0,\\100a+10b+c=0.3,\\400a+20b+c=1.0.\end{cases}$$

解方程组,得

$$\begin{cases}a=0.002,\\b=0.01,\\c=0.\end{cases}$$

即所求函数的表达式为 $y=0.002x^2+0.01x\quad(x\geqslant 0)$.

把 $y=46.5$ m 代入上式,得

$$46.5=0.002x^2+0.01x.$$

解方程,得

$x_1=150(\text{km/h})$, $x_2=-155(\text{km/h})$(舍去).

答:制动时车速为 150 km/h(>110 km/h),即在事故发生时,该汽车属超速行驶.

练习

1. 炮弹以一定的初速度和发射角射出后,上升的高度 y m 与对应的水平距离 x m 之间的函数关系可表示为

$$y=-\frac{1}{54\ 000}x^2+\frac{1}{\sqrt{3}}x.$$

试求:

(1) 炮弹能达到的最大高度;

(2) 炮弹最远射程.

2. 心理学家研究发现,通常情况下,学生对知识的接受能力 y 与学习知识所用的连续时间 x(单位:min)之间满足下列经验关系式

$$y=-0.1x^2+2.6x+43\quad(0\leqslant x\leqslant 30),$$

y 的值越大,表示接受能力越强.

(1) 当 x 在什么范围内,学生的接受能力逐步增强?当 x 又在什么范围内,学生的接受能力逐步降低?

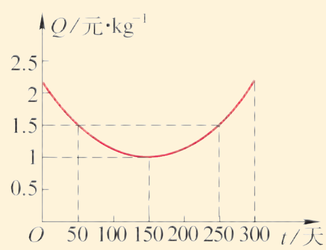
(2) 在第 10 min 时,学生的接受能力是多少?

(3) 在第几分时,学生的接受能力最强?

3. 某蔬菜基地种植西红柿,由历年市场行情得知,西红柿的种植成本 Q 元/kg 与上市时间 t 天的关系用如图的抛物线表示.

(1) 写出图中表示的种植成本 Q 元/kg 与时间 t 天之间的函数表达式;

(2) 西红柿上市多少天其种植成本最低?最低成本是多少?



(第 3 题)

习题 21.4

1. 求下列各函数的最大值或最小值,并求出相应的 x 值.

   (1) $y=\sqrt{3}x^2-\sqrt{3}x+2$;　　(2) $y=(x+1)(2-x)$.

2. 某商场今年一月份营业额为 60 万元,二月份营业额下降 10%,后加强经营管理,月营业额大幅回升. 设四月份营业额为 y,三、四月份平均月增长率都是 x.

   (1) 写出 y 与 x 之间的函数表达式;

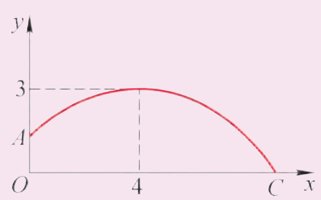
   (2) 如果 $y=81$ 万元,那么三、四月份平均月增长率应是多少?(精确到 0.1%)

3. 一种商品售价为每件 10 元,一周可卖出 50 件. 市场调查表明:这种商品如果每件涨价 1 元,每周要少卖 5 件;每件降价 1 元,每周可多卖 5 件. 已知该商品进价每件为 8 元,问每件商品涨价多少,才能使每周得到的利润最多?

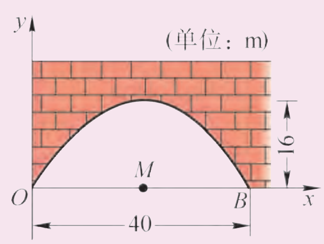
4. 如图,某学生推铅球,铅球出手(点 A 处)的高度是 $\frac{5}{3}$ m,出手后的铅球沿一段抛物线运行,当运行到最高点时,运行高度 $y=3$ m,水平距离 $x=4$ m.

   (1) 试求铅球运行高度 y 与水平距离 x 之间的函数表达式;

   (2) 设铅球落地点为 C,求铅球被推出的距离 OC.



(第 4 题)



(第 5 题)

5. 如图,在平面直角坐标系中画出一抛物线形的公路桥拱示意图,它的跨度为 40 m,最大高度为 16 m. 如果在距离跨度中心点 M 的 5 m 处竖立铁柱支撑拱顶,那么该铁柱的长度应是多少?

21.5 反比例函数

问题1　某村有耕地 200 hm^2，人口数量 x 逐年发生变化，该村人均耕地面积 y hm^2 与人口数量 x 之间有怎样的函数关系？

全村耕地面积应是人均耕地面积与人口数量的乘积，即 $yx=200$，所以变量 y hm^2 与 x 之间的函数关系可以表示为

$$y=\frac{200}{x}.$$

问题2　某市距省城 248 km，汽车行驶全程所需的时间 t h 与平均速度 v km/h 之间有怎样的函数关系？

由路程 $s=vt$，变量 t h 与 v km/h 之间的函数关系可以表示为

$$t=\frac{248}{v}.$$

问题3　在一个电路中，当电压 U 一定时，通过电路的电流 I 的大小与该电路的电阻 R 的大小之间有怎样的函数关系？

由电学可知，变量 I 与 R 之间的函数关系可以表示为

$$I=\frac{U}{R}.$$

上面的函数表达式都具有 $y=\frac{k}{x}$ 的形式，两个变量之间

的关系，就是小学学过的反比例关系．一般地，表达式形如 $y=\dfrac{k}{x}$（k 为常数，且 $k\neq 0$）的函数叫做**反比例**（inverse proportion）**函数**．

例 1 在压力不变的情况下，某物体承受的压强 p Pa 是它的受力面积 S m^2 的反比例函数，如图 21－27．

（1）求 p 与 S 之间的函数表达式；

（2）当 $S=0.5$ 时，求物体承受的压强 p 的值．

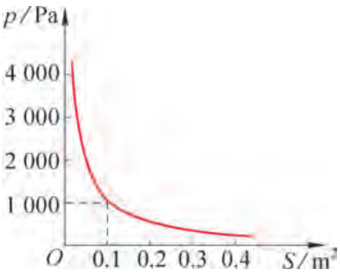


图 21－27

解 （1）根据题意，设

$$p=\frac{k}{S}.$$

函数图象经过点（0.1，1 000），代入上式，得

$$1\ 000=\frac{k}{0.1}.$$

解方程，得

$$k=100.$$

答：p 与 S 之间的函数表达式为

$$p=\frac{100}{S}\quad (p>0,\ S>0).$$

（2）当 $S=0.5$ 时，$p=\dfrac{100}{0.5}=200$．

答：当 $S=0.5$ 时，物体承受的压强 p 的值为 200．

练习

1. 判断下列各题中的两个变量是否成反比例关系，如果是，请写出这个函数的表达式．

（1）正三角形的面积 S 与边长 a；

（2）当圆锥的体积是 50 时，它的高 h 与底面积 S；

（3）当矩形的面积为 90 时，它的一边 y 与另一边 x．

2. 一定质量的氧气，它的密度 ρ 与它的体积 V 成反比例关系．当 $V=10\ m^3$ 时，$\rho=1.43\ kg/m^3$．

（1）求 ρ 与 V 之间的函数表达式；

（2）当 $V=2\ m^3$ 时，求氧气的密度 ρ 的值．

下面来研究反比例函数的图象.

例 2 画出函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象.

解 函数 $y=\frac{6}{x}$ 的自变量 x 取值范围为 $x\neq 0$.

列表:

x	…	-6	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5	6	…
$y=\frac{6}{x}$	…	-1	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{3}{2}$	-2	-3	-6	6	3	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$	1	…

描点,并用平滑曲线分别顺次连接第一、三象限内的各个点,即得反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象,如图 21-28.

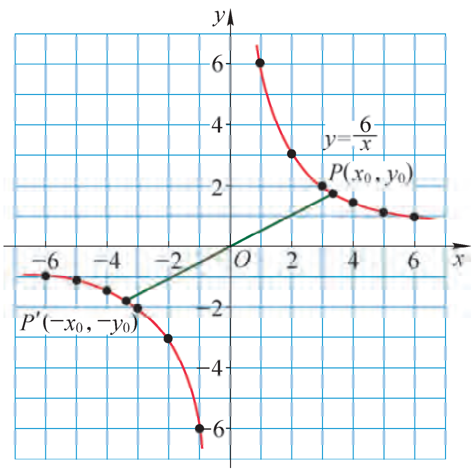


图 21-28

观察图 21-28 可知:

(1) 因为自变量 $x\neq 0$,所以 y 轴把函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象分隔成两个分支,它们分别在第一和第三象限内;

(2) 在每个象限内,图象自左向右下降,函数 y 随 x 的增大而减小,图象的两个分支都可以无限延伸,并无限接近 x 轴和 y 轴,但永远不与它们相交;

(3) 如果点 $P(x_0, y_0)$ 在函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象上,那么点

$P'(-x_0, -y_0)$ 也应在它的图象上.

因为 $y_0=\frac{6}{x_0}$，所以 $-y_0=\frac{6}{-x_0}$，即可知点 $P'(-x_0, -y_0)$ 也在它的图象上.

操作

在图 21－29 中，画出函数 $y=-\frac{6}{x}$ 的图象.

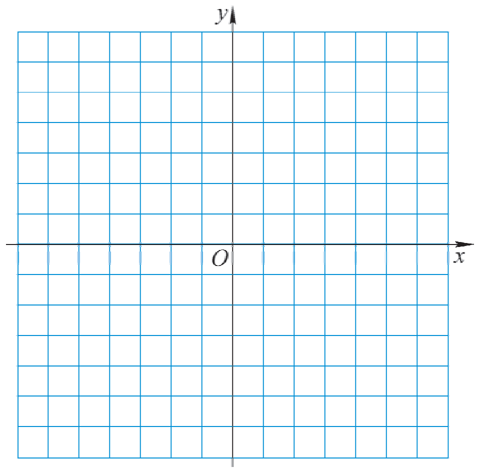


图　21－29

思考

观察并比较函数 $y=\frac{6}{x}$ 与 $y=-\frac{6}{x}$ 的图象，你能就 $k>0$ 和 $k<0$ 两种情况，分别总结反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，且 $k\neq0$）的性质吗？

反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数，且 $k\neq0$）的图象叫做**双曲线**(hyperbola).

(1) 当 $k>0$ 时,图象的两个分支分别位于第一、三象限,在每个象限内,图象自左向右下降,函数 y 随 x 的增大而减小;

(2) 当 $k<0$ 时,图象的两个分支分别位于第二、四象限,在每个象限内,图象自左向右上升,函数 y 随 x 的增大而增大.

例 3 已知反比例函数 $y=\dfrac{2k-1}{x}$.

(1) 如果这个函数图象经过点 $(-3,5)$,求 k 的值;

(2) 如果这个函数图象在它所处的象限内,函数 y 随 x 的增大而减小,求 k 的范围.

解 (1) 因为函数图象经过点 $(-3,5)$,代入函数的表达式,得

$$5=\frac{2k-1}{-3}.$$

解方程,得

$$k=-7.$$

(2) 根据题意,有

$$2k-1>0.$$

解不等式,得

$$k>\frac{1}{2}.$$

练习

1. 填空:

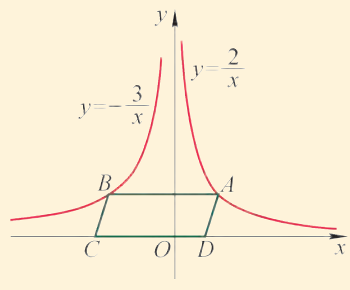
(1) 对于函数 $y=-\dfrac{5}{2x}$,自变量 x 的取值范围是__________,当 $x>0$ 时,y ________ 0;当 $x<0$ 时,y ________ 0;

(2) 对于函数 $y=-\dfrac{1}{x}$,当 $x>0$ 时,函数 y 随 x 的增大而________;当 $x<0$ 时,函数 y 随 x 的增大而________;

(3) 反比例函数 $y=\dfrac{2}{x}$ 的图象与直线 $y=2x$ 交于两点，这两点的坐标分别是(________，________)和(________，________).

2. P 为反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 图象上的一个点，作 PQ 垂直于 x 轴，垂足为 Q. 问$\triangle OPQ$ 的面积是否会因点 P 位置的变化而变化，为什么？

3. 如图，A 是反比例函数 $y=\dfrac{2}{x}(x>0)$ 图象上的任意一点，AB 平行于 x 轴交反比例函数 $y=-\dfrac{3}{x}(x<0)$ 的图象于点 B，作以 AB 为边的平行四边形 $ABCD$，其顶点 C，D 在 x 轴上，则 $S_{\square ABCD}$ 为多少？



(第 3 题)

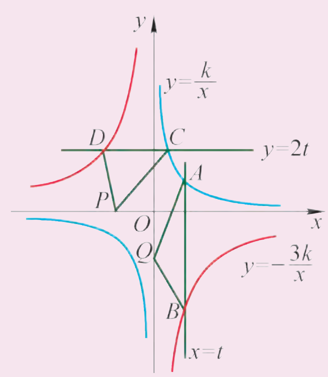
习题 21.5

1. 某水池的容量一定，当注入水的流量 $Q=15\ m^3/min$ 时，注满全池需时 $t=20\ min$.
(1) 求 Q 与 t 之间的函数表达式；
(2) 当 $t=25\ min$ 时，求水流量 Q 的值.

2. 已知：平行四边形的面积是 $24\ cm^2$，它的一边长是 x cm. 求这边上的高 y 与边长 x 之间的函数表达式.

3. 某小型开关厂准备投入一定的经费用于现有生产设备的改造以提高经济效益. 通过测算，开关的年产量 y 万只与投入改造经费 x 万元之间满足：$(3-y)$ 与 $(x+1)$ 成反比例，且当投入改造经费 1 万元时，年产量是 2 万只. 求年产量 y 与投入改造经费 x 之间的函数表达式.

4. 如图，直线 $x=t$ 与反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$，$y=-\dfrac{3k}{x}$ 的图象交于点 A，B，直线 $y=2t$ 与反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$，$y=-\dfrac{3k}{x}$ 的图象交于点 C，D，其中常数 t，k 均大于0. 点 P，Q 分别是 x 轴、y 轴上任意点，设$\triangle PCD$ 和$\triangle QAB$



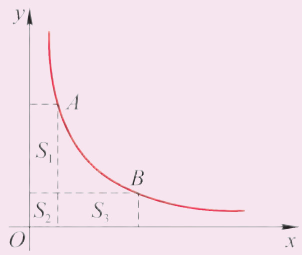
(第 4 题)

的面积分别为 S_1 和 S_2，则下列结论正确的有________.

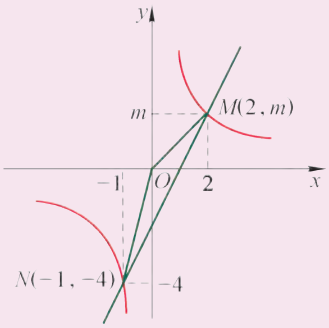
① $S_1=2t$；　② $S_2=2k$；　③ $S_1=2S_2$；

④ $S_1=S_2$；　⑤ $S_2=2S_1$；　⑥ S_1, S_2 均为定值.

5. 如图，A，B 是反比例函数 $y=\dfrac{9}{x}$ 图象上的两点，分别过点 A，B 作 x 轴、y 轴的垂线，构成图中的三个相邻且不重叠的小矩形 S_1，S_2，S_3. 已知 $S_2=3$，求 S_1+S_3 的值.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，一次函数 $y=ax+b$ 的图象与反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象交于 M，N 两点.

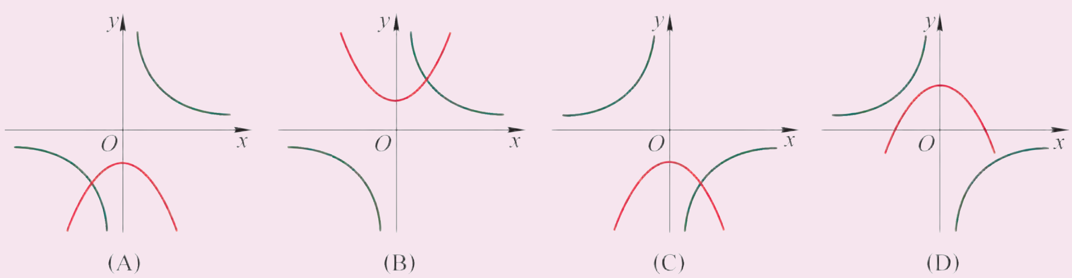
（1）求这两个函数的表达式；

（2）根据图象，写出使反比例函数值大于一次函数值时 x 的取值范围；

（3）求$\triangle OMN$ 的面积.

7. 已知一个正比例函数与一个反比例函数的图象交于点 $P(-3, 4)$，求这两个函数的表达式.

8. 如图，函数 $y=ax^2-a$ 与 $y=\dfrac{a}{x}$（$a\neq 0$）在同一平面直角坐标系中的图象可能是（　　）.



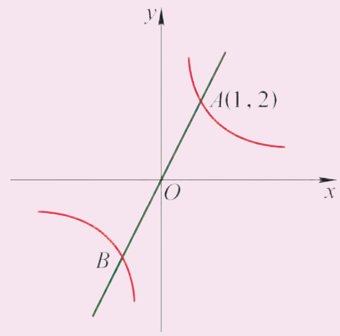
（第 8 题）

9. 如图,已知反比例函数 $y=\dfrac{k_1}{x}$ 的图象与一次函数 $y=k_2x$ 的图象.

(1) 当 k_1, k_2 有何关系时,直线与双曲线有两个交点?

(2) 如果直线与双曲线交于 A, B 两点,且当点 A 坐标为(1,2)时,求点 B 的坐标;

(3) 双曲线的两分支是否成轴对称?如果是,给出对称轴的函数表达式.



(第 9 题)

阅读与思考

商品市场的均衡问题

根据市场调查,某种商品的市场需求量(即消费者的需求量) Q_d 件与单价 P 百元之间的关系可看作是一次函数

$$Q_d=-2P+24, \quad ①$$

该商品的市场供给量(即生产者的供给量) Q_s 件与单价 P 百元之间的关系也可看作是一次函数

$$Q_s=7P-3, \quad ②$$

如图 21-30.

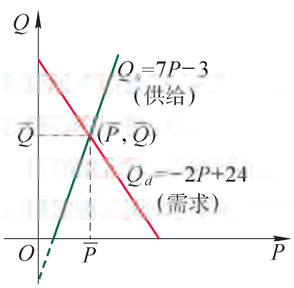


图 21-30

由图 21-30 可以看出,当商品价格 P 上涨时,需求量 Q_d 会随之减少,而供给量 Q_s 却随之增加.现在的问题是,当商品价格 P 取什么值时,商品的需求量 Q_d 能与供给量 Q_s 相等,即

$$Q_d=Q_s. \quad ③$$

当需求等于供给($Q_d=Q_s$)时,市场上既不会有商品剩余,也不会有商品短缺,市场达到均衡.我们把此时的价格称为均衡价格,记作 $\overline{P}$,并把价格为 $\overline{P}$ 时的需求量或供给量称为均衡数量,记作 $\overline{Q}$.当商品供不应求时,价格就将上涨,当商品供过于求时,价格就将下降.

你能否求出上述问题中的均衡价格 $\overline{P}$ 和均衡数量 $\overline{Q}$ 呢?

在上述由①②③构成的市场均衡模型中，有时需求函数不是一次函数而是二次函数

$$Q_d = 4 - P^2,$$

而供给函数仍为一次函数，但变为

$$Q_s = 4P - 1.$$

如图21－31，则有下面的市场均衡模型

$$\begin{cases} Q_d = Q_s, \\ Q_d = 4 - P^2, \\ Q_s = 4P - 1. \end{cases} \quad ④$$

试求出上述市场均衡模型④中的均衡价格$\overline{P}$和均衡数量$\overline{Q}$，并利用图21－31给出几何解释.

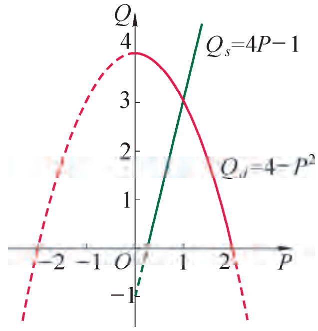


图　21−31

上述模型是极为简单的，但是许多更为复杂的市场均衡模型也可以用上述模型的原理加以建立和分析. 一般经济均衡理论是19世纪70年代由法国经济学家瓦尔拉斯(Walras)首先提出的，他研究了供给与需求如何通过价格相互作用，使市场达到均衡，从而为他的一般经济均衡体系建立了数学模型，他是对数理经济学影响最大的创始人之一.

21.6 综合与实践

获取最大利润

一个制造商制造一种产品，它的成本通常分为固定成本和可变成本两个部分，其中固定成本包括设计产品、建造厂房、购置设备、培训工人等费用，如果没有更换产品，我们将它看作常数；可变成本与该产品生产的件数有关，而每件产品的成本包括劳动力、材料、包装、运输等费用. 例如，生产某种收音机的成本（单位：元）可以近似地表示为

$$C=120t+1\,000, \qquad ①$$

其中 C 表示生产 t 台收音机的总成本，当 $t=0$ 时，

$$C=120\times0+1\,000=1\,000,$$

1 000 元是固定成本，由此可知①式中 $120t$ 表示可变成本.

制造商出售产品得到的年总收入等于出售产品的年销售量 t 和产品的销售单价 x 的乘积，设 R 表示年总收入，则

$$R=tx.$$

制造商的年利润是出售产品得到的年总收入和生产这些产品的总成本之间的差额，设 P 表示年利润，则

$$P=R-C=tx-C.$$

问题1 当一个工厂在决定是否要生产某种产品时，往往向市场分析专家咨询该产品的销路. 一种产品的销售量通常与销售单价有关，当单价上涨时，销售量就下降. 假设某市场分析专家提供了下列数据：

销售单价 x/元	50	100	150	300
年销售量 t/件	5 000	4 000	3 000	0

设生产 t 件该产品的成本为

$$C=50t+1\,000.$$

完成下列要求：

（1）在图 21－32 中，描出上述表格中各组数据对应的点；

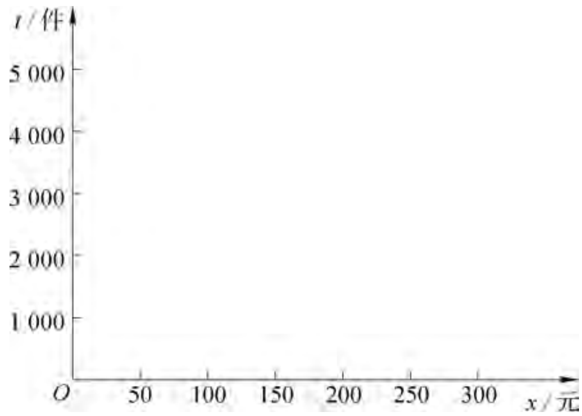


图 21－32

（2）描出的这些点在一直线上吗？求 t 和 x 之间的函数表达式；

（3）问当销售单价 x 和年销售量 t 各为多少时，年利润 P 最大？

问题❷ 设生产 t 件某种电子产品的成本（单位：元）可以近似地表示为

$$C=1\,000t+2\,000\,000.$$

制造商为了获得最大利润，进行了市场调查，取得了该种电子产品销售单价 x 和年销售量 t 之间的一组数据：

年销售量 t/件	750	3 000	5 096	8 500	9 417
销售单价 x/元	3 850	3 400	3 000	2 300	2 100

（1）在图 21－33 中，描出上述表格中各组数据对应的点；

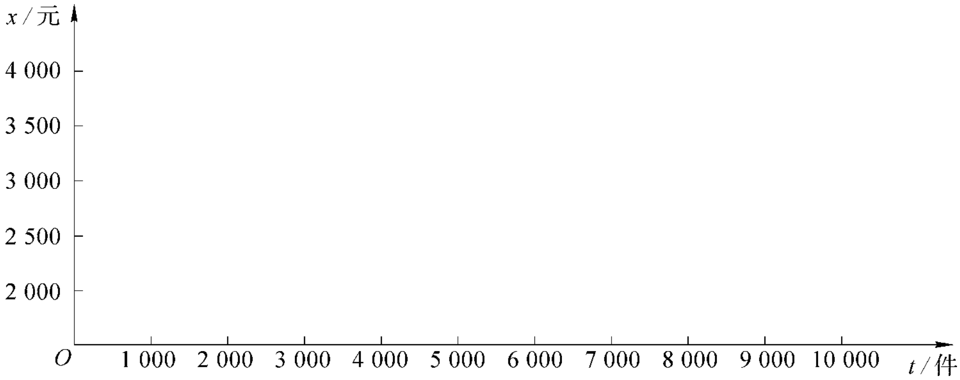
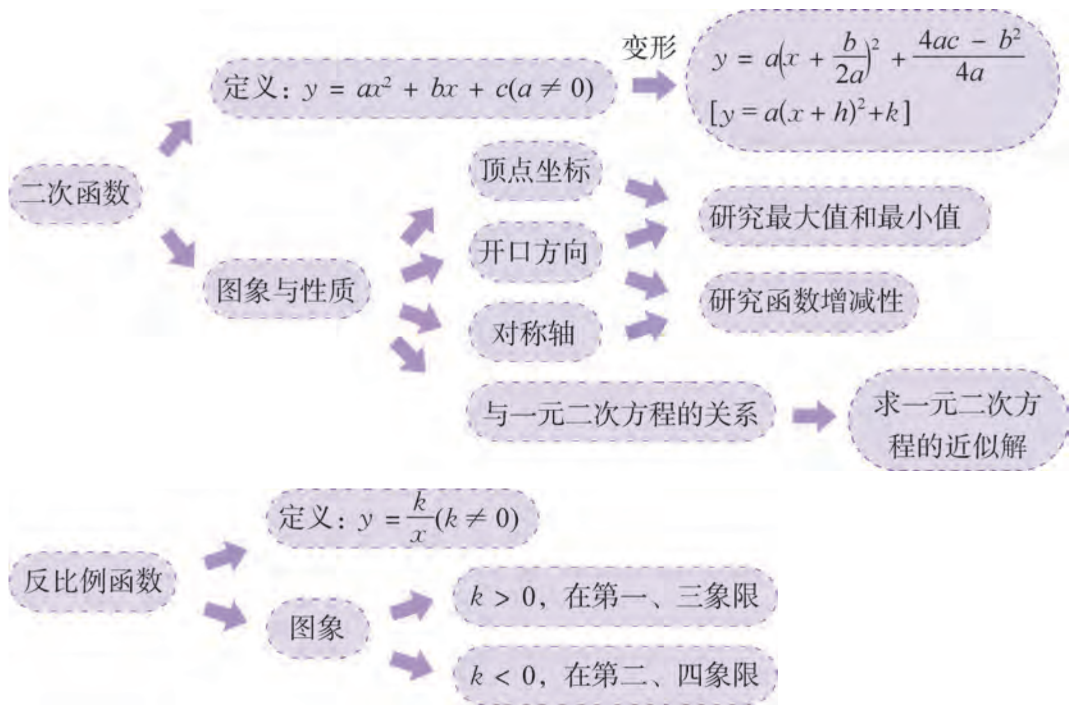


图 21-33

（2）请你帮助制造商分析，当年销售量 t 和销售单价 x 分别是多少时，年利润 P 最大？并说说你有几种求解方法？与同学进行交流.

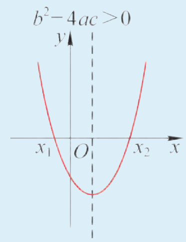
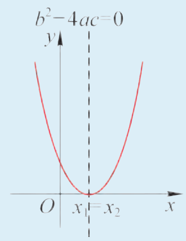
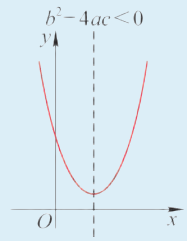
小结·评价

一、内容整理

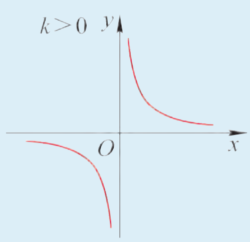
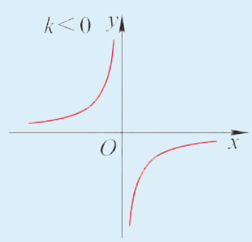


二、主要知识回顾

1. 二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$ 的图象和性质.

抛物线 $y=ax^2+bx+c(a>0)$	 开口方向：向上；对称轴：$x=-\dfrac{b}{2a}$； 顶点坐标：$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$
函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的增减情况	当 $x<-\dfrac{b}{2a}$ 时，函数 y 随 x 的增大而减小； 当 $x>-\dfrac{b}{2a}$ 时，函数 y 随 x 的增大而增大
函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的最大值或最小值	当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$y_{最小值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

2. 反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}\ (k\neq 0)$ 的图象和性质.

函数 $y=\dfrac{k}{x}\ (k\neq 0)$ 的图象		
函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 的增减情况	在 $x>0$ 或 $x<0$ 的范围内，函数 y 随 x 的增大而减小	在 $x>0$ 或 $x<0$ 的范围内，函数 y 随 x 的增大而增大

三、自评与互评

1. 二次函数的图象有哪些特点？这些特点反映出二次函数具有哪些性质？请你通过具体的例子加以说明，并总结出二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a<0$）的图象和性质，与同伴进行交流. 类似地，回答关于反比例函数的问题.

2. 用自己的语言描述二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）的图象与方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的根之间的关系.

3. 函数自变量的取值范围，一方面取决于函数表达式本身的限制，另一方面要考虑实际问题的具体要求，请你举例加以说明.

4. “数形结合”是研究数学的一种重要思想方法，在本章的学习中多次用到这种思想方法，你能举例说明吗？

5. 举例说明二次函数与反比例函数在生活中的应用，并与同伴交流.

A组 复习题

1. 设圆柱的高 h 是常量，写出圆柱的体积 V 与底面周长 C 之间的函数表达式.
2. 求下列函数中自变量 x 的取值范围：
   (1) $y=(1-x)(1-2x)$；
   (2) $y=\dfrac{x^2}{4x^2-4x+2}$；
   (3) $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$.
3. 填表：

抛　物　线	开口方向	对称轴	顶点坐标	使得函数 y 随 x 的增大而减小的 x 的范围
$y=\frac{1}{2}x^2$				
$y=\frac{1}{2}(x-1)^2$				
$y=\frac{1}{2}x^2-2$				

（续　表）

抛　物　线	开口方向	对称轴	顶点坐标	使得函数 y 随 x 的增大而减小的 x 的范围
$y=\frac{1}{2}x^2+2x+3$				
$y=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{13}{2}$				

4. 已知函数 $y=\frac{1}{2}(x-3)^2-1$，求：

（1）抛物线的开口方向、顶点坐标和对称轴；

（2）当 x 取何值时，函数取得最大值或最小值？求出这个值；

（3）x 分别在什么范围内，函数 y 随 x 的增大而减小或函数 y 随 x 的增大而增大；

（4）当 x 取何值时，函数 y 等于 0？

5. 在同一平面直角坐标系中，以抛物线 $y=ax^2(a\neq 0)$ 的形状和位置为标准，分别与抛物线 $y=ax^2+k$、$y=a(x+h)^2$ 和 $y=a(x+h)^2+k\ (a\neq 0)$ 作比较，它们的形状和位置各有什么关系？

6. 填空：

（1）已知抛物线 $y=3x^2-bx+4$ 的顶点在 x 轴上，那么 $b=$________；

（2）已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$，如果抛物线过原点，那么 $c=$____；如果抛物线关于 y 轴对称，那么 $b=$____；如果抛物线与 x 轴只有一个交点，那么 $\Delta=$____；

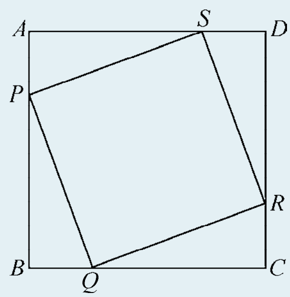
（3）已知函数 $y=kx^2+x+1$ 的图象与 x 轴只有一个交点，则交点坐标为________.

7. 用图象法求下列方程的近似解：（精确到 0.1）

（1）$x^2-3x+2=0$；　　　　（2）$2x^2-3x+1=0$.

8. 如图是窗子的形状，它是由上下连成一体的两个矩形构成. 已知窗框的用料是 6 m，要使窗子能透过最多的光线，问窗子的边长各是多少？

（第 8 题）



（第 9 题）

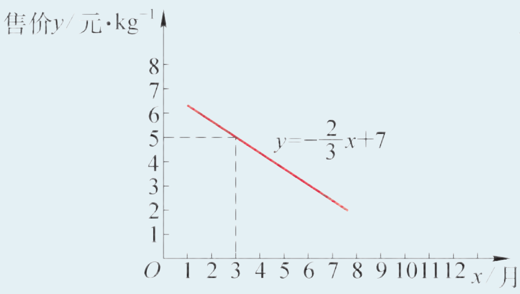
9. 如图,已知一个正方形 $ABCD$ 的边长为 a,分别在边 AB,BC,CD,DA 上截取相等的线段 AP,BQ,CR,DS,连接 PQ,QR,RS,SP,则得到正方形 $PQRS$. 问要使正方形 $PQRS$ 的面积最小,所截取的四条线段每条应该多长?

10. 某旅行社组团旅游,如果一次预定人数为 30 人,那么每人收费5 000 元. 若要增加人数,则每增 1 人,可使每人少收 100 元. 问增加多少人可使该旅行社一次收入最多,最多是多少元?

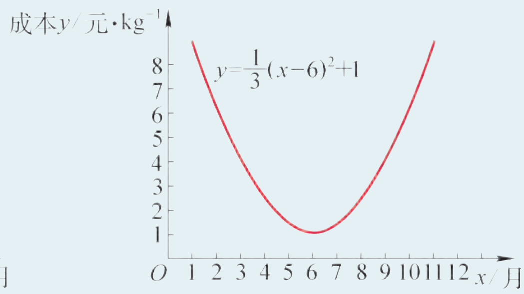
11. 某蔬菜市场为指导某种蔬菜的生产和销售,对往年的市场行情和生产情况进行了调查,提供的信息如图.

(1) 在 3 月份出售这种蔬菜,每千克的收益是多少元?(收益 = 售价 − 成本)

(2) 哪个月出售这种蔬菜的收益最大? 为什么?



(1)



(2)

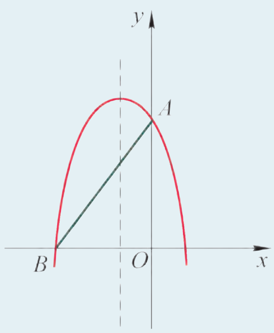
(第 11 题)

12. 如图,二次函数 $y=-x^2+(k-1)x+4$ 的图象与 y 轴交于点 A,与 x 轴的负半轴交于点 B,且△AOB 的面积为 6.

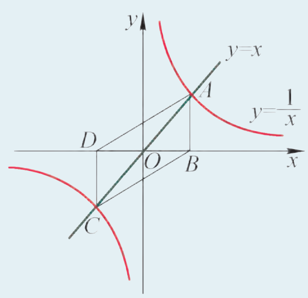
(1) 求 A,B 两点的坐标;

(2) 求该二次函数的表达式;

(3) 如果点 P 在坐标轴上,且△ABP 是等腰三角形,求点 P 的坐标.



(第 12 题)

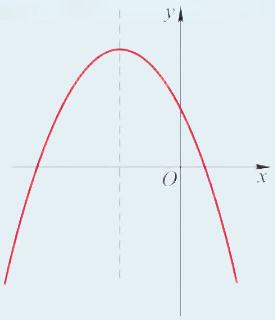


(第 13 题)

13. 如图,正比例函数 $y = x$ 与反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象交于 A,C 两点,分别从点 A,C 作 x 轴的垂线,垂足为 B,D,求四边形 $ABCD$ 的面积.

B组 复习题

1. 选择:



(第 1 题)

(1) 如图,已知函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象,则下列判断正确的是(　　).

(A) $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$

(B) $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$

(C) $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$

(D) $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$

(2) 对于二次函数 $y = a(x + k)^2 + k$ $(k \neq 0)$,当 k 取不同实数时,函数图象的顶点在(　　).

(A) 直线 $y = x$ 上　　(B) 直线 $y = -x$ 上

(C) x 轴上　　(D) y 轴上

(3) 在函数① $y = 4x^2$, ② $y = \frac{2}{3}x^2$, ③ $y = -\frac{4}{3}x^2$ 中, 图象开口大小顺序用序号表示应为(　　).

(A) ①>②>③　　(B) ①>③>②

(C) ②>③>①　　(D) ②>①>③

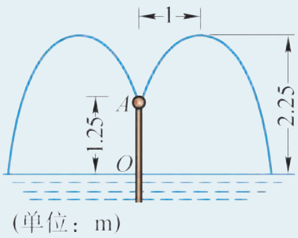
(4) 如果将抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 向右平移 2 个单位,再向上平移 3 个单位,得到新的抛物线 $y = x^2 - 2x + 1$,那么(　　).

(A) $b = 6$, $c = 12$　　(B) $b = -6$, $c = 6$

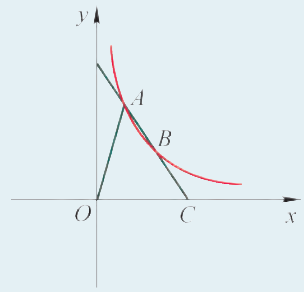
(C) $b = 2$, $c = -2$　　(D) $b = 2$, $c = 4$

2. 平移抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$,使顶点坐标为 (t, t^2),并且经过点 $(2, 4)$, 求平移后抛物线对应的函数表达式.

3. 如图，公园要建造一个圆形的喷水池，在水池中央垂直于水面安装一个柱子 OA，O 恰在水面中心，OA 为1.25 m，安置在柱子顶端 A 处的喷头向外喷水，水流在各个方向上沿形状相同的抛物线路径落下．为使水流形状美观，设计成水流距 OA 水平距离为 1 m 处达到最大高度 2.25 m．如果不计其他因素，那么水池的半径至少要多少米，才能使水不落到池外？



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，A，B 是反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k>0)$ 图象上的两点，A，B 两点的横坐标分别为 1，2，线段 AB 的延长线交 x 轴于点 C．若△AOC 的面积为 6，求 k 的值．

5. （1）在函数 $y=\dfrac{k}{x}(k>0)$ 的图象上有点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$，且 $x_1<x_2<0<x_3$，试比较 y_1，y_2，y_3 的大小；

（2）对于函数 $y=\dfrac{k}{x}(k<0)$，当 $x_1<x_2$ 时，比较 y_1 与 y_2 的大小．

6. 当 $x=2$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 取得最小值为 -3，且抛物线与 y 轴交于点 $C(0, 1)$．

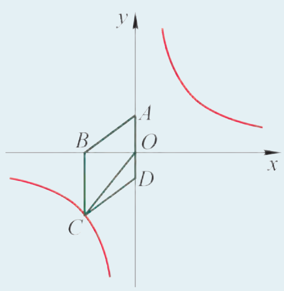
（1）求该抛物线对应的函数表达式；

（2）若点 $M(m, y_1)$，$N(m+2, y_2)$ 都在抛物线上，试比较 y_1 与 y_2 的大小．

7. 如图，在平面直角坐标系中，已知四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $A(0, 3)$，$B(-4, 0)$．

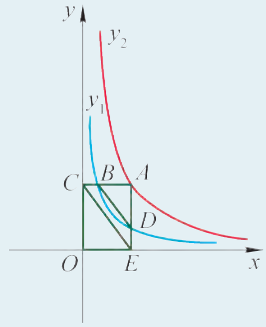
（1）求过点 C 的反比例函数表达式；

（2）设 P 是（1）中所求函数图象上的一点，以 P，O，A 为顶点的三角形面积与△COD 的面积相等，求点 P 的坐标．



（第 7 题）

8. 如图,已知反比例函数 $y_1=\frac{1}{x}$, $y_2=\frac{3}{x}$ 在第一象限的图象,过 y_2 上任意一点 A,作 x 轴的平行线交 y_1 于点 B,交 y 轴于点 C,过点 A 作 x 轴的垂线交 y_1 于点 D,交 x 轴于点 E,连接 BD, CE,则 $\frac{BD}{CE}=$ ________.



(第 8 题)

C组 复习题

1. 结合函数 $y=-2x^2+3x+5$ 的图象,确定当 x 取何值时,有

(1) $y=0$? (2) $y>0$? (3) $y<0$?

2. 下列函数在给定范围内是否能取得最大值或最小值,这个值是多少?

(1) $y=x^2-4x+5\quad(0\leqslant x\leqslant 3)$;

(2) $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-4\quad(1\leqslant x\leqslant 5)$;

(3) $y=-x^2+2x+2\quad(2<x\leqslant 4)$.

3. 甲、乙两船航行于海上,甲船在乙船正北方向 125 n mile 处,以 15 n mile/h 的速度向东行驶,乙船以 20 n mile/h 的速度向北行驶. 问多少时间后两船靠得最近?

4. (1) 当 b 分别为何值时,一次函数 $y=2x+b$ 的图象与二次函数 $y=x^2-2x+3$ 的图象有一个公共点、两个公共点?

(2) 当 b 分别为何值时,一次函数 $y=2x+b$ 的图象与反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 的图象有一个公共点、两个公共点?

5. 在下列函数中,当 x 为何值时,y 取得最小值?

(1) $y=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2$;

(2) $y=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+(x-a_3)^2$;

(3) $y=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$.

6. 求在直线 $x+y=2$ 上与原点距离最近的点的坐标.

第22章 相似形

在制作不同尺寸的国旗时，旗上的五角星形状是相同的，但大小不一样．在日常生活中，常常需要像这样将一个图形按一定的比例放大或缩小，但不改变其形状．这些形状相同的图形有什么特征呢？

本章将学习相似形的有关知识，并用它解决一些问题．

22.1 比例线段

如图 22－1，由同一底片直接印出来的照片与扩印出来的照片，它们的形状是相同的.

图　22－1

如图 22－2，在制作大小尺寸不同的国旗时，所画的两个五角星图形，它们的形状也是相同的.

图　22－2

我们把这种形状相同的两个图形说成是相似的图形.

在图 22－3(1)中，正方形 $ABCD$ 和正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的形状是相同的，即是相似的图形；在图 22－3(2)中，等边三角形 ABC 和等边三角形 $A_1B_1C_1$ 也是相似的图形. 正方形、等边三角形都是多边形，两个相似的多边形有什么特征呢?

如图 22－3(1)的两个正方形,应有

$$\angle A=\angle A_1,\ \angle B=\angle B_1,\ \angle C=\angle C_1,\ \angle D=\angle D_1;$$

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DA}{D_1A_1}=\frac{1.6}{3.2}=\frac{1}{2}.$$

如图 22－3(2)的两个等边三角形,应有

$$\angle A=\angle A_1,\ \angle B=\angle B_1,\ \angle C=\angle C_1;$$

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

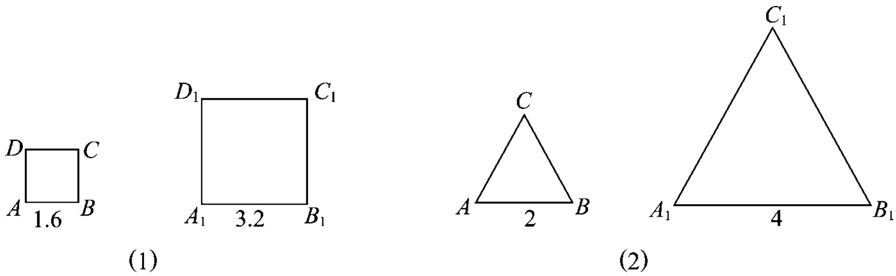
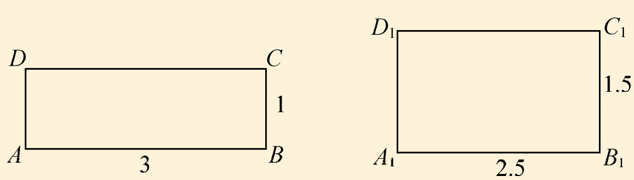


图　22－3

一般地,两个边数相同的多边形,如果它们的对应角相等,对应边长度的比相等,那么这两个多边形叫做**相似多边形**(similar polygons).相似多边形对应边长度的比叫做**相似比**(similarity ratio)或**相似系数**.

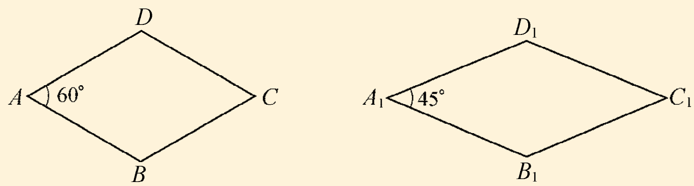
练习

1. 如图,矩形 $ABCD$ 与矩形 $A_1B_1C_1D_1$ 相似吗? 为什么?



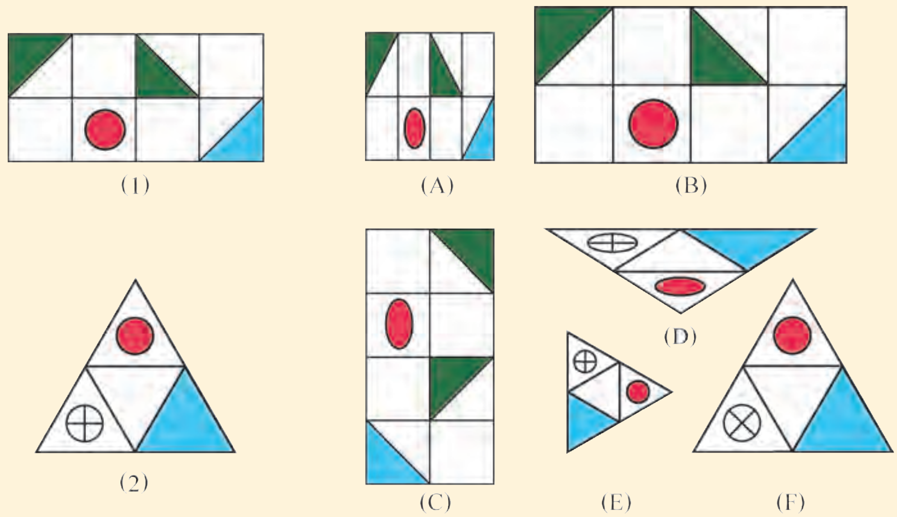
(第 1 题)

2. 如图，菱形 $ABCD$ 与菱形 $A_1B_1C_1D_1$ 相似吗？为什么？



（第 2 题）

3. 在图形(A)～(F)中，哪些是由图形(1)或(2)放大或缩小得到的？



（第 3 题）

由于多边形的边是线段，所以在研究图形相似之前，先要学习成比例线段的有关知识.

用同一个长度单位去度量两条线段 a，b，得到它们的长度，我们把这两条线段长度的比叫做这两条线段的**比**，记作 $\frac{a}{b}$ 或 $a : b$. 例如 $a = 2.0$ cm，$b = 1.5$ cm，那么

$$\frac{a}{b} = \frac{2.0}{1.5} = \frac{4}{3}.$$

在四条线段 a，b，c，d 中，如果其中两条线段 a，b 的比，等于另外两条线段 c，d 的比，即 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$（或 $a : b = c : d$），那么这四

条线段叫做**成比例线段**(proportional segments),简称**比例线段**. 这时,线段 a,b,c,d 叫做组成比例的**项**,线段 a,d 叫做**比例外项**,线段 b,c 叫做**比例内项**.

如果作为比例内项的两条线段是相等的,即线段 a,b,c 之间有 $a:b=b:c$,那么线段 b 叫做线段 a,c 的**比例中项**.

练习

1. 选择:

(1) 如果线段 $a=2$ cm, $b=10$ mm,那么 $\frac{a}{b}$ 的值为(　　).

(A) $\frac{1}{50}$　　(B) $\frac{1}{5}$　　(C) $\frac{5}{2}$　　(D) 2

(2) 如果 $a=10$ cm, $b=0.2$ m, $c=30$ mm, $d=6$ cm,那么下列比例式子成立的是(　　).

(A) $\frac{a}{d}=\frac{b}{c}$　　(B) $\frac{b}{d}=\frac{c}{a}$　　(C) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$　　(D) $\frac{d}{c}=\frac{a}{b}$

(3) 如果线段 $a=32$ cm, $b=8$ cm,那么 a 和 b 的比例中项是(　　).

(A) 20 cm　　(B) 18 cm　　(C) 16 cm　　(D) 14 cm

2. 延长线段 AB 到点 C,使 $BC=AB$. 求:

(1) $AC:AB$;　　(2) $AB:BC$;　　(3) $BC:AC$.

两条线段的比是它们长度的比,也就是两个数的比,因此也应具有关于两个数成比例的性质.

(1) 基本性质

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,那么 $ad=bc$　$(b,d\neq 0)$.

反之也成立,即

如果 $ad=bc$,那么 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$　$(b,d\neq 0)$.

(2) 合比性质

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,等式两边同时加上 1,得

$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$. 即

如果$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,那么$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ $(b,d\neq 0)$.

(3) 等比性质

如果$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$,且 $b_1+b_2+\cdots+b_n\neq 0$,那么 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}$.

设$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=k$,得

$a_1=b_1k$, $a_2=b_2k$, $\cdots$, $a_n=b_nk$,代入待证明的等式左边,提取公因式并约分即得等比性质.

例 1 已知:如图 22-4,在$\triangle ABC$中,$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

求证:(1) $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$; (2) $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$.

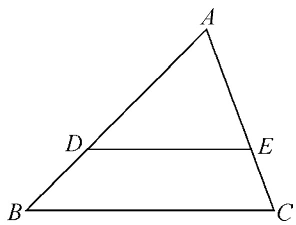


图 22-4

证明 (1) $\because$ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$,

$\therefore$ $\frac{AD+DB}{DB}=\frac{AE+EC}{EC}$.

$\therefore$ $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$.

(2) $\because$ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$,

$\therefore$ $\frac{DB}{AD}=\frac{EC}{AE}$.

$\therefore$ $\frac{AD+DB}{AD}=\frac{AE+EC}{AE}$.

$\therefore$ $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$.

$\therefore$ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$.

例 2 在地图或工程图纸上,都标有比例尺,比例尺就

是图上长度与实际长度的比. 现在一张比例尺为1∶5 000的图纸上,量得一个△ABC的三边:$AC=3$ cm, $BC=4$ cm, $AB=5$ cm. 问这个图纸所反映的实际△$A'B'C'$的周长是多少?

解 根据题意,得

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{1}{5\ 000},$$

即

$$\frac{AB+BC+AC}{A'B'+B'C'+A'C'}=\frac{1}{5\ 000}.$$

又 ∵ $AB+BC+AC=5+4+3=12$(cm),

∴ $A'B'+B'C'+A'C'$

$=12\times 5\ 000=60\ 000$(cm) $=600$(m).

答:实际△$A'B'C'$的周长是600 m.

这个问题实际上就是古希腊数学家、天文学家欧多克斯(Eudoxus,前408—前355)提出的问题:能否将一条线段AB分成不相等的两部分AP和PB($AP>PB$),使AB∶AP=AP∶PB?

例3 如图22-5,已知线段AB长度为a,点P是AB上一点,且使AB∶$AP=AP$∶PB. 求线段AP的长和$\frac{AP}{AB}$的值.

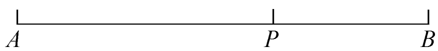


图 22-5

解 设$AP=x$,那么$PB=a-x$. 根据题意,得

$$a:x=x:(a-x),$$

即

$$x^2+ax-a^2=0.$$

解方程,得

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}a.$$

因为线段长度不能是负值,所以取$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}a$,

即

$$AP=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}a.$$

于是 $$\frac{AP}{AB}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618.$$

把一条线段分成两部分,使其中较长线段为全线段与较短线段的比例中项,这样的线段分割叫做**黄金分割**(golden section)，分割点叫做这条线段的**黄金分割点**，比值 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 叫做**黄金数**.

练习

1. 在比例尺是 1∶50 的图纸上，量得一个零件的长是 32 cm，求这个零件的实际长.
2. 已知：$a:b=c:d$，且 $a=2.4$ cm，$b=3.6$ cm，$c=5.4$ cm，求 d 的值.
3. 已知 $5x-4y=0$，求 $\frac{x}{y}$ 和 $\frac{x+y}{y}$ 的值.
4. 已知 $\frac{a-b}{b}=\frac{2}{3}$，求 $a:b$ 的值.
5. 已知 $ad=bc$，如何能得到 $d:b=c:a$？还能得到哪些比例式子？
6. 已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{3}{5}$，且 $b+d+f\neq 0$，求 $\frac{a+c+e}{b+d+f}$ 的值.
7. 已知点 C 是线段 AB 的黄金分割点，$BC=AC+2$，求线段 AC 的长.

在八年级下册第 19 章中，我们学习了平行线等分线段的定理，现在，我们来研究一组平行线截线的一般情形.

观察

如图 22-6，有一组平行直线：$l_1 // l_2 // l_3 \cdots l_k // \cdots // l_{n-1} // l_n$，另外，直线 A_1A_n 与直线 B_1B_n 被这一组平行直线分别截于点 A_1，A_2，A_3，…，A_k，…，A_{n-1}，A_n 和点 B_1，B_2，B_3，…，B_k，…，B_{n-1}，B_n. 根据已学定理，可以得到：如果 $A_1A_2=$

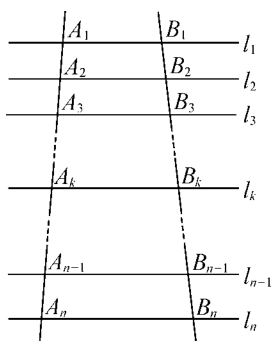


图 22-6

$A_2A_3=\cdots=A_{n-1}A_n$，那么 $B_1B_2=B_2B_3=\cdots=B_{n-1}B_n$.

这时，如设 $A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_{n-1}A_n=a$，$B_1B_2=B_2B_3=\cdots=B_{n-1}B_n=b$，容易推得：

$$\frac{A_1A_k}{A_kA_n}=\frac{(k-1)a}{(n-k)a}=\frac{k-1}{n-k},$$

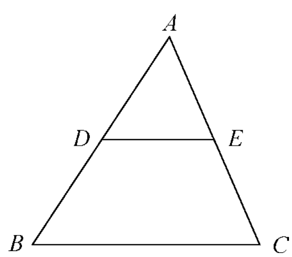
$$\frac{B_1B_k}{B_kB_n}=\frac{(k-1)b}{(n-k)b}=\frac{k-1}{n-k},$$

所以有 $\dfrac{A_1A_k}{A_kA_n}=\dfrac{B_1B_k}{B_kB_n}$.

上述结论可概括为如下**基本事实**：

两条直线被一组平行线所截，所得的对应线段成比例.

下面看一个特例，如图 22-7，直线 DE 平行于△ABC 的一边 BC，并分别交另两边 AB，AC（或它们延长线）于点 D，E. 根据上面基本事实，得 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$.



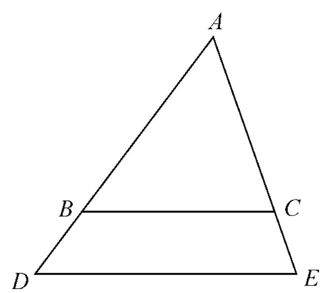
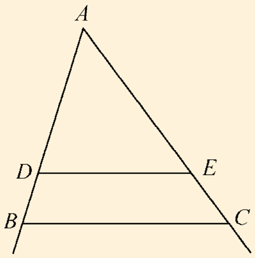


图　22-7

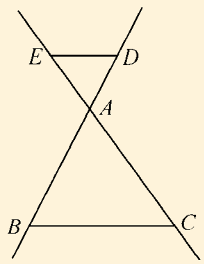
推论　**平行于三角形一边的直线截其他两边（或两边延长线），所得的对应线段成比例.**

练习

1. 如图，点 B，D 在 $\angle A$ 的一条边上，点 C，E 在 $\angle A$ 的另一条边上，且 $DE \parallel BC$. 若 $AB = 14$，$AC = 18$，$AE = 11$，求 AD 的长.



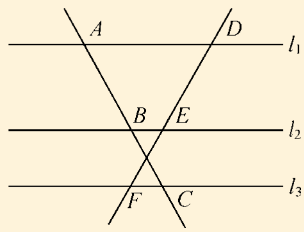
（第 1 题）



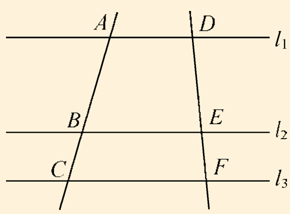
（第 2 题）

2. 如图，点 B，C 在 $\angle BAC$ 的两边上，点 D，E 在 $\angle BAC$ 两边的反向延长线上，且 $ED \parallel BC$. 若 $AB = 5$，$AC = 6$，$AD = 2$，求 AE 的长.

3. 如图，$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{3}{2}$，$DE = 6$，求 DF 的长.



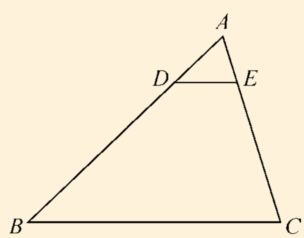
（第 3 题）



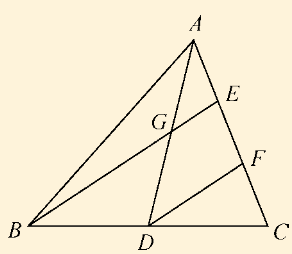
（第 4 题）

4. 如图，$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，$AB = a$，$BC = b$，$EF = c$，求 DE 的长.

5. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$DE \parallel BC$，$AD = 2$，$BD = 6$，$AE = 1.5$，求 EC 的长.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，AD 是$\triangle ABC$ 的中线，$AE = EF = FC$，BE 交 AD 于点 G，求$\dfrac{AG}{AD}$的值.

习题 22.1

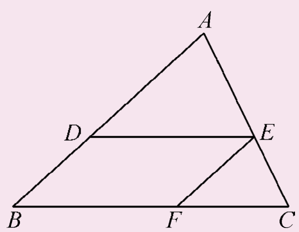
1. （1）已知 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=\dfrac{5}{7}$，且 $2b-d+7f\neq 0$，求 $\dfrac{2a-c+7e}{2b-d+7f}$ 的值；

（2）已知 $\dfrac{x+y}{z}=\dfrac{x+z}{y}=\dfrac{y+z}{x}=k$，且 $x+y+z\neq 0$，求 k 的值.

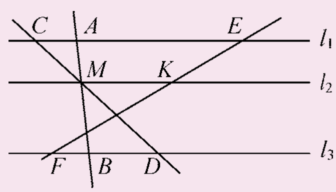
2. 已知：在四边形 $ABCD$ 和四边形 $A'B'C'D'$ 中，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{DA}{D'A'}=\dfrac{8}{5}$，且四边形 $A'B'C'D'$ 的周长为 80 cm，求四边形 $ABCD$ 的周长.

3. 已知：点 P 在线段 AB 上，且 $AP:PB=2:5$，求 $AB:PB$ 和 $AP:AB$ 的值.

4. 已知：如图，点 D,E,F 分别在△ABC 的边 AB，AC，BC 上，且 $DE\parallel BC$，$EF\parallel AB$. 求证：$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{BF}{BC}=\dfrac{DE}{BC}$.



（第 4 题）



（第 5 题）

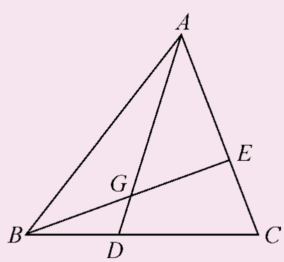
5. 如图，$l_1\parallel l_2\parallel l_3$，$AM=3$，$MB=5$，$CM=4.5$，$EF=16$，求 DM，EK，KF 的值.

6. 已知：在四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，点 E 是边 AB 上的一点，在边 CD 上找一点 F，使 $AE:EB=DF:FC$.

7. 点 P 是 $\angle AOB$ 内一点，过点 P 作一直线与 $\angle AOB$ 的两边 OA，OB 分别交于点 E，F，使 $PE:PF=2:1$.

8. 已知：在△ABC 中，作直线 DN 平行于 BC 上的中线 AM，设直线 DN 交 AB 于点 D、交 CA 的延长线于点 E、交 BC 于点 N. 求证：$AD:AB=AE:AC$.

9. 如图，$AG:GD=4:1$，$BD:DC=2:3$，求 $AE:EC$ 的值.



（第 9 题）

10. 已知：在△ABC 中，AD 为 $\angle A$ 平分线.

求证：$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$.

阅读与欣赏

奇妙的黄金数

1. 黄金数与黄金分割

我们已经知道 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 叫做黄金数，其近似值为0.618，它可通过解方程 $x^2+x-1=0$ 得到.

如图22－8，给定一条线段 AB，如何找出它的黄金分割点呢？

我们通过如下作图来达到要求：

(1) 过点 B 作 AB 的垂线，并在垂线上取 $BC=\frac{1}{2}AB$；

(2) 连接 AC，以点 C 为圆心、CB 为半径画弧，交 AC 于点 E；

(3) 以点 A 为圆心、AE 为半径画弧，交 AB 于点 P.

则点 P 即为所求.

你能说明这样作图的道理吗？

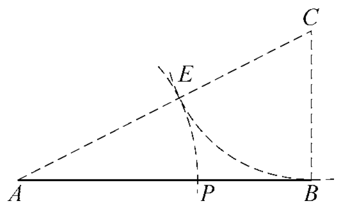


图 22－8

2. 黄金数与图形

一般民居的窗户大多采用矩形(图22－9). 建筑学家研究过，一个矩形如果切掉一个正方形后，剩下的小矩形与原来的矩形相似，这时看起来较美观.


图 22－9

如图22－10，四边形 $ABCD$ 为矩形，设 AD 为 x，CD 为 y，其中四边形 $BCFE$ 为正方形，且矩形 $ABCD$ 相似于矩形 $ADFE$. 这时便有

$$\frac{x}{y}=\frac{y-x}{x},$$

即 $$\frac{x}{y}=\frac{y}{x}-1.$$

等式两边同乘 $\frac{x}{y}$，得

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{x}{y}\right)-1=0.$$

因为 $\frac{x}{y}$ 为正，解方程，得

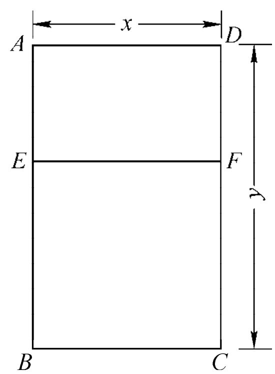


图 22－10

$$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

这样的矩形,叫做**黄金矩形**,其两边长的比值就是黄金数.

不仅最好看的窗户是黄金矩形,有些旗帜的形状也是黄金矩形.

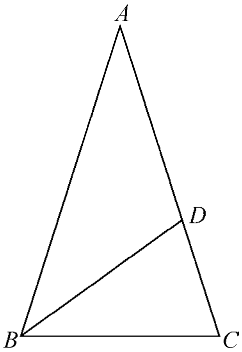


图 22-11

在三角形中,顶角为36°的等腰三角形叫做**黄金三角形**,为什么呢?

如图22-11,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,$\angle A=36°$,作$\angle B$的平分线BD,那么可以证明:点D是AC的黄金分割点.

3. 黄金分割与奇妙现象

伟大的物理学家和天文学家开普勒(J. Kepler, 1571—1630)曾经说过:“几何学里有两个宝库:一个是毕达哥拉斯定理(即勾股定理),另一个就是黄金分割. 前者可以比作金矿,而后者却可以比作珍贵的钻石矿.”

公元前5世纪的古希腊建筑师已发现,黄金分割会使建筑物增添美感,如当时建筑的巴特农神殿(图22-12),它的正面尺寸

图 22-12

与黄金矩形吻合. 古希腊人还认为一个人有完美的(理想的)体形,是因为身体的很多部位都符合黄金分割的缘故. 达·芬奇就曾广泛研究了人体的各种比例,并且还画出图,标明了其中很多有关黄金分割的实例. 一些艺术家在画人像或雕塑人体时,基本上就是按黄金分割做的.

黄金分割不仅为人类所了解和利用,而且它还支配着自然界. 人们发现有些植物叶子的分布规律和黄金数有关. 在图

22－13 中，当从茎的顶端向茎的根部看去时，得到各层叶子重叠的平面图，图中每层叶子只画一个作代表. 第一层叶子和第二层之间，方向的角度差大致是 137.5°，以后第二与第三、第三与第四、第四与第五、第五与第六，每相邻两层叶子方向的角度差都是这个度数，这样可以比较均匀地把多层叶子铺展开来.

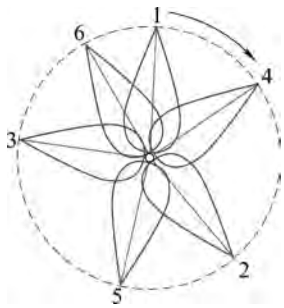


图 22－13

137.5°这个数究竟有什么特点呢？因为一周是 360°，$360^{\circ}-137.5^{\circ}=222.5^{\circ}$，而 $137.5:222.5\approx0.618$. 这里，又发现了一个黄金数，这种奇妙现象真叫人惊奇！

22.2 相似三角形的判定

两个三角形相似，用字母表示时，与全等一样，通常把表示对应顶点的字母写在对应位置上，这样便于找出相似三角形的对应角与对应边.

在相似多边形中，最简单的就是相似三角形.

如图 22－14，$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$ 相似，记作"$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$"，读作"$\triangle ABC$ 相似于$\triangle A'B'C'$".

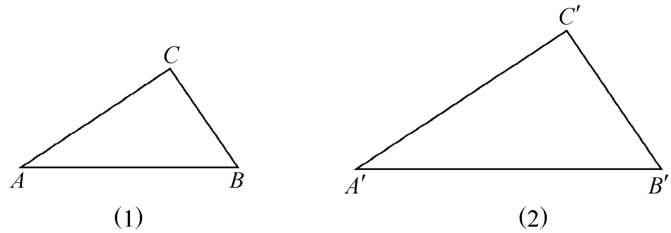


图　22－14

对于 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，根据相似形的定义，应有

$$\angle A = \angle A',\ \angle B = \angle B',\ \angle C = \angle C',$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

将 $\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$ 的相似比记为 k_1，$\triangle A'B'C'$ 与$\triangle ABC$ 的相似比记为 k_2，可得 $k_1 = \frac{1}{k_2}$. 当且仅当这两个三角形全等时，才有 $k_1 = k_2 = 1$. 因此，三角形全等是三角形相似的特例.

这里的结论，对于任意两个相似多边形都成立.

怎样判定两个三角形相似呢？我们先来研究如下的一个问题.

探究

如图 22－15，在 $\triangle ABC$ 中，D 为 AB 上任意一点，

过点 D 作 BC 的平行线交 AC 于点 E，那么$\triangle ADE$ 与$\triangle ABC$ 相似吗？

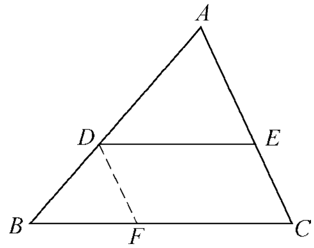


图 22－15

要证$\triangle ADE$ 与$\triangle ABC$ 相似，关键是要证明它们的对应边长度的比相等，因为它们的对应角是分别相等的（为什么？）.

过点 D 作 AC 的平行线交 BC 于点 F.

$\because \quad DE \parallel BC,\ DF \parallel AC,$

$\therefore \quad \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC},\ \dfrac{FC}{BC}=\dfrac{AD}{AB}.$

$\because$ 　四边形 $DFCE$ 是平行四边形，

$\therefore \quad DE=FC$，即 $\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}.$

$\because \quad \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC},$

又 $\because \quad \angle A=\angle A, \angle B=\angle ADE,\ \angle C=\angle AED,$

$\therefore \quad \triangle ADE \backsim \triangle ABC.$

于是得到如下有用结论：

平行于三角形一边的直线与其他两边（或两边的延长线）相交，截得的三角形与原三角形相似（图 22－16）.

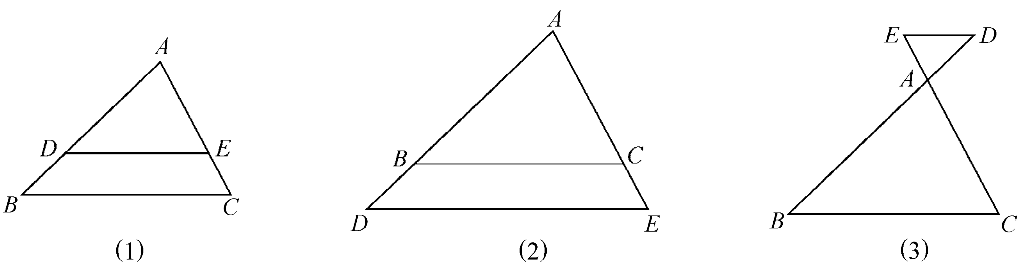


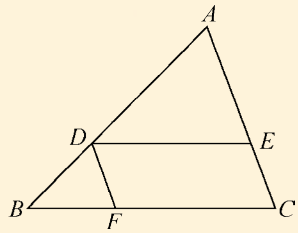
图 22－16

练习

如图，点 D 在 $\triangle ABC$ 的边 AB 上，$DE \parallel BC$，DE 交 AC 于点 E，$DF \parallel AC$，DF 交 BC 于点 F，判断下列比例式子是否成立.

(1) $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$；　　(2) $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{DE}{BF}$；

(3) $\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{DE}{BC}$；　　(4) $\dfrac{DF}{AC}=\dfrac{BF}{BC}$.



根据定义，要判定两个三角形相似，必须证明对应角相等，对应边成比例（对应边长度的比相等）. 那么能不能像判定三角形全等一样，用较少的条件就能判定三角形相似呢？

有了上面的结论，我们来研究：怎样的条件可以判定两个三角形相似.

*已知：如图 22－17，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$.

求证：$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

证明　在 $\triangle ABC$ 的边 AB（或延长线）上，截取 $AD=A'B'$，过点 D 作 BC 的平行线 DE 交 AC 于点 E，则

$$\triangle ADE \backsim \triangle ABC.$$

$\because$　$\angle ADE=\angle B$，$\angle B=\angle B'$，

$\therefore$　$\angle ADE=\angle B'$.

$\because$　$\angle A=\angle A'$，$AD=A'B'$，

$\therefore$　$\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$（ASA）.

$\therefore$　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

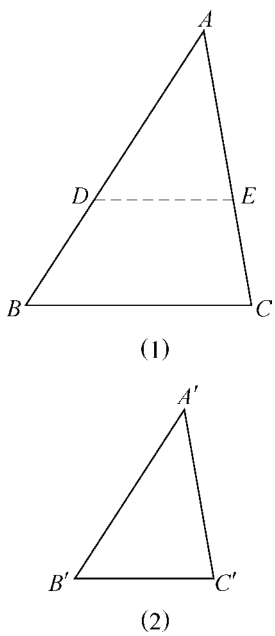


图　22－17

于是得到判定三角形相似的以下定理.

定理 1　如果一个三角形的两个角分别与另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似（可简单说成：**两角分别相等的两个三角形相似**）.

练习

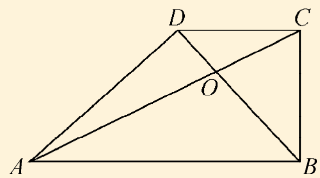
1. 已知：在$\triangle ABC$中，$AB=AC$；在$\triangle A'B'C'$中，$A'B'=A'C'$.

(1) 如果$\angle A=\angle A'$，求证：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$；

(2) 如果$\angle B=\angle B'$，求证：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

2. 如果$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle A_2B_2C_2$，那么$\triangle ABC$与$\triangle A_2B_2C_2$有什么关系，为什么？

3. 如图，在四边形$ABCD$中，$DC\parallel AB$，对角线AC交BD于点O. 找出图中相似三角形，并写出它们对应边成比例的式子.



(第 3 题)

判定三角形相似，还有下面的定理.

定理 2　如果一个三角形的两条边与另一个三角形的两条边对应成比例，并且夹角相等，那么这两个三角形相似（可简单说成：**两边成比例且夹角相等的两个三角形相似**）.

* 已知：如图 22－18，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$，$\angle A=\angle A'$.

求证：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

证明　在$\triangle ABC$的边AB（或延长线）上，截取$AD=A'B'$，过点D作BC的平行线DE交AC于点E，则

$$\triangle ADE\backsim\triangle ABC.$$

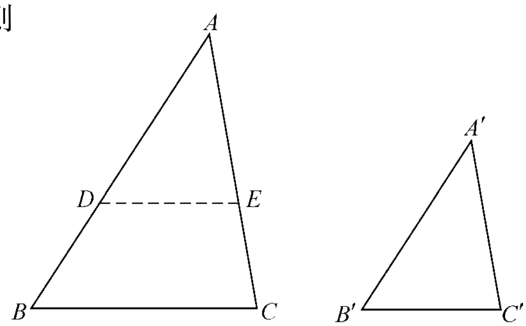
$\because\quad \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}$，$AD=A'B'$，

$\therefore\quad \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{AE}$.

$\because\quad \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$，

$\therefore\quad \dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{AC}{AE}$，

$A'C'=AE$.



(1)　　(2)

图　22－18

$\because \quad \angle A=\angle A',$

$\therefore \quad \triangle ADE \cong \triangle A'B'C'(SAS).$

$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'.$

练习

1. (1) 在$\triangle ABC$中,$\angle A=48^\circ$, $AB=1.5$ cm, $AC=2$ cm;在$\triangle DEF$中,$\angle E=48^\circ$, $DE=2.8$ cm, $EF=2.1$ cm. 问这两个三角形相似吗?为什么?

   (2) 在$\triangle ABC$中,$\angle A=120^\circ$, $AB=7$ cm, $AC=14$ cm;在$\triangle DEF$中,$\angle D=120^\circ$, $DE=3$ cm, $DF=6$ cm. 问这两个三角形相似吗?为什么?

2. 在Rt$\triangle ABC$中,两直角边分别为3 cm,4 cm;在Rt$\triangle A'B'C'$中,斜边为25 cm,一条直角边为15 cm. 问这两个直角三角形相似吗?为什么?

定理3　如果一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边对应成比例,那么这两个三角形相似(可简单说成:**三边成比例的两个三角形相似**).

仿照定理1和定理2的证明可证明定理3(SSS).

例1　在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中,已知下列条件成立,判断这两个三角形是否相似,并说明理由.

(1) $AB=5$, $AC=3$, $\angle A=45^\circ$, $A'B'=10$, $A'C'=6$, $\angle A'=45^\circ$;

(2) $\angle A=38^\circ$, $\angle C=97^\circ$, $\angle A'=38^\circ$, $\angle B'=45^\circ$;

(3) $AB=2$, $BC=\sqrt{2}$, $AC=\sqrt{10}$, $A'B'=\sqrt{2}$, $B'C'=1$, $A'C'=\sqrt{5}$.

解　(1) $\because \quad \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2},$

$$\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2},$$

$$\therefore \quad \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}.$$

$\because \quad \angle A = \angle A' = 45°$，

$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

（2）$\because \quad \angle B = 180° - (\angle A + \angle C)$

$= 180° - (38° + 97°)$

$= 45°$，

$\therefore \quad \angle B = \angle B' = 45°$.

$\because \quad \angle A = \angle A' = 38°$，

$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

（3）$\because \quad \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \quad \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$，

$\dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$，

$\therefore \quad \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$.

$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

例 2 如图 22－19，BC 与 DE 相交于点 O. 问：

（1）当 $\angle B$ 满足什么条件时，$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$？

（2）当 $AC : AE$ 满足什么条件时，$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$？

分析：从图 22－19 中可以看出，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 中，$\angle A = \angle A$，根据三角形相似的判定定理，只要 $\angle B = \angle D$ 或 $AC : AE = AB : AD$，都有 $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$.

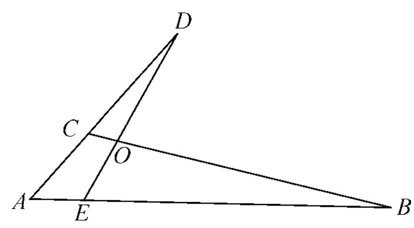


图　22－19

解　（1）$\because \quad \angle A = \angle A$，

$\therefore$ 　当 $\angle B = \angle D$ 时，

$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$.

（2）$\because \quad \angle A = \angle A$，

$\therefore$ 　当 $AC : AE = AB : AD$ 时，

$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$.

例 3 如图 22－20，方格网的小方格是边长为 1 的正方形，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的顶点都在格点上，判断 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是否相似，为什么？

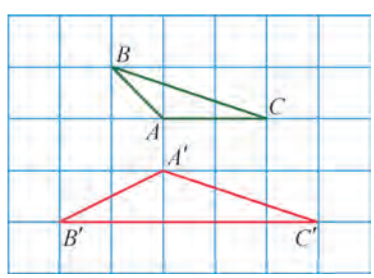


图　22－20

解　由于 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的顶点均在格点上，

根据勾股定理,得

$$AB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},\ AC=2,\ BC=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10};$$

$$A'B'=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5},\ A'C'=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10},$$

$B'C'=5$.

$$\because\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5},\ \frac{AC}{A'C'}=\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5},$$

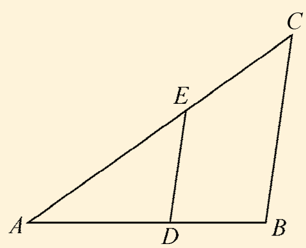
$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{\sqrt{10}}{5},$$

$$\therefore\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

$$\therefore\ \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'.$$

练习

1. 在$\triangle ABC$中,$\angle C>\angle B$, P是边AB上的一点,连接CP.
   (1) 当$\angle ACP$满足什么条件时,$\triangle ACP\backsim\triangle ABC$?
   (2) 当$AP:AC$满足什么条件时,$\triangle ACP\backsim\triangle ABC$?
2. 如图,$AE=4\text{ cm}$, $AD=3\text{ cm}$, $DE=2.4\text{ cm}$, $BD=2\text{ cm}$, $CE=\frac{8}{3}\text{ cm}$, 求BC的长.
3. 要画两个相似三角形,其中一个三角形的三边长分别为8,10,12,另一个三角形的一边长是4,求另一个三角形的其余两边长.你画的三角形唯一吗?
4. 顺次连接三角形三边中点所得的小三角形与原三角形相似吗?为什么?



(第2题)

思考

两个等腰三角形一定相似吗?两个等边三角形、两个直角三角形呢?

在判定两个直角三角形全等时，除根据一般三角形全等判定定理外，还有“HL”方法. 类似地，要判定两个直角三角形相似，除了上面一般三角形相似的三个判定定理外，是否也有特殊方法呢？

* 已知：如图 22－21，在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$ 中，$\angle C = \angle C' = 90°$，$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$.

求证：Rt$\triangle ABC \backsim$ Rt$\triangle A'B'C'$.

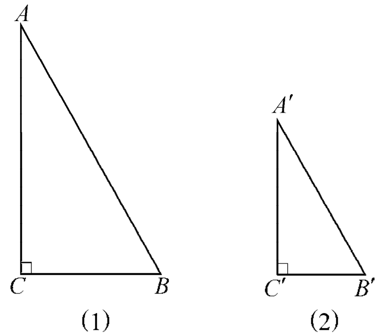


图 22－21

证明 设 $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = k$，则

$$AB = kA'B',\ AC = kA'C'.$$

$\because \quad BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{k^2A'B'^2 - k^2A'C'^2}$

$\quad = k\sqrt{A'B'^2 - A'C'^2} = kB'C'$，

$\therefore \quad \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'} = k.$

$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'.$

此例可作为判定两个直角三角形相似的依据.

如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例，那么这两个直角三角形相似.

例 4 如图 22－22，$\angle ABC = \angle CDB = 90°$，$CB = a$，$AC = b$. 问当 BD 与 a，b 之间满足怎样的函数表达式时，以点 A，B，C 为顶点的三角形与以点 C，D，B 为顶点的三角形相似？

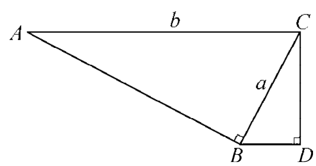


图 22－22

解 $\because \quad \angle ABC = \angle CDB = 90°$，

当 $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{CB}{BD}$ 时，$\triangle ABC \backsim \triangle CDB$.

即 $\dfrac{b}{a} = \dfrac{a}{BD}$，$BD = \dfrac{a^2}{b}$.

又　当 $\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{CB}{CD}$ 时,$\triangle ABC\backsim\triangle BDC$.

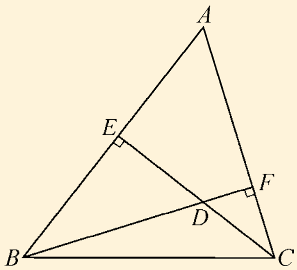
即　$\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{CD}$, $CD=\dfrac{a^2}{b}$.

$BD^2=a^2-\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^2$, $BD=\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-a^2}$.

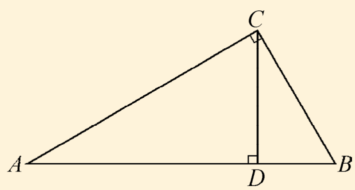
答:当 $BD=\dfrac{a^2}{b}$ 或 $BD=\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-a^2}$ 时,以点 A, B, C 为顶点的三角形与以点 C, D, B 为顶点的三角形相似.

练习

1. 如图,锐角三角形 ABC 的边 AB,AC 上的高 CE,BF 相交于点 D,请写出图中的两对相似三角形.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,CD 是边 AB 上的高. 求证:

(1) $CD^2=AD\cdot BD$;

(2) $BC^2=AB\cdot BD$, $AC^2=AB\cdot AD$.

3. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 与 $\text{Rt}\triangle A'B'C'$ 中,$\angle C=\angle C'=90°$,当具有下列条件时,这两个直角三角形是否相似,为什么?

(1) $AB=10$ cm, $AC=8$ cm, $A'B'=15$ cm, $B'C'=9$ cm;

(2) $AB=5$ cm, $AC=4$ cm, $A'C'=12$ cm, $B'C'=9$ cm.

4. 你能根据相似形知识证明勾股定理吗?

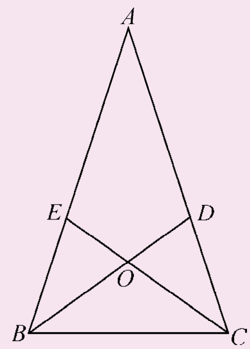
习题 22.2

1. 判断正误：

(1) 两边对应成比例，且有一个角相等的两个三角形相似. (　　)

(2) 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，如果 $\angle A=80°$，$\angle B=40°$，$\angle A'=80°$，$\angle C'=60°$，那么这两个三角形相似. (　　)

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle A=36°$，BD，CE 分别是 $\angle ABC$、$\angle ACB$ 的平分线，且相交于点 O. 写出与 $\triangle ABC$ 相似的三角形.



(第 2 题)

3. 依据下列各题的条件，判断 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是否相似，并说明理由.

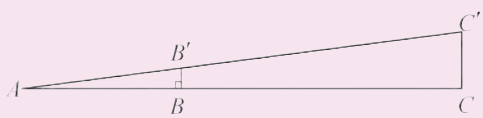
(1) $\angle C=\angle C'=90°$，$\angle A=25°$，$\angle B'=65°$；

(2) $\angle C=90°$，$AC=6\text{ cm}$，$BC=4\text{ cm}$，$\angle C'=90°$，$A'C'=9\text{ cm}$，$B'C'=6\text{ cm}$；

(3) $AB=10\text{ cm}$，$BC=12\text{ cm}$，$AC=15\text{ cm}$，$A'B'=1.5\text{ m}$，$B'C'=1.8\text{ m}$，$A'C'=2.25\text{ m}$.

4. 用枪射击瞄准时，要求标尺缺口的上沿中央 A、准星尖 B 和瞄准点 C 在同一条直线上[图(1)]. 已知某种冲锋枪的基线 $AB=38.5\text{ cm}$[图(2)]，如果射击距离 $AC=100\text{ m}$，当准星尖在缺口内偏差 $BB'=1\text{ mm}$ 时，求弹着点偏差 CC' ($CC'\parallel BB'$) 的长.

(1)

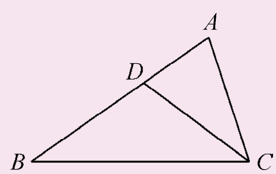


(2)

(第 4 题)

5. 已知：如图，D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上一点，且 $AC^2=AD\cdot AB$.

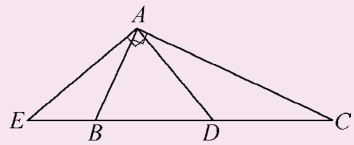
求证：$\angle ADC=\angle ACB$.



(第 5 题)

6. 已知：如图，AD 是直角三角形 ABC 斜边上的中线，$AE \perp AD$，AE 交 CB 的延长线于点 E.

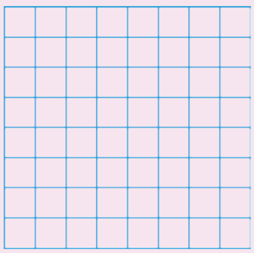
求证：$\triangle BAE \backsim \triangle ACE$.



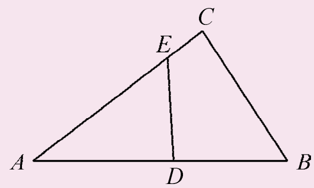
（第 6 题）

7. $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $\sqrt{2}$，$\sqrt{10}$，2，$\triangle A'B'C'$ 的两边长分别为 1，$\sqrt{5}$. 如果 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，那么 $\triangle A'B'C'$ 的第三边长应是多少？

8. 在方格纸中，以格点为顶点的三角形叫做格点三角形. 请在如图的方格纸（8×8）中，画出两个相似但不全等的格点三角形，并加以证明（所画格点三角形应是钝角三角形，并标明相应字母）.



（第 8 题）

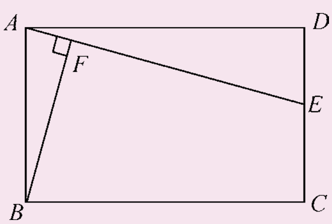


（第 9 题）

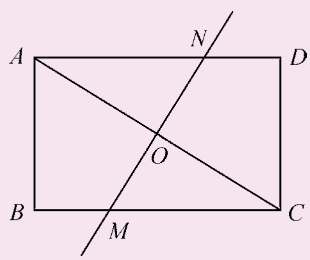
9. 如图，在$\triangle ABC$ 中，D，E 分别是边 AB，AC 上的点，且 $AE=6$，$EC=1.5$，$DB=4$，$AB=9$，求$\dfrac{DE}{BC}$的值.

10. 已知：如图，E 是矩形 $ABCD$ 的边 CD 上一点，$BF \perp AE$ 于点 F.

求证：$\dfrac{AB}{AF}=\dfrac{AE}{DE}$.



（第 10 题）



（第 11 题）

11. 已知：如图，在矩形 $ABCD$ 中，直线 MN 是对角线 AC 的垂直平分线.

求证：$\triangle OMC \backsim \triangle DCA$.

22.3 相似三角形的性质

我们知道,两个三角形相似,它们的对应角相等,对应边成比例,除此之外,两个相似三角形还有哪些性质呢?

定理 1　相似三角形对应高的比、对应中线的比和对应角平分线的比都等于相似比.

下面,我们以对应高的比为例,证明如下.

你能否证明:相似三角形对应中线的比等于相似比;相似三角形对应角平分线的比等于相似比.

* 已知:如图 22－23, $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$,它们的相似比为 k, AD, $A'D'$ 是对应高.

求证: $\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}=k.$

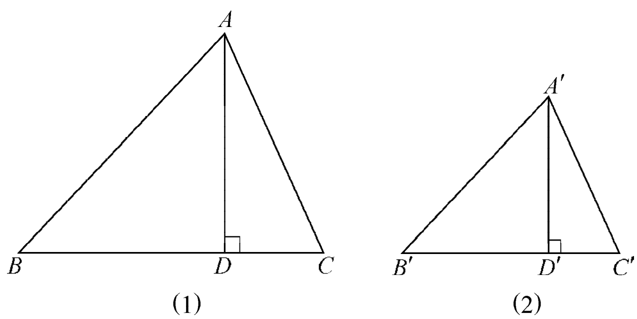


图　22－23

证明　∵　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$,

∴　$\angle B=\angle B'$.

∵　$\angle BDA=\angle B'D'A'=90°$,

∴　$\text{Rt}\triangle ABD \backsim \text{Rt}\triangle A'B'D'$.

∴　$\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}=k.$

思考

相似三角形周长的比和面积的比分别与相似比有什么关系?

我们知道,如果 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$,且它们的相似比为 k,那么

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}=k.$$

由等比性质,得

$$\frac{AB+BC+CA}{A'B'+B'C'+C'A'}=k.$$

于是得到如下定理.

定理 2　相似三角形周长的比等于相似比.

如果 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$,它们的相似比为 k,AD,$A'D'$ 是对应高(图 22－23),根据三角形面积计算公式及定理 1,得

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{\frac{1}{2}BC\cdot AD}{\frac{1}{2}B'C'\cdot A'D'}=\frac{BC}{B'C'}\cdot\frac{AD}{A'D'}=k^2.$$

于是得到如下定理.

定理 3　相似三角形面积的比等于相似比的平方.

例 1　如图 22－24,一块铁皮呈锐角三角形,它的边 $BC=80$ cm,高 $AD=60$ cm. 要把该铁皮加工成矩形零件,使矩形的两边之比为 2∶1,且矩形长的一边位于边 BC 上,另两个顶点分别在边 AB,AC 上. 求这个矩形零件的边长.

如果矩形短的一边位于边 BC 上,这个矩形零件的边长又各是多少?

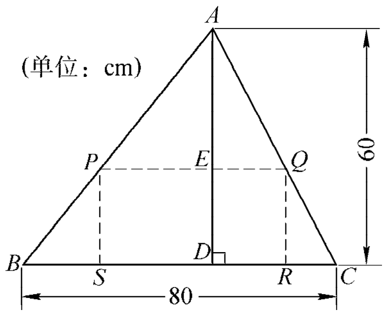


图 22-24

解 如图 22-24，矩形 $PQRS$ 为加工后的矩形零件，边 SR 在边 BC 上，顶点 P，Q 分别在边 AB，AC 上，$\triangle ABC$ 的高 AD 交 PQ 于点 E. 设 PS 为 x cm，则 PQ 为 $2x$ cm.

$\because$ $PQ \parallel BC$，

$\therefore$ $\triangle APQ \backsim \triangle ABC$.

$\therefore$ $\dfrac{PQ}{BC} = \dfrac{AE}{AD}$.

即
$$\frac{2x}{80} = \frac{60 - x}{60}.$$

解方程，得

$$x = 24，\ 2x = 48.$$

答：这个矩形零件的边长分别是 48 cm 和 24 cm.

例 2 如图 22-25，$\triangle ABC$ 的面积为 25，直线 DE 平行于 BC 分别交 AB，AC 于点 D，E. 如果 $\triangle ADE$ 的面积为 9，求 $\dfrac{AD}{DB}$ 的值.

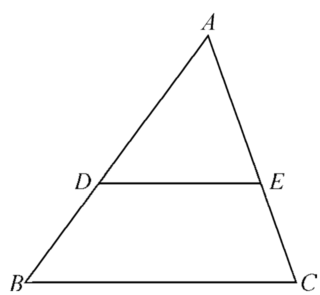


图 22-25

解 $\because$ $DE \parallel BC$，

$\therefore$ $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

$$\therefore \frac{AD^2}{AB^2} = \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{9}{25}.$$

解方程，得

$$\frac{AD}{AB}=\frac{3}{5}.$$

$$\therefore\quad \frac{AD}{DB}=\frac{3}{2}.$$

练习

1. 已知：$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$BC=3.6$ cm，$B'C'=6$ cm，AE 是 $\triangle ABC$ 的一条中线，$AE=2.4$ cm，求 $\triangle A'B'C'$ 中对应中线 $A'E'$ 的长.
2. 已知：在 $\triangle ABC$ 中，$BC=120$ mm，边 BC 上的高为 80 mm. 在这个三角形内有一个内接矩形，矩形的一边在 BC 上，另两个顶点分别在边 AB，AC 上. 问当这个矩形面积最大时，它的边长各是多少？
3. 已知：在 $\triangle ABC$ 中，$DE \parallel BC$，DE 交 AB，AC 于点 D，E，$DE=2$，$BC=5$，$\triangle ABC$ 的面积等于 20，求 $\triangle ADE$ 的面积.
4. 若两个相似三角形的面积比是 3∶4，则它们的周长比是多少？

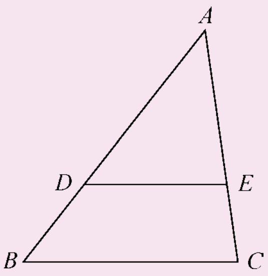
习题 22.3

1. 有一三角形三边之比为 2∶5∶4，如果另一个与它相似的三角形的周长等于55 cm，那么另一个三角形的三边长分别是多少？
2. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle A=\angle A'$，$AB:A'B'=AC:A'C'=4:5$，$BC+B'C'=45$，求 $B'C'$ 的长.
3. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$AB=5$ cm，$BC=7$ cm，$A'B'=10$ cm，$A'C'=8$ cm，求这两个三角形其他各边的长.
4. 两个相似三角形的一对对应边分别为 32 cm 和 12 cm.

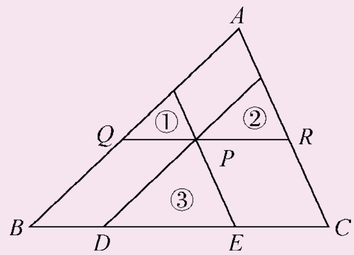
   （1）已知它们的周长相差 45 cm，求这两个三角形的周长；

   （2）已知它们的面积相差 550 cm^2，求这两个三角形的面积.
5. 已知：在四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，AC 交 BD 于点 O，$S_{\triangle ABO}=5\ \mathrm{cm}^2$，$S_{\triangle CDO}=20\ \mathrm{cm}^2$，求 $\frac{AO}{CO}$ 和 $S_{\triangle ACD}$ 的值.

6. 如图，$DE\ /\!/\ BC$，且$\dfrac{AD}{BD}=2$，求$\triangle ADE$与$\triangle ABC$的周长比.



（第 6 题）



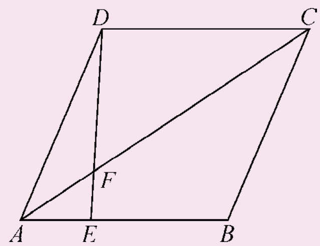
（第 7 题）

7. 如图，过$\triangle ABC$内的点P分别作三边的平行线，形成三个小三角形①②③，如果这三个小三角形的面积分别为4，9，16，求$\triangle ABC$的面积.

8. 如图，在$▱ABCD$中，E是AB上一点，$AE:EB=1:2$，DE与AC相交于点F.

（1）求$\triangle AEF$与$\triangle CDF$的周长比；

（2）如果$S_{\triangle AEF}=6$，求$S_{\triangle CDF}$的值.



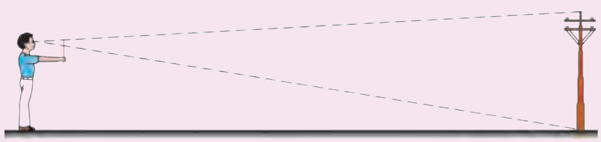
（第 8 题）

9. 已知：在$\triangle ABC$中，$\angle B=2\angle C$，$\angle B$的平分线为BD，且$\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{4}{7}$.

（1）求证：$\triangle ABD\backsim\triangle ACB$；

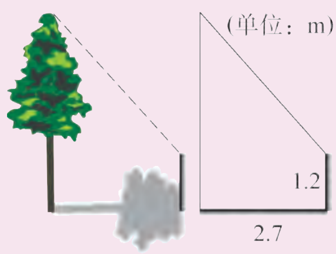
（2）求$\triangle ABD$与$\triangle ACB$的周长比和面积比.

10. 如图，某人拿着一把分度值为厘米的刻度尺，站在距电线杆30 m的地方，手臂向前伸直，将刻度尺竖直，看到刻度尺上12 cm的长度恰好遮住电线杆. 已知臂长为60 cm，求电线杆的高.



（第 10 题）

11. 李勇想利用树影来测量树高. 他在某一时刻先测得长为1 m的竹竿影长0.9 m，然后再测量树影，因树靠近一幢建筑物，影子有一部分在墙上（如图），测得留在墙上的影高1.2 m，地面部分的影长2.7 m. 问这棵树的高度是多少？



（第 11 题）

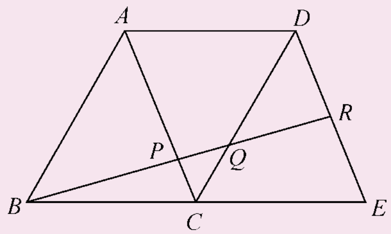
12. 已知：在$\triangle ABC$中，$AC = BC$，$\angle C = 90°$，点P在三角形内，且$\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$.

求证：$S_{\triangle PAB} = 2S_{\triangle PCA}$.

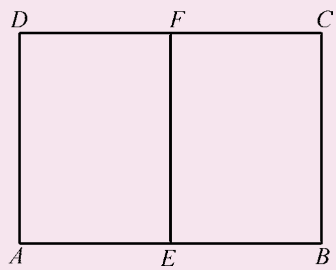
13. 如图，四边形$ABCD$和四边形$ACED$都是平行四边形，点R是DE的中点，连接BR，分别交AC，CD于点P，Q.

（1）请写出图中各对相似三角形（不包括相似比为1的三角形）；

（2）求$BP:PQ:QR$的值.



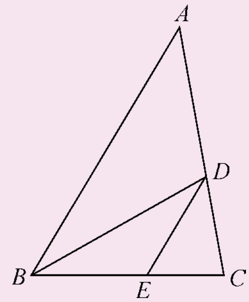
（第13题）



（第14题）

14. 如图，一张矩形纸$ABCD$，沿较长对边的中点E，F的连线对折，得两个小矩形$AEFD$和$BEFC$. 如果要保证这两个小矩形都与原矩形相似，那么原矩形$ABCD$的边长应满足怎样的要求？

15. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle B$的平分线为BD，$DE \parallel AB$交BC于点E，若$AB = 9$，$BC = 6$，求$\dfrac{S_{\triangle DCE}}{S_{四边形ABED}}$的值.



（第15题）

数学活动

矩形对角线穿过的小正方形数

在由$m \times n$个小正方形组成的矩形网格中，研究它的一条对角线所穿过（至少要经过小正方形内部的一个点）的小正方形个数f.

(1) 当 m, n 互质(m, n 除 1 外无其他公因子)时，观察图 22－26 并完成下表：

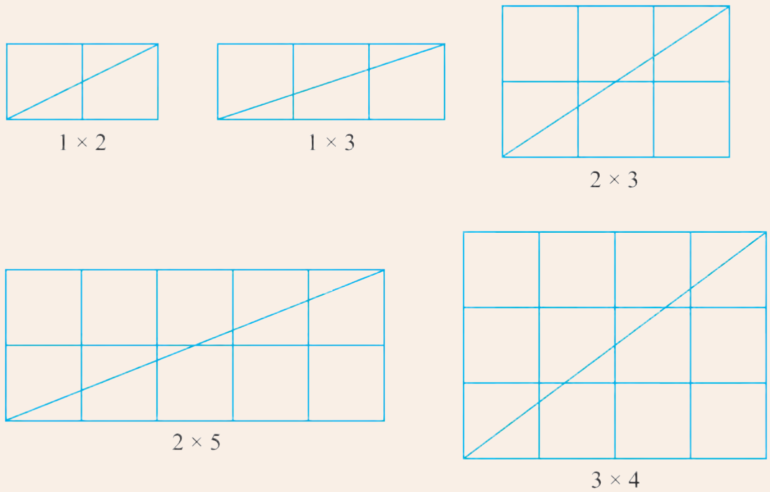


图　22－26

m	n	$m+n$	f
1	2	3	2
1	3	4	3
2	3	5	4
2	5	7	
3	4	7	

(2) 猜想：当 m, n 互质时，在 $m\times n$ 的矩形网格中，一条对角线所穿过的小正方形的个数 f 与 m, n 之间的关系式是______________(不需证明). 请再画几个与上面不同的图形，验证你猜想的关系式是否成立.

(3) 如果你猜想的关系式对一般情况都是适合的，请证明它的正确性；如果你能找到反例说明你猜想的关系式不成立，请修改你的猜想，再进行证明(如果你在证明时有困难，可先观察一条对角线所穿过的小正方形个数 f 与该对角线被纵、横网格线分成的段数之间的对应关系).

(4) 当 m, n 不互质时,请画图验证你猜想的关系式是否依然成立.

(5) 画出 2×4 和 3×6 的矩形网格,分别观察它们的一条对角线所穿过的小正方形个数,并与 1×2 的矩形网格中它的一条对角线所穿过的小正方形个数进行比较,将 2×4 和 3×6 的情况转化为 1×2 的情况,求出 f 的值.

(6) 当 m, n 不互质时,说说此时你求 f 值的方法.

22.4 图形的位似变换

在日常生活中，有时需要把一个图形放大或缩小.

例 1 把四边形 $ABCD$ 放大为原来的 2 倍（即新图与原图的相似比为 2）.

解 如图 22－27.

（1）在四边形 $ABCD$ 所在平面内任取一点 O；

（2）以点 O 为端点作射线 OA, OB, OC, OD；

（3）分别在射线 OA, OB, OC, OD 上取点 A', B', C', D'，使 $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}=2$；

（4）连接 $A'B', B'C', C'D', D'A'$.

所得四边形 $A'B'C'D'$ 即为所求.

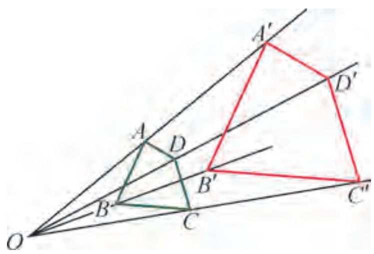


图 22－27

本题还可按如图 22－28 的方法作图.

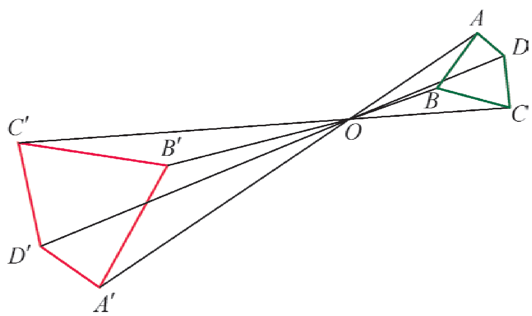


图 22－28

（1）在四边形 $ABCD$ 所在平面内任取一点 O；

（2）分别以点 A，B，C，D 为端点作射线 AO，BO, CO, DO；

（3）分别在射线 AO, BO, CO, DO 上取点 A', B'，C', D'，使 $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}=2$；

（4）连接 $A'B'$，$B'C'$，$C'D'$，$D'A'$.

所得四边形 $A'B'C'D'$ 即为所求.

思考

在图 22－27 和图 22－28 中，所得四边形 $A'B'C'D'$ ∽ 四边形 $ABCD$，你能说明道理吗？

一般地，如果一个图形上的点 A_1，B_1，…，P_1 和另一个图形上的点 A，B，…，P 分别对应，并且满足下面两点：

（1）直线 AA_1，BB_1，…，PP_1 都经过同一点 O；

（2）$\dfrac{OA_1}{OA}=\dfrac{OB_1}{OB}=\cdots=\dfrac{OP_1}{OP}=k$.

那么，这两个图形叫做位似图形，点 O 叫做位似中心.

图形的位似，也可用于把图形缩小，如用小平板仪测绘小范围区域图时，就是这样做的.

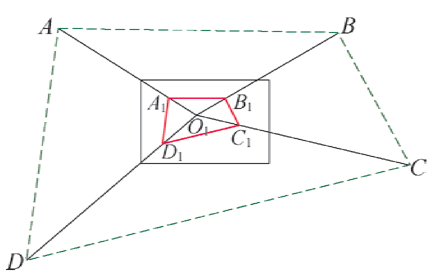


图 22－29

例 2 如图 22－29，四边形 $ABCD$ 是一个待测绘的小区. 在区内选一个测绘点 O（图中已被图板遮住），将图板上测绘图纸的点 O_1 对准测绘点 O，再由点 O_1 对准点 A，B，C，D 在纸上作射线 O_1A，O_1B，O_1C，O_1D，分别测得点 O 到点 A，B，C，D 的距离，并按同一比例缩小，在图纸的对应射线上定出点 A_1，B_1，C_1，D_1，依次连接 A_1B_1，B_1C_1，C_1D_1，D_1A_1，即得该小区缩小的平面图.

练习

作一个五边形和已知五边形位似，要求：

(1) 位似中心取在已知五边形的一个顶点处，相似比为$\frac{1}{2}$；

(2) 位似中心取在已知五边形一边上，相似比为 3.

阅读与思考

平面直角坐标系中图形的位似变换

如图 22－30，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为 $A(1, 1)$，$B(3, 2)$，$C(4, 1)$. 以原点 O 为位似中心，相似比为 3，作$\triangle ABC$ 的位似图形. 观察对应顶点坐标的变化，你有什么发现？

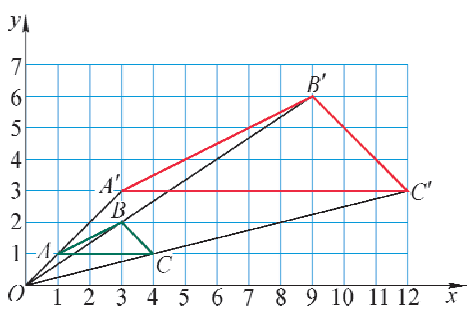


图 22－30

连接 OA，OB，OC，分别延长 OA，OB，OC 至点 A'，B'，C'，使 $\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=3$. 连接$A'B'$，$B'C'$，$C'A'$，那么$\triangle A'B'C'$就是所求的$\triangle ABC$ 的位似图形.

可以看到，位似变换后点 A，B，C 的对应点分别为点 $A'(3, 3)$，$B'(9, 6)$，$C'(12, 3)$.

比较图 22－30 中变换前后各对应点的坐标，我们可以发现如下性质：

在平面直角坐标系中，如果位似变换是以原点 O 为位似中心，相似比为 $k\ (k>0)$，原图形上点的坐标为(x, y)，那么同向位似图形对应点的坐标为$(kx, ky)\ (k>0)$.

利用这个性质作同向位似图形就相当简单，只要把图形上各点的坐标都乘以一个固定的数 $k\ (k>0)$，就可以得到相似比为 $k\ (k>0)$ 的同向位似图形.

取 $k=-3$，对图 22－30 中的$\triangle ABC$ 进行变换，看看结果如何？这样得到的图形叫做反向位似图形，它与 $k=3$ 时的变换结果有什么不同？

思考 1 将图 22－30 中的$\triangle ABC$，按$(x, y)\to\left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$的方式变换，求变换后所得图形中对应点的坐标. 画出变换后图形，它与原图形有何关系？

思考 2 将图 22－30 中的$\triangle ABC$，按 $(x, y)\to(3x, y)$ 或 $(x, y)\to(2x, 3y)$ 的方式变换，画出变换后图形，它们与原图形相似吗？

在平面直角坐标系中，在作$(x, y)\to(ax, by)$ 变换时，当 $a=b\neq0$ 时为相似变换.

练习

1. $\triangle ABC$ 的顶点坐标为 $A(0, 2)$，$B(-3, 5)$，$C(-6, 3)$. 按如下方式对$\triangle ABC$ 进行变换：

   (1) $(x, y)\to(2x, 2y)$；　　(2) $(x, y)\to(-2x, -2y)$.

   画出变换后的图形，它与原图形相似吗？为什么？

2. 在平面直角坐标系里有四个点：$A(0, 1)$，$B(4, 1)$，$C(5, 4)$，$D(1, 4)$.

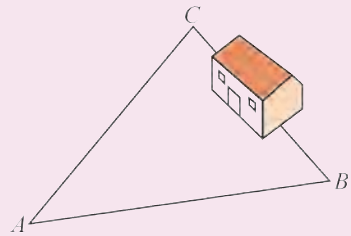
   (1) 顺次连接点 A，B，C，D，得到一个怎样的四边形？

   (2) 将各点的横、纵坐标都乘以 2，得到点 A'，B'，C'，D'，那么四边形 $A'B'C'D'$ 是什么图形，它与四边形 $ABCD$ 有何关系？

习题 22.4

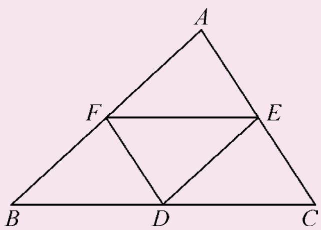
1. 作一个四边形与已知四边形位似，位似中心取在已知四边形内，相似比 $k=2$.

2. 如图，B，C 两点间因有障碍不能直接测量. 现测得 $AB=52$ m，$AC=44$ m，$\angle BAC=42°$. 按 $1:1\,000$ 的比例尺画出$\triangle ABC$，量出 BC 的长，求出 B，C 两点间的实际距离.（精确到 1 m）

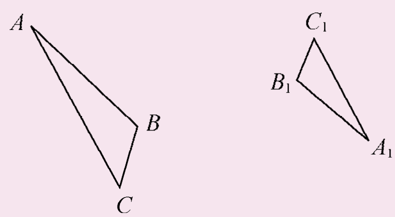


（第 2 题）

3. 如图，在$\triangle ABC$ 中，点 D，E，F 分别是三边 BC，CA，AB 的中点，问$\triangle DEF$ 与$\triangle ABC$ 是否位似？如是位似，找出位似中心.



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，已知$\triangle ABC$ 与$\triangle A_1B_1C_1$ 是位似图形，找出位似中心.

数学园地

三角形 ABC 的顶点坐标为 $A(0,\ 2)$，$B(-3,\ 5)$，$C(-6,\ 3)$；四边形 $ABCD$ 的顶点坐标为 $A(0,\ 1)$，$B(4,\ 1)$，$C(5,\ 4)$，$D(1,\ 4)$. 按如下方式分别对三角形 ABC、四边形 $ABCD$ 进行变换：

$(x,\ y)\rightarrow(kx,\ ky)$，且 $k=-1$.

（1）请画出变换前后的各个图形；

（2）问变换前后的各个图形有怎样的位置关系？

数学史话

出入相补原理

我国古代几何学有着悠久的历史和丰富的内容,不同于西方的欧几里得体系,它具有自己独特的风格.

田亩丈量和天文观测是我国古代几何学的主要起源,两者引出了面积问题和勾股测量问题,依据这些方面的经验成果,总结提升为一个简单明白的基本原理——出入相补原理,并将其应用于形形色色的实际问题中,这成为我国古代几何学的特色之一.

所谓出入相补原理,就是指:“一个平面图形从一处移至他处,面积不变.又如果把图形分割成若干块,那么各部分面积的和等于原来图形的面积,因而图形移置前后诸面积之间的和、差有简单的相等关系.立体的情形也是这样.”

我国当代数学大师吴文俊教授曾写文章,不仅对我国古算作出了上述评说,还根据“出入相补原理”补写出了早已遗失了的古算书中一些命题的推理过程.

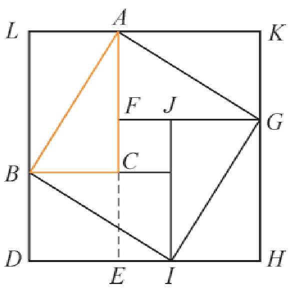


图 22-31

1. 勾股定理

如图 22-31,$\triangle ABC$ 是直角三角形,矩形 $BCED$ 是勾方,矩形 $EFGH$ 是股方,将两矩形组成的六边形 $DBCFGH$ 中的$\triangle BDI$ 移到$\triangle ABC$,将$\triangle GHI$ 移到$\triangle AFG$,得到的矩形 $ABIG$ 就是弦方.

2. 望海岛(见本章 B 组复习题第 5 题)

我国古算书《海岛算经》中有题:今有望海岛(AB),立两表(竿子 CD, EF)齐高三丈,前后相去(DF)千步,令后表与前表参相直.从前表(CD)却行(DG)一百二十三步,人目着地(G)取望岛峰(A),与表末(C)参合.从后表(EF)却行(FH)一百二十七步,人目着地(H)取望岛峰(A),亦与表末(E)参合.问岛高(AB)及前表去岛(BD)各几何?

古算书上给出的计算公式是

$$岛高=\frac{表间\times表高}{相多^{*}}+表高,$$

* 相多等于两个表的却行相减.

$$前表去岛 = \frac{表间 \times 前表却行}{相多}.$$

根据古算书得图 22-32.

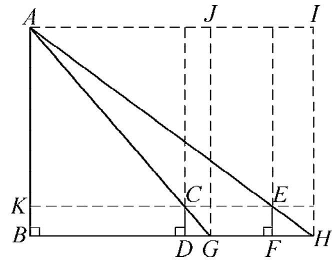


图 22-32

在矩形 $ABHI$ 中,点 E 在对角线 AH 上,故有

$$S_{\square EI} = S_{\square EB}. \quad ①$$

在矩形 $ABGJ$ 中,点 C 在对角线 AG 上,故有

$$S_{\square CJ} = S_{\square CB}. \quad ②$$

由① -②,得

$$S_{\square EI} - S_{\square CJ} = S_{\square EB} - S_{\square CB} = S_{\square ED},$$

即 $(AB - KB) \cdot FH - (AB - KB) \cdot DG = CD \cdot DF.$

解方程,得

$$AB = \frac{DF \cdot CD}{FH - DG} + KB,$$

即 $$岛高 = \frac{表间 \times 表高}{相多} + 表高.$$

又由②,得

$$DG \cdot (AB - KB) = KB \cdot BD.$$

将 AB 的值代入,得

$$BD = \frac{DF \cdot DG}{FH - DG},$$

即 $$前表去岛 = \frac{表间 \times 前表却行}{相多}.$$

22.5 综合与实践

测量与误差

在学校的操场上，有一根不锈钢旗杆，在既不攀爬到旗杆顶上，又不破坏旗杆的情况下，要求测量出旗杆的高度.

下面有四种测量方法，测量中可使用的工具有：皮尺、测角器、1 米竿（长度为 1 m 的竹竿）、镜子、长竿（长度大于人身高的竹竿）.

方法一　如图 22－33，使用工具有：皮尺、1 米竿.

分别测出同一时刻旗杆 AB 与 1 米竿 CD 的影长 BM 与 DN，利用 $\triangle ABM \backsim \triangle CDN$，可求得旗杆的高度.

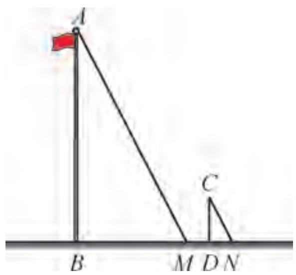


图　22－33

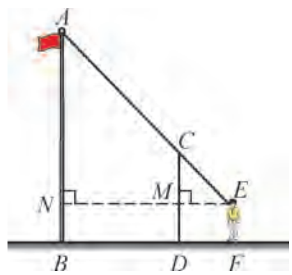


图　22－34

方法二　如图 22－34，使用工具有：皮尺、长竿.

将长竿立于旗杆与人之间，观察长竿和旗杆顶端，使人的眼睛 E 与 A，C 在同一直线上，利用 $\triangle ANE \backsim \triangle CME$，可求得旗杆的高度.

方法三　如图 22－35，使用工具有：皮尺、镜子.

将镜面朝上置于地面 C 处，观察镜子中旗杆顶端 A'，使人的眼睛 E 与 C，A'在同一直线上，利用 $\triangle ABC \cong \triangle A'BC$，$\triangle A'BC \backsim \triangle EFC$，可求得旗杆的高度.

方法四　如图 22－36，使用工具有：皮尺、测角器.

通过测角器观察旗杆顶端 A，使测角器的示数为 60°（条

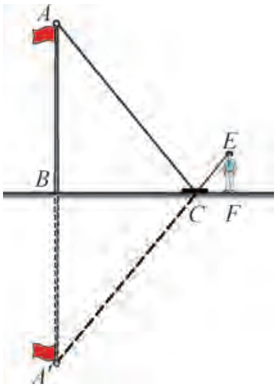


图　22-35

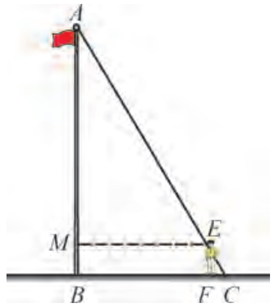


图　22-36

件允许可以是 45°、30°)，利用 $AB = AM + BM = \sqrt{3}ME + EF$，可求得旗杆的高度.

问题❶　请你用这四种方法进行旗杆测量，并将测量数据记录于下列表格中.

<table>
<tr><th colspan="11">测量旗杆的高度</th></tr>
<tr><th rowspan="2">测量次序</th><th colspan="2">方法一</th><th colspan="3">方法二</th><th colspan="3">方法三</th><th colspan="2">方法四</th></tr>
<tr><th>BM</th><th>DN</th><th>NM</th><th>ME</th><th>EF</th><th>BC</th><th>CF</th><th>EF</th><th>ME</th><th>EF</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>平均值</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>计算结果</td><td colspan="2"></td><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

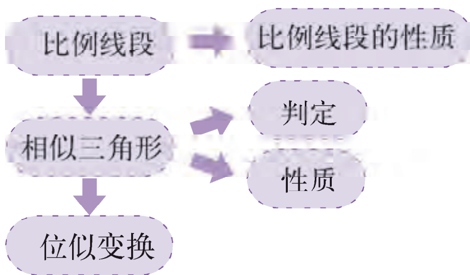
问题❷　你觉得何种方法操作简便，又是何种方法测得的数据更准确？你还有其他的测量方法吗？

问题❸　在测量中，每次的测量数据都有差异，你是如何处理的，你测量了几次？

问题④　几种测量方法为何有误差，如何改进？请对测量误差进行思考，查找误差原因.

小结·评价

一、内容整理



二、主要知识回顾

1. 两条线段的比

________________去度量两条线段 a,b，得到的________________叫做这两条线段的比.

2. 成比例线段

在四条线段 a,b,c,d 中，如果其中两条线段 a,b 的比，等于另外两条线段 c,d 的比，即________________，那么这四条线段叫做成比例线段.

3. 比例的性质

（1）基本性质：如果 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，那么________________.

（2）合比性质：如果 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，那么________________.

（3）等比性质：如果 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$，且 $b_1+b_2+\cdots+b_n\neq 0$，那么________________.

4. 相似三角形

（1）定义：________________________________.

（2）判定：

定理 1：____.

定理 2：____.

定理 3：____.

对于两个直角三角形，除上述判定定理外，还有：__________________
____
____.

（3）性质：

① 对应角________，对应边____________；

② 对应________、对应____________、对应____________和周长比都等于相似比；

③ 面积比等于__________________.

5. 位似变换

（1）位似图形.

（2）图形在平面直角坐标系中的位似变换.

三、自评与互评

1. 图形的全等和相似有何区别与联系？

2. 怎样利用相似三角形的知识来测量建筑物、旗杆、大树等物体的高度？

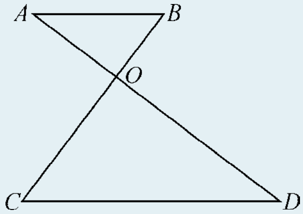
A组 复习题

1. 填空：

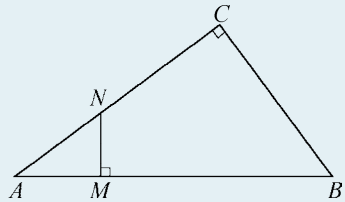
（1）已知 $4x-3y=0$，$x\neq 0$，则 $\dfrac{y}{x}=$ ________；

（2）已知 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=3$，则 $\dfrac{a+b}{b}=$ ________，$\dfrac{c+d}{c}=$ ________.

2. 如图，$AB /\!/ CD$，$AO=4$，$BC=9$，$OC=6$，求 OD 的长.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$, $MN\perp AB$ 于点 M,$AM=8$ cm, $AC=\frac{4}{5}AB$,求 AN 的长.

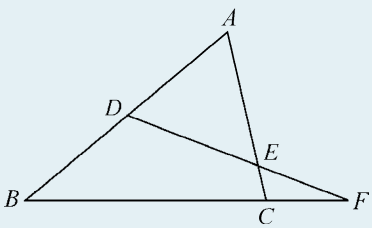
4. CD 是 Rt$\triangle ABC$ 斜边上的高.

   (1) 已知 $AD=9$ cm, $CD=6$ cm,求 BD 的长;

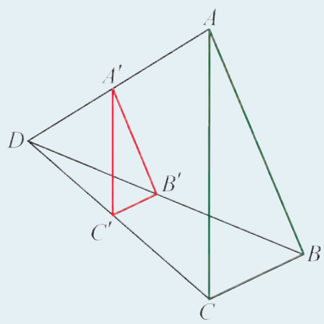
   (2) 已知 $AB=25$ cm, $BC=15$ cm,求 BD 的长.

5. 已知:如图,在$\triangle ABC$ 中,D 为 AB 的中点,E 为 AC 上的一点,DE 延长线交 BC 延长线于点 F.

   求证:$\dfrac{BF}{CF}=\dfrac{AE}{EC}$.



(第 5 题)

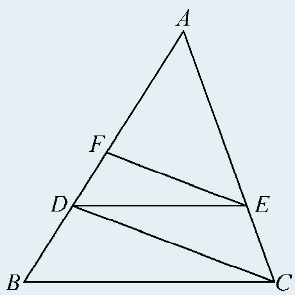


(第 6 题)

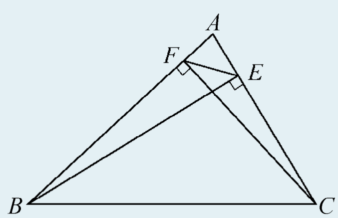
6. 如图, $A'B'\parallel AB$,$B'C'\parallel BC$,判断$\triangle A'B'C'$ 与$\triangle ABC$ 是否相似.

7. 已知:如图,点 D 在$\triangle ABC$ 的 AB 上,$DE\parallel BC$,DE 交AC于点 E,点 F 在 AD 上,且 $AD^2=AF\cdot AB$.

   求证:$\triangle AEF\backsim\triangle ACD$.



(第 7 题)

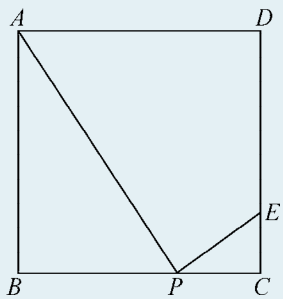


(第 8 题)

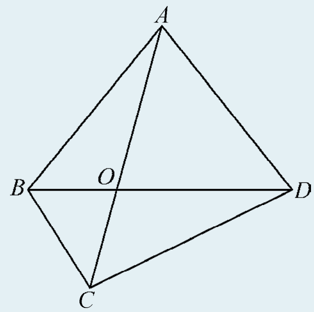
8. 已知：如图，BE，CF 是$\triangle ABC$ 的两条高.

求证：$\triangle AEF \backsim \triangle ABC$.

9. 如图，点 E 在正方形 $ABCD$ 的 CD 上，$CE=\frac{1}{4}CD$，点 P 在 BC 上. 试给出当$\triangle ABP$ 与$\triangle PCE$ 相似时，点 P 应满足的条件.



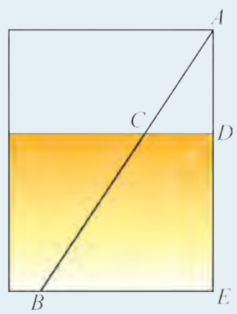
（第 9 题）



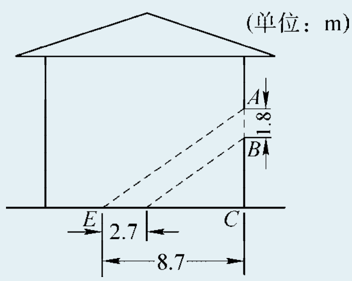
（第 10 题）

10. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 相交于点 O. 问$S_{\triangle ABD}:S_{\triangle CBD}$ 与 $AO:OC$ 有何关系？

11. 如图，一油桶高 AE 为 1 m，桶内有油，一根木棒 AB 为 1.2 m，从桶盖的小口（A）处斜插入桶内，一端插到桶底，另一端与小口（A）齐平，抽出木棒，量得棒上未浸油部分 AC 为 0.48 m，求桶内油面高度 DE 的值.



（第 11 题）



（第 12 题）

12. 如图，阳光通过窗口照到室内，在地上留下 2.7 m 宽的亮区. 已知亮区一边到窗下墙脚距离 CE 为 8.7 m，窗口高 AB 为 1.8 m，求窗口底边离地面的高度 BC 的值.

13. 已知：AD，BE，CF 是$\triangle ABC$ 的中线，且交于点 G.

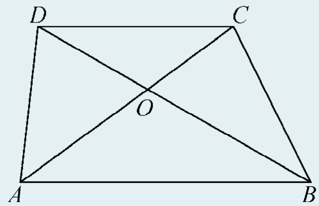
求证：$AG:GD=BG:GE=CG:GF=2$.

（这道题目是根据相似形的知识证明三角形重心的性质）

B组 复习题

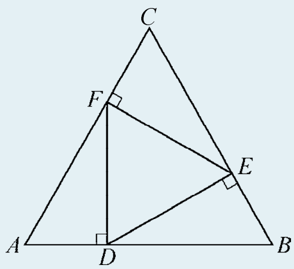
1. 有一块两直角边分别为 6 dm,8 dm 的直角三角形铁皮. 现要从中剪出一个尽可能大的正方形,给出它的裁剪方法.

2. 如图,在四边形 $ABCD$ 中,$DC // AB$,AC 与 BD 相交于点 O,且 $AO : CO = 3 : 2$,求四个小三角形的面积比 $S_{\triangle AOD} : S_{\triangle AOB} : S_{\triangle BOC} : S_{\triangle COD}$ 的值.

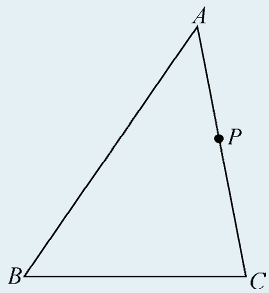


(第 2 题)

3. 如图,$\triangle ABC$ 是等边三角形,点 D,E,F 分别在边 AB,BC,CA 上,且 $DE \perp BC$,$EF \perp AC$,$FD \perp AB$. 若 $\triangle ABC$ 的面积为 72 cm^2,求$\triangle DEF$ 的面积.



(第 3 题)



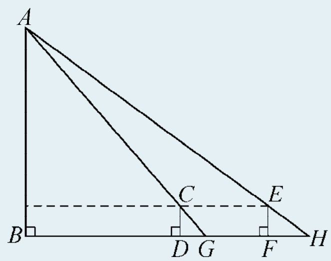
(第 4 题)

4. 如图,点 P 在$\triangle ABC$ 的边 AC 上.

(1) 过点 P 画直线 PE 交$\triangle ABC$ 的另一边于点 E,使截得的三角形与$\triangle ABC$ 相似,这样的三角形能画几个?

(2) 若 $\angle B = 90°$, 按(1)的方法截得的三角形个数与(1)的结果相同吗?

5. 如图,为了求出山峰高度 AB,在点 D 和点 F 处竖立标杆 CD 和 EF, 标杆的高都是 3 丈(1 丈 = 10 尺)*,相隔 1 000 步(1 步 = 5 尺), 并且 AB,CD 和 EF 在同一平面内. 从标杆 CD 退后 123 步到点 G 处,可看到山峰 A 和标杆顶端 C 在一直线上;从标杆 EF 退后 127 步到点 H 处,可看到山峰 A 和标杆顶端 E 在一直线上. 问山峰高度 AB 及山峰与标杆 CD 的水平距离 BD 各是多少?



(第 5 题)

---

* 丈、尺均为非法定计量单位,1 丈 $=3.\dot{3}$ m,1 尺 $=0.3\dot{3}$ m.

6. 在平面直角坐标系中有一五边形 $ABCDE$，各顶点坐标分别为：$A(6, 2)$，$B(4, 4)$，$C(2, 4)$，$D(0, 2)$，$E(4, 0)$.

(1) 将各顶点的横、纵坐标都除以 2，得到五个新的点，顺次连接五个新点，得到的新五边形与原五边形 $ABCDE$ 有什么关系？

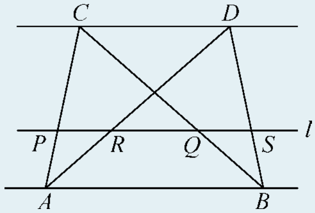
(2) 将各顶点的横、纵坐标都乘以 2，得到五个新的点，顺次连接五个新点，得到的新五边形与原五边形 $ABCDE$ 有什么关系？

7. 已知：在 Rt$\triangle ABC$ 与 Rt$\triangle A'B'C'$ 中，$\angle C = \angle C' = 90°$，$CD$，$C'D'$ 分别是两个三角形斜边上的高，且$\dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{AC}{A'C'}$.

求证：$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

8. 已知：如图，$AB \parallel CD$，依次连接 CA，CB，DA，DB，任作一条直线 l，使 $l \parallel AB$，设 l 分别交 CA，CB，DA，DB 于点 P，Q，R，S.

求证：$PQ = RS$.

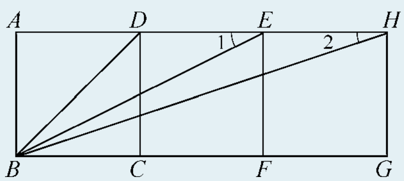


（第 8 题）

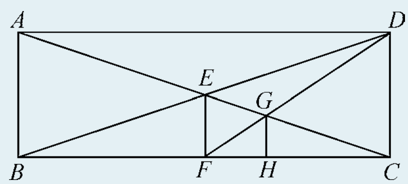
9. 已知：在 ▱$ABCD$ 中，E 是 AD 延长线上的一点，$DE = nAD$，EB 和 DC 相交于点 F，求 $DF : DC$ 和 $FC : DC$ 的值.

10. 已知：如图，将三个全等的正方形拼成一个矩形 $ABGH$.

求证：$\angle 1 + \angle 2 = 45°$.



（第 10 题）



（第 11 题）

11. 已知：如图，在矩形 $ABCD$ 中，AC，BD 交于点 E.

(1) 作 EF 垂直 BC 于点 F，求证：点 F 是线段 BC 的 2 等分点；

(2) 连接 DF 交 AC 于点 G，作 GH 垂直 BC 于点 H，求证：点 H 是线段 BC 的 3 等分点；

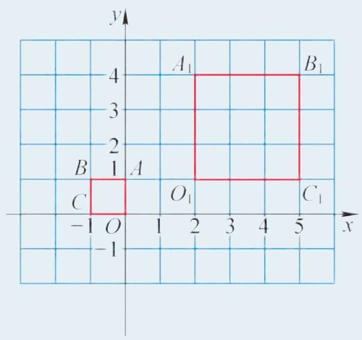
(3) 你能在图中作出线段 BC 的一个 4 等分点吗？

C组
复习题

1. 如图，在平面直角坐标系中，对正方形 $OABC$ 依次进行了几个变换，得到正方形 $O_1A_1B_1C_1$.

   （1）说出依次进行了哪几个变换？

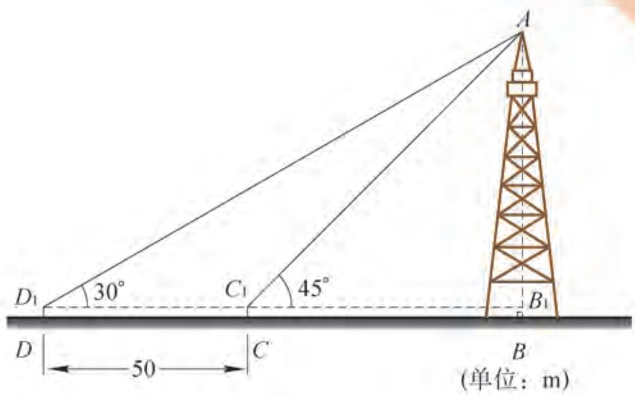
   （2）在每个变换中，点坐标是如何变化的？



（第 1 题）

2. 在△ABC 内作一个正方形，使正方形的两个顶点在边 BC 上，另两个顶点分别在边 AB，AC 上.

第23章 解直角三角形



在测量底部不能直接到达的电视塔的高度 AB 时，从与塔底成一条直线的地面上 D，C 两处，测得电视塔顶的仰角分别为 30° 和 45°，两个观测点之间的水平距离 DC 为 50 m(测角器高为 1 m). 根据这些数据，能求得电视塔的高度吗?

本章将学习直角三角形中边与角之间的关系，并运用这些关系解决测量等方面的一些问题.

23.1 锐角的三角函数

1. 锐角的三角函数

图 23-1

汽车免不了爬坡,爬坡能力是衡量汽车性能的重要指标之一. 汽车的爬坡能力是指汽车在满载时所能爬越的最大坡度. 怎样描述坡面的坡度(倾斜程度)呢? (图 23-1)

交流

在图 23-2 中,有两个直角三角形,直角边 AC 与 A_1C_1 表示水平面,斜边 AB 与 A_1B_1 分别表示两个不同的坡面,坡面 AB 和 A_1B_1 哪个更陡?你是怎样判断的?

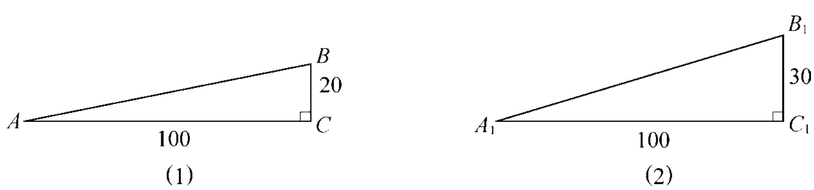


图 23-2

类似地,在图 23-3 中,坡面 AB 和 A_1B_1 哪个更陡? 你又是怎样判断的?

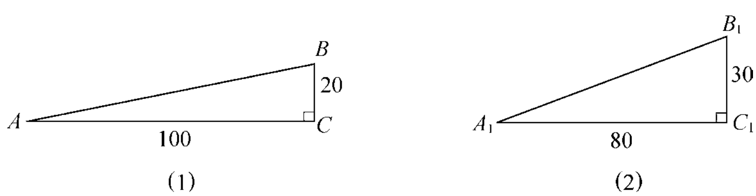


图 23-3

如图 23－4，在锐角 A 的一边任取一点 B，过点 B 作另一边的垂线 BC，垂足为 C，得到 Rt△ABC；再任取一点 B_1，过点 B_1 作另一边的垂线 B_1C_1，垂足为 C_1，得到另一个 Rt△AB_1C_1……这样，我们可以得到无数个直角三角形，这些直角三角形都相似. 在这些直角三角形中，锐角 A 的对边与邻边之比 $\frac{BC}{AC}$，$\frac{B_1C_1}{AC_1}$，$\frac{B_2C_2}{AC_2}$……究竟有怎样的关系？

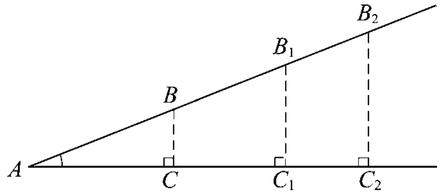


图 23-4

在图 23－4 的这些直角三角形中，当锐角 A 的大小确定后，无论直角三角形的大小怎样变化，$\angle A$ 的对边与邻边的比值总是一个固定值.

如图 23－5，在 Rt△ABC 中，我们把锐角 A 的对边与邻边的比叫做 $\angle A$ 的**正切**（tangent），记作 $\tan A$，即

$$\tan A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b}.$$

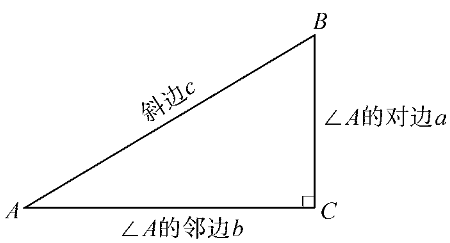


图 23-5

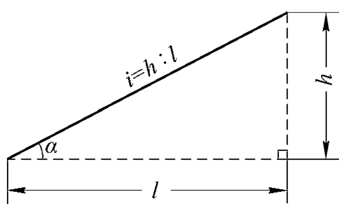


图 23-6

如图 23－6，正切经常用来描述坡面的坡度. 坡面的铅直高度 h 和水平长度 l 的比叫做坡面的**坡度**（或**坡比**），记作 i，即

$$i=\frac{h}{l}\quad（坡度通常写成 h∶l 的形式）.$$

在检测汽车爬坡能力等实际问题中，坡角不易直接测量，可以用坡道的铅直高度与坡道水平长度的比来刻画坡道的倾斜程度.

坡面与水平面的夹角叫做**坡角**（或称倾斜角），记作 α，于是有

$$i = \frac{h}{l} = \tan \alpha.$$

显然，坡度（$i = \tan \alpha$）越大，坡角 α 越大，坡面就越陡.

例1 如图 23－7，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$AC = 4$，$BC = 3$，求 $\tan A$ 和 $\tan B$.

解 $\tan A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{3}{4}$，

$\tan B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{4}{3}$.

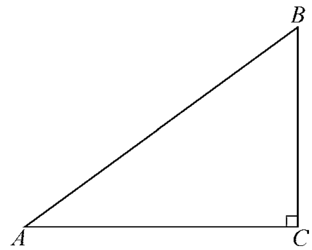


图 23－7

练习

1. 计算图 23－2、图 23－3 中坡面 AB 和 A_1B_1 的坡度.
2. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$AC = 12$，$\tan A = \dfrac{3}{4}$，求 BC 的长.
3. 如图，汽车从引桥下的端点 A 行驶 200 m 后到达高架桥的点 B，已知高架桥的铅直高度 BC 为 12 m，求引桥的坡度（精确到 0.01）.

（第 3 题）

在图 23－4 中，这些直角三角形都是相似的，当锐角 A 的大小确定后，不仅 $\angle A$ 的对边与邻边的比随之确定，而且 $\angle A$ 的对边与斜边的比、邻边与斜边的比分别也是确定的.

如图 23－5，在 Rt$\triangle ABC$ 中，我们把锐角 A 的对边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的**正弦**（sine），记作 $\sin A$，即

$$\sin A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c}.$$

同理，我们把锐角 A 的邻边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的**余弦**（cosine），记作 $\cos A$，即

$$\cos A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}.$$

锐角 A 的正弦、余弦、正切都叫做锐角 A 的**三角函数**（trigonometric function）.

对于锐角 A 的每个确定的值，$\sin A$ 有唯一确定的值与它对应，所以 $\sin A$ 是锐角 A 的函数. 同理，$\cos A$、$\tan A$ 也是锐角 A 的函数.

例 2 如图 23－8，在 Rt$\triangle ABC$ 中，两直角边 $AC=12$，$BC=5$，求 $\angle A$ 的各个三角函数.

解 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AC=12$，$BC=5$，$\angle C=90°$，得

$$AB=\sqrt{12^2+5^2}=13.$$

$$\therefore\quad \sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{5}{13},$$

$$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{12}{13},$$

$$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{5}{12}.$$

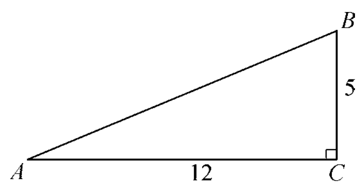


图 23-8

例 3 如图 23－9，在平面直角坐标系内有一点 $P(3,4)$，连接 OP，求 OP 与 x 轴正方向所夹锐角 α 的各个三角函数.

解 过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 Q.

在 Rt$\triangle PQO$ 中，$OQ=3$，$QP=4$，得

$$OP=\sqrt{3^2+4^2}=5.$$

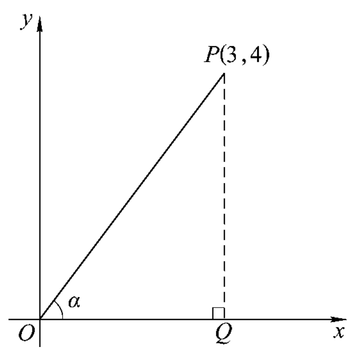


图 23-9

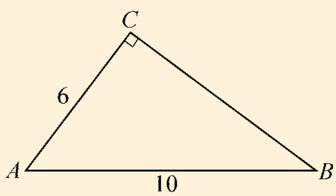
$$\therefore \quad \sin\alpha = \frac{QP}{OP} = \frac{4}{5},$$

$$\cos\alpha = \frac{OQ}{OP} = \frac{3}{5},$$

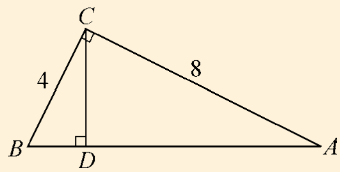
$$\tan\alpha = \frac{QP}{OQ} = \frac{4}{3}.$$

练习

1. 如图，$\triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle C = 90°$，$AB = 10$，$AC = 6$，求 $\sin A$、$\cos A$、$\tan A$、$\sin B$、$\cos B$、$\tan B$.

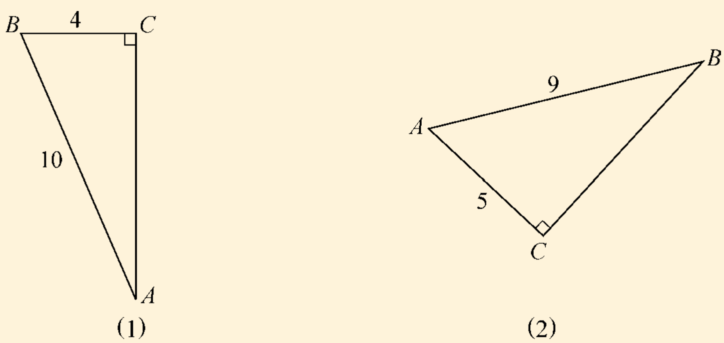


（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$BC = 4$，$AC = 8$，$CD \perp AB$，求 $\sin\angle ACD$、$\cos\angle BCD$.
3. 如图，分别写出两个直角三角形中 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的各个三角函数.



（第 3 题）

4. 在平面直角坐标系内有一点 $P(2, 5)$，连接 OP，求 OP 与 x 轴正方向所夹锐角 α 的各个三角函数.
5. 菱形 $ABCD$ 的两条对角线分别为 $AC = 8$ cm，$BD = 6$ cm，求 $\tan\angle BAC$.
6. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$\sin A = \dfrac{3}{5}$，求 $\cos A$.

2. 30°,45°,60°角的三角函数值

根据锐角三角函数的定义及直角三角形的有关性质，很容易得到30°,45°,60°角的三角函数值.

操作

如图23－10(1)，在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，$\angle B=60°$. 设$BC=1$，则$AB=2$，$AC=\sqrt{3}$(为什么?).

于是有

$\sin 30°=$____，$\cos 30°=$____，$\tan 30°=$____；

$\sin 60°=$____，$\cos 60°=$____，$\tan 60°=$____.

如图23－10(2)，在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，$\angle A=\angle B=45°$. 设$BC=1$，则$AC=1$，$AB=\sqrt{2}$(为什么?).

于是有

$\sin 45°=$____，$\cos 45°=$____，$\tan 45°=$____.

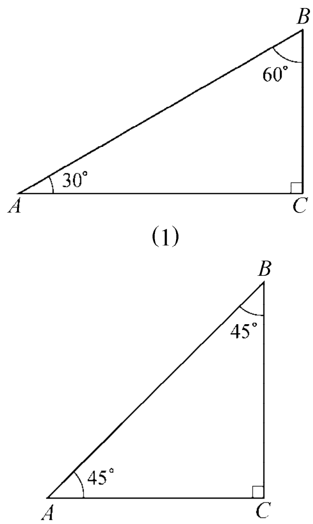


图 23－10

例4 求下列各式的值：

(1) $2\sin 60°+3\tan 30°+\tan 45°$；

(2) $\cos^2 45°+\tan 60°\cos 30°$.

解 (1) $2\sin 60°+3\tan 30°+\tan 45°$

$$=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+3\times\frac{\sqrt{3}}{3}+1$$

$$=2\sqrt{3}+1.$$

(2) $\cos^2 45°+\tan 60°\cos 30°$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\cos^2 45°$表示$(\cos 45°)^2$. 类似地，$\sin^2 A$表示$(\sin A)^2$，$\tan^2 A$表示$(\tan A)^2$.

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$
$$= 2.$$

练习

1. 填空：

三角函数值 α / 三角函数	30°	45°	60°
$\sin\alpha$			
$\cos\alpha$			
$\tan\alpha$			

2. 求下列各式的值：

(1) $\sin^2 45° + \cos^2 45°$；

(2) $2\sin 30° + 2\cos 60° + 4\tan 45°$；

(3) $\cos^2 30° + \sin^2 45° - \tan 60° \cdot \tan 30°$；

(4) $\dfrac{2\sin 30°}{2\cos 30° - 1}$；

(5) $\dfrac{\sin 60° - \tan 45°}{\tan 60° - 2\tan 45°}$.

思考

从上面练习第 1 题的计算中，不难发现：

$\sin 30° = \cos 60°$，$\sin 60° = \cos 30°$，$\sin 45° = \cos 45°$.

这就是说，30°，45°，60°这三个角的正（余）弦的值，分别等于它们余角的余（正）弦的值. 这个规律，是否适合任意一个锐角呢？

如图 23－11，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$.

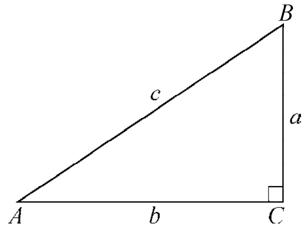


图 23－11

$\because \quad \sin A=\dfrac{a}{c},\ \cos A=\dfrac{b}{c},$

$\quad\quad \sin B=\dfrac{b}{c},\ \cos B=\dfrac{a}{c},$

$\therefore \quad \sin A=\cos B,\ \cos A=\sin B.$

$\because \quad \angle A+\angle B=90°,$

$\therefore \quad \angle B=90°-\angle A.$

即 $\sin A=\cos B$

$\quad\quad =\cos(90°-\angle A),$

$\cos A=\sin B$

$\quad\quad =\sin(90°-\angle A).$

任意一个锐角的正(余)弦值，等于它的余角的余(正)弦值.

例 5 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，且 $\sin A=\dfrac{1}{3}$，求 $\cos B$ 的值.

解 $\because \quad \angle A+\angle B=90°,$

$\therefore \quad \cos B=\cos(90°-\angle A)$

$\quad\quad =\sin A$

$\quad\quad =\dfrac{1}{3}.$

练习

1. 已知 $\angle A$ 与 $\angle B$ 都是锐角.

（1）把 $\cos(90°-\angle A)$ 写成 $\angle A$ 的正弦；

（2）把 $\sin(90°-\angle B)$ 写成 $\angle B$ 的余弦.

2. （1）已知：$\cos A=\dfrac{1}{3}$，且 $\angle B=90°-\angle A$，求 $\sin B$ 的值；

（2）已知：$\sin 22°=0.3746$，$\cos 22°=0.9272$，求 $68°$ 的正弦、余弦的值.

3. 一般锐角的三角函数值

任意一个锐角，如何求它的三角函数值呢？比如求 $\sin 36°$ 的值.

操作

步骤 1：如图 23－12，用刻度尺和量角器，作出 Rt△ABC，使 $\angle C = 90°$，$\angle A = 36°$.

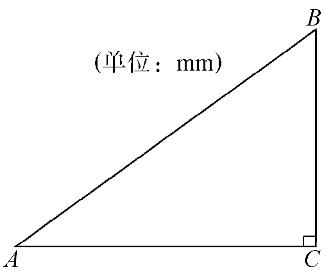


图 23－12

步骤 2：用刻度尺量得 $\angle A$ 的对边 $BC =$ ______ mm，斜边 $AB =$ ________ mm.

步骤 3：算出比值 $\dfrac{BC}{AB} =$ ____，即 $\sin 36° =$ ____.

用这个方法，确实可以求出任意一个锐角三角函数的近似值，古代的数学家、天文学家也采用过这样的办法，只是误差较大. 经过许多数学家不断地改进，不同角的三角函数值被制成了常用表，三角函数表大大改进了三角函数值的应用. 今天，三角函数表又被带有 sin 、cos 和 tan 功能键的计算器所取代.

图 23－13

计算器上只要有 sin 、cos 、tan 键，就可以用来求锐角的三角函数值. 计算器显示的是三角函数值的近似值，不同计算器给出近似值的数字个数也不同，有 10 个、有 8 个.

不同计算器的按键方法各有不同，本教材介绍一种计算器，如图 23－13，先按 ON/C 键，再按 MODE 键，使显示器屏幕出现“DEG”，然后再按有关三角函数的键.

例 6 求 $\sin 40°$的值（精确到 0.000 1）.

解

按 键 顺 序	显 示
sin 4 0 =	0.642 787 609

$\therefore \quad \sin 40° = 0.642\ 8.$

例 7 求值：（精确到 0.000 1）

（1）$\cos 34°35'$；　　（2）$\tan 66°15'17''$.

解 （1）

	按 键 顺 序	显 示
1.	cos 3 4 D°M′S 3 5 D°M′S =	0.823 301 512
2.	cos (3 4 + 3 5 ÷ 6 0) =	0.823 301 512

$\therefore \quad \cos 34°35' = 0.823\ 3.$

（2）

	按 键 顺 序	显 示
1.	tan 6 6 D°M′S 1 5 D°M′S 1 7 D°M′S =	2.273 181 087
2.	tan (6 6 + 1 5 ÷ 6 0 + 1 7 ÷ 3 6 0 0) =	2.273 181 087

$\therefore \quad \tan 66°15'17'' = 2.273\ 2.$

第 2 种解法中“15 ÷ 60，17 ÷ 3 600”是分别把“分”“秒”化成“度”.

已知一个角的三角函数值，求这个锐角，也可用计算器来解决.

例 8 已知 $\sin A = 0.508\ 6$，求锐角 A.

解

按 键 顺 序	显 示
2ndF $\sin^{-1}$ 0 · 5 0 8 6 =	30.570 621 36
2ndF D°M′S	30°34′14.24″

$\therefore \quad \angle A = 30.570\ 6° = 30°34'14''.$

练习

1. 用计算器计算,并填写下表中的各个三角函数值:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$0°$			
$90°$			

2. 用计算器求三角函数值:(精确到 0.000 1)

   (1) $\sin 10°$;　　(2) $\cos 50°18'$;

   (3) $\tan 13°12'$;　　(4) $\sin 14°36'$.

3. 已知三角函数值,用计算器求锐角 A 和 B:(精确到 $1'$)

   (1) $\sin A=0.708\,3$, $\sin B=0.568\,8$;

   (2) $\cos A=0.829\,0$, $\cos B=0.993\,1$;

   (3) $\tan A=0.913\,1$, $\tan B=31.80$.

4. 比较下列各题中两个值的大小:

   (1) $\sin 46°$,$\sin 44°$;　　(2) $\cos 20°$,$\cos 50°$;

   (3) $\tan 33°15'$, $\tan 33°14'$.

5. 设 $0°<\angle A<\angle B<90°$,比较下列各组两个值的大小(选填“>”“<”或“=”):

   (1) $\sin A$ ________ $\sin B$;

   (2) $\cos A$ ________ $\cos B$;

   (3) $\tan A$ ________ $\tan B$.

习题 23.1

1. 求下列各式的值:

   (1) $\sin^2 45°+\tan 60°+\cos 30°$;

   (2) $2\sin 60°+\dfrac{1}{2\tan 45°+\tan 60°}$;

   (3) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 30°+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos^2 45°-\tan 45°\cdot\tan 30°$;

(4) $\sqrt{\tan^2 30° - 2\tan 30° + 1} + |\cos 30° - 1|$.

2. 用计算器求三角函数值：(精确到 0.000 1)

(1) $\sin 25°$，$\sin 18°24'$；　　(2) $\cos 33°19'$，$\cos 53°29'$；

(3) $\tan 38°24'$，$\tan 42°21'$.

3. 已知三角函数值，用计算器求锐角 A：(精确到 $1'$)

(1) $\sin A = 0.333\ 8$；　　(2) $\cos A = 0.702\ 2$；

(3) $\tan A = 0.789\ 8$.

4. 回答下列问题：

(1) $\sin 30° + \sin 45°$ 是否等于 $\sin 75°$？为什么？

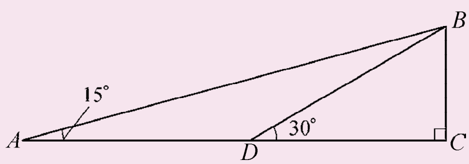
(2) $\cos 45° - \cos 15°$ 是否等于 $\cos 30°$？为什么？

(3) $\sin 60°$ 是否等于 $2\sin 30°$？为什么？

5. 根据下列条件求锐角 α：

(1) $\sin \alpha = \cos 35°$；　　(2) $\cos \alpha = \sin 40°$.

6. 如图，在 Rt△BCD 中，$\angle BDC = 30°$，延长 CD 到点 A，使 $AD = DB$，连接 AB，$\angle A = 15°$，求 $\tan 15°$、$\sin 15°$、$\cos 15°$ 的值(结果保留根号).



(第 6 题)

23.2 解直角三角形及其应用

观察

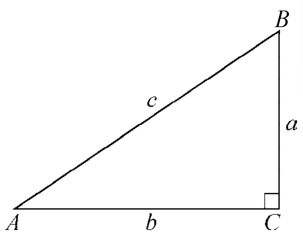


图 23-14

如图 23-14，Rt△ABC 共有六个元素（三条边，三个角），其中 $\angle C=90°$，那么其余五个元素（三边 a,b,c，两锐角 A,B）之间有怎样的关系呢？

（1）三边之间的关系

$a^2+b^2=$ ________；

（2）锐角之间的关系

$\angle A+\angle B=$ ________；

（3）边角之间的关系

$\sin A=$ ____，$\cos A=$ ____，$\tan A=$ ____.

（对于锐角 B，也有类似的边角关系吗？）

有了以上关系，如果知道了五个元素中的两个元素（至少有一个元素是边），就可以求出其余的三个元素.

在直角三角形中，除直角外，由已知元素求出未知元素的过程，叫做**解直角三角形**.

例 1 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle B=42°6'$，$c=287.4$，解这个直角三角形（精确到 0.1）.

解 由 $\cos B=\dfrac{a}{c}$，得

$$a=c\cos B$$
$$=287.4\times0.7420\approx213.3.$$

由 $\sin B=\dfrac{b}{c}$，得

$$\begin{aligned} b &= c\sin B \\ &= 287.4\times 0.6704\approx 192.7. \end{aligned}$$

$\angle A=90^\circ-42^\circ6'=47^\circ54'$.

例 2 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=55^\circ$，$b=20\text{ cm}$，$c=30\text{ cm}$，求三角形的面积 $S_{\triangle ABC}$（精确到 0.1 cm^2）.

解 如图 23－15，作 AB 上的高 CD. 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中，

$\because\quad CD=AC\cdot\sin A=b\sin A$,

$$\therefore\quad \begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}AB\cdot CD \\ &= \frac{1}{2}bc\sin A. \end{aligned}$$

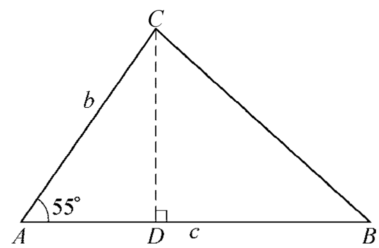


图 23－15

当 $\angle A=55^\circ$，$b=20\text{ cm}$，$c=30\text{ cm}$ 时，有

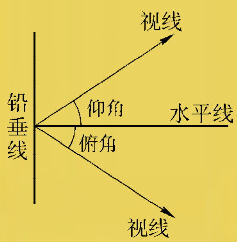
$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}bc\sin A \\ &= \frac{1}{2}\times 20\times 30\sin 55^\circ \\ &= \frac{1}{2}\times 20\times 30\times 0.8192 \\ &\approx 245.8(\text{cm}^2). \end{aligned}$$

练习

1. 根据下列条件，解直角三角形：
   (1) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$a=30$，$\angle B=80^\circ$；
   (2) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$c=8$，$b=3$；
   (3) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$c=10$，$\angle A=40^\circ$.
2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，根据下列条件，解直角三角形（$\angle C=90^\circ$）：
   (1) $\angle A=30^\circ$，$c=8$；　　(2) $a=35$，$c=35\sqrt{2}$；
   (3) $a=14$，$\angle A=36^\circ$；　　(4) $a=30$，$b=15$.
3. 在四边形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AB=4$，$CD=8$，$AD=6$，$\angle D=43^\circ$，求四边形的面积（精确到 0.01）.

解直角三角形在实际问题中有着广泛的应用.

在进行高度测量时，由视线与水平线所夹的角中，当视线在水平线上方时叫做**仰角**(angle of elevation)；当视线在水平线下方时叫做**俯角**(angle of depression).



例 3 如图 23－16，一学生要测量校园内一棵水杉树的高度. 他站在距离水杉树 8 m 的 E 处，测得树顶的仰角 $\angle ACD=52°$，已知测角器的架高 $CE=1.6$ m，问树高 AB 为多少米？(精确到 0.1 m)

解 在 Rt$\triangle ACD$ 中，$\angle ACD=52°$，$CD=EB=8$ m.

由 $\tan\angle ACD=\dfrac{AD}{CD}$，得

$$\begin{aligned}AD&=CD\cdot\tan\angle ACD\\&=8\times\tan 52°\\&=8\times 1.2799\\&\approx 10.2\text{(m)}.\end{aligned}$$

由 $DB=CE=1.6$ m，得

$$\begin{aligned}AB&=AD+DB\\&=10.2+1.6\\&=11.8\text{(m)}.\end{aligned}$$

答：树高 AB 为 11.8 m.

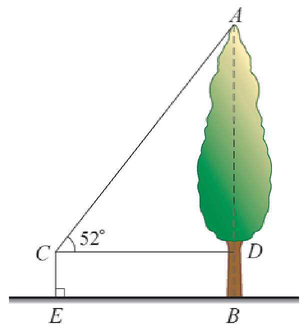
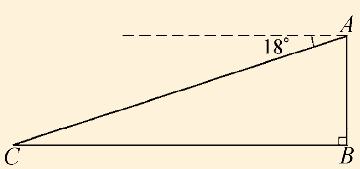


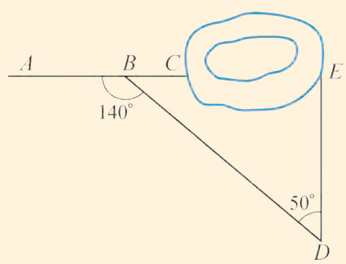
图 23－16

练习

1. 如图，飞机的飞行高度 $AB=1000$ m，从飞机上测得到地面着陆点 C 的俯角为 18°，求飞机到着陆点的距离 AC 的值(精确到 1 m).



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图，沿 AC 方向开山修路，为了加快施工进度，要在小山另一侧的 E 处同时施工. 如果从 AC 上取一点 B，使 $\angle ABD=140°$，$BD=520$ m，$\angle D=50°$，那么开挖点 E 离点 D 多远，才能使点 A，C，E 正好在一条直线上？(精确到 1 m)

例 4　解决本章引言所提问题. 如图 23－17,某校九年级学生要测量当地电视塔的高度 AB,因为不能直接到达塔底 B 处,他们采用在发射台院外与电视塔底 B 成一直线的 C,D 两处地面上,用测角器测得电视塔顶部 A 的仰角分别为 45° 和 30°, 同时量得 CD 为 50 m. 已知测角器高为 1 m,问电视塔的高度为多少米?(精确到 1 m)

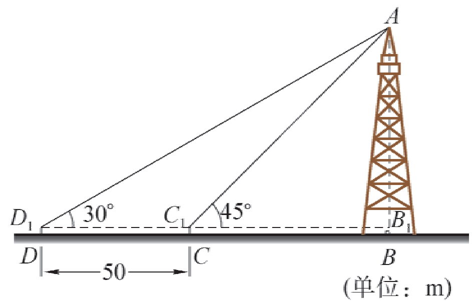


图　23－17

解　设 $AB_1 = x$ m.

在 Rt$\triangle AC_1B_1$ 中,由　$\angle AC_1B_1 = 45°$,得

$$C_1B_1 = AB_1.$$

在 Rt$\triangle AD_1B_1$ 中,由　$\angle AD_1B_1 = 30°$,得

$$\tan\angle AD_1B_1 = \frac{AB_1}{D_1B_1} = \frac{AB_1}{D_1C_1 + C_1B_1},$$

即
$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{50 + x}.$$

解方程,得

$$x = 25(\sqrt{3} + 1).$$

检验:$x = 25(\sqrt{3} + 1)$ 是原方程的根.

$$\begin{aligned}\therefore\quad AB &= AB_1 + B_1B\\ &= 25(\sqrt{3} + 1) + 1\\ &\approx 69(\mathrm{m}).\end{aligned}$$

答:电视塔的高度为 69 m.

例 5　如图 23－18,一船以 20 n mile/h 的速度向东航行,在 A 处测得灯塔 C 在北偏东 60°的方向上,继续航行 1 h 到达 B 处,再测得灯塔 C 在北偏东 30°的方向上. 已知灯塔 C 四周 10 n mile 内有暗礁,问这船继续向东航行是否安全?

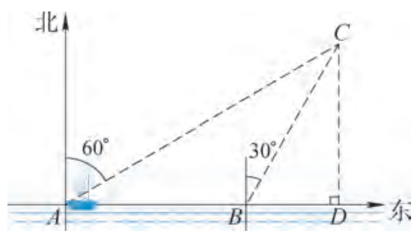


图　23－18

分析:这船继续向东航行是否安全,取决于灯塔 C 到 AB 航线的距离是否大于 10 n mile.

解 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D,设 $CD = x$ n mile.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中,$AD = \dfrac{CD}{\tan\angle CAD} = \dfrac{x}{\tan 30^\circ}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中,$BD = \dfrac{CD}{\tan\angle CBD} = \dfrac{x}{\tan 60^\circ}$.

由 $AB = AD - BD$,得

$$AB = \frac{x}{\tan 30^\circ} - \frac{x}{\tan 60^\circ} = 20,$$

即

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{3}} - \frac{x}{\sqrt{3}} = 20.$$

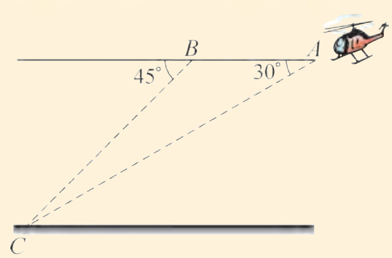
解方程,得

$$x = 10\sqrt{3} > 10.$$

答:这船继续向东航行是安全的.

练习

1. 如图,某直升机于空中 A 处测得正前方地面控制点 C 的俯角为 30°;若航向不变,直升机继续向前飞行 1 000 m 至 B 处,测得地面控制点 C 的俯角为 45°.求直升机再向前飞行多远,与地面控制点 C 的距离最近(结果保留根号).



(第 1 题)

2. 一船向东航行,上午 9:00 到达灯塔 C 的西南 60 n mile 的 A 处,上午 10:00 到达灯塔 C 的正南的 B 处.

   (1) 画出示意图;

   (2) 求这船的航行速度(结果保留根号).

例 6 如图 23-19,铁路路基的横断面是四边形 $ABCD$,$AD \parallel BC$,路基顶宽 $BC = 9.8$ m,路基高 $BE = 5.8$ m,斜坡 AB 的坡度 $i = 1:1.6$,斜坡 CD 的坡度 $i' = 1:2.5$,求铁路路基下底宽 AD 的值(精确到0.1 m)与斜坡的坡角 α 和 β(精确到1°)的值.

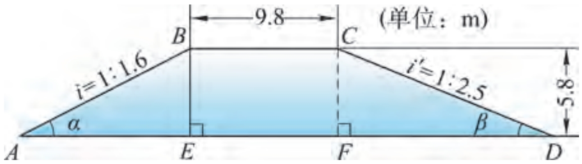


图　23-19

解　过点 C 作 $CF \perp AD$ 于点 F，得

$$CF = BE,\ EF = BC,\ \angle A = \alpha,\ \angle D = \beta.$$

$$\because\quad BE = 5.8\ \text{m},\ \frac{BE}{AE} = \frac{1}{1.6},\ \frac{CF}{DF} = \frac{1}{2.5},$$

$$\therefore\quad AE = 1.6 \times 5.8 = 9.28(\text{m}),\ DF = 2.5 \times 5.8 = 14.5(\text{m}).$$

$$\therefore\quad AD = AE + EF + DF = 9.28 + 9.8 + 14.5 \approx 33.6(\text{m}).$$

由　$\tan\alpha = i = \dfrac{1}{1.6}$，$\tan\beta = i' = \dfrac{1}{2.5}$，得

$$\alpha \approx 32°,\ \beta \approx 22°.$$

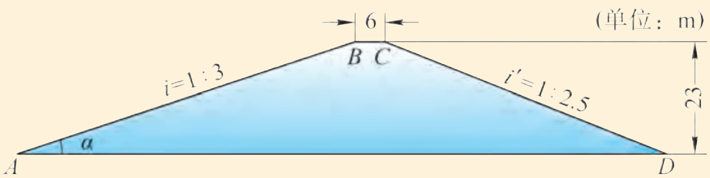
答：铁路路基下底宽为 33.6 m，斜坡的坡角分别为 32°和 22°.

练习

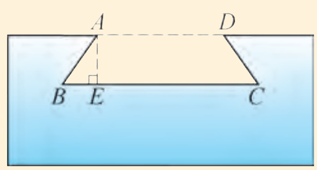
1. 如图，水库大坝的横断面是四边形 $ABCD$，$BC \parallel AD$，坝顶宽为 6 m，坝高为 23 m，斜坡 AB 的坡度 $i = 1:3$，斜坡 CD 的坡度 $i' = 1:2.5$，求：

   (1) 斜坡 AB 的坡角 α 的值（精确到 1°）；

   (2) 坝底宽 AD 和斜坡 AB 的值（精确到 0.1 m）.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，燕尾槽的横断面是四边形 $ABCD$，$AD \parallel BC$，其中 $\angle B = \angle C = 55°$，外口宽 $AD = 180$ mm，燕尾槽的深度 $AE = 70$ mm，求它的里口宽 BC 的值（精确到1 mm）.

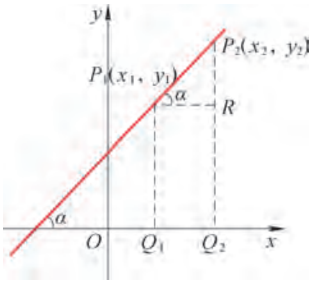


图 23-20

例 7 已知：在直线 $y=kx+b$ 上有任意两点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$，这条直线向上方向与 x 轴正方向所夹的锐角为 α.

求证：$\tan\alpha=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k$.

证明 由 α 是锐角，可知直线 $y=kx+b$ 是上升的，即函数 $y=kx+b$ 的值随 x 值的增大而增大.

如图 23-20，设 $x_1<x_2$，则 $y_1<y_2$. 过点 P_1，P_2 作 x 轴的垂线，垂足分别为 Q_1，Q_2，再过点 P_1 作 x 轴的平行线 P_1R 交 P_2Q_2 于点 R，得

$$\angle P_2P_1R=\alpha.$$

在 Rt△P_2P_1R 中，

$$\tan\alpha=\frac{RP_2}{RP_1}=\frac{|y_2-y_1|}{|x_2-x_1|}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

∵ P_1，P_2 都在直线 $y=kx+b$ 上，

∴ $y_1=kx_1+b$， ①

$y_2=kx_2+b$. ②

由② -①，得

$$y_2-y_1=k(x_2-x_1),$$

∴ $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

即 $\tan\alpha=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k$.

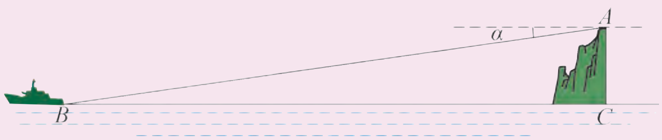
练习

求直线 $y=\sqrt{3}x-5$ 的向上方向与 x 轴正方向所夹的锐角.

习题 23.2

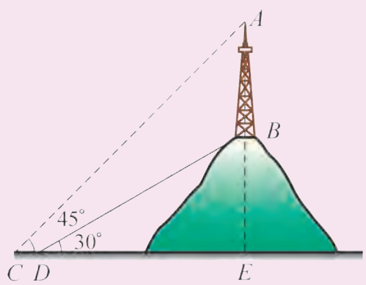
1. 小明利用假期上黄山旅游，他站在险峻的天都峰顶，望着前方的黄山最高峰——莲花峰，想知道两峰之间的水平距离. 查看了导游图，小明知道天都峰海拔 1 810 m，莲花峰海拔 1 864 m，他又用测角器测得莲花峰顶的仰角为 $1°29'$，请你帮助小明算出两峰间的水平距离（精确到 1 m）.

2. 如图，在某海岛上的观察所 A 发现海上一船只 B，并测得其俯角 α 为 $8°14'$. 已知观察所的标高（当水位为 0 m 时的高度）为 43.74 m，当时水位为 2.63 m，求观察所 A 到船只 B 的水平距离（精确到 1 m）.

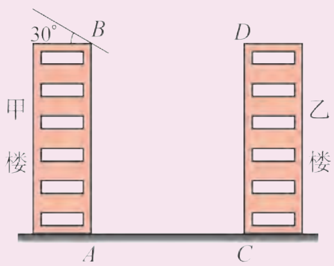


（第 2 题）

3. 如图，在山顶上有一座电视塔，为了测量山高，在地面上引一条基线 EDC，测得 $\angle C = 45°$，$CD = 50$ m，$\angle BDE = 30°$. 已知电视塔高 $AB = 250$ m，求山高 BE 的值（精确到 1 m）.



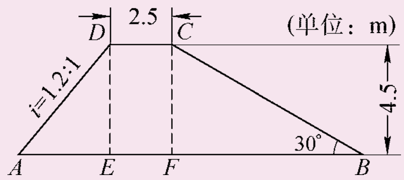
（第 3 题）



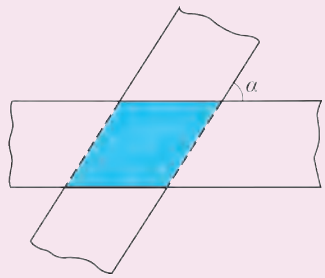
（第 4 题）

4. 如图，某住宅小区有甲、乙两楼，它们的高 $AB = CD = 30$ m，两楼间的距离 $AC = 24$ m. 为了了解甲楼对乙楼的采光影响情况，当太阳光与水平面夹角为 $30°$ 时，求甲楼的影子在乙楼上有多高?（精确到 0.1 m）

5. 如图，某小型水库拦水坝的横断面是四边形 $ABCD$，$DC \parallel AB$，测得迎水坡的坡角为 $30°$. 已知背水坡的坡度为 $1.2:1$，坝顶宽为 2.5 m，坝高为 4.5 m，求它的坝底宽 AB 和迎水坡 BC 的值（精确到 1 m）.



（第 5 题）



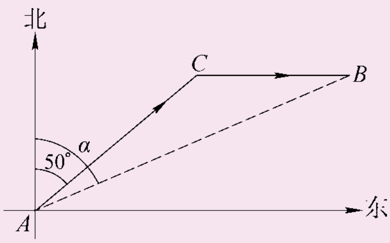
（第 6 题）

6. 如图，两条宽度均为 1 dm 的矩形长纸条，相交成角 α，求重叠（蓝色）部分的面积．

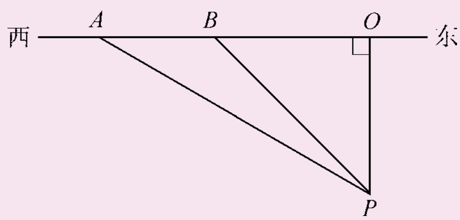
7. 如图，一船沿北偏东 50°的方向离开 A 港直线航行，航行 50 n mile 后到达 C 处，改变方向向东航行，又走了 40 n mile 到达 B 处，求：

（1）α 的值（精确到 1°）；

（2）AB 的值（精确到 1 n mile）．



（第 7 题）



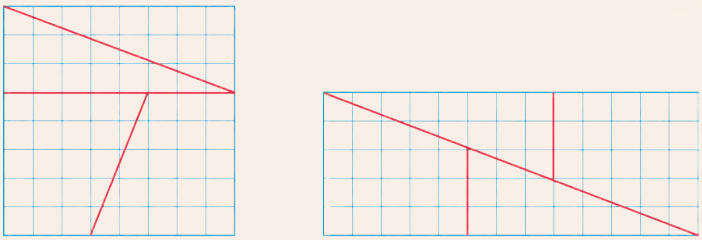
（第 8 题）

8. 超速行驶是引发交通事故的主要原因．上周末，小明和三位同学尝试用自己所学的知识检测车速．如图，有条东西向的公路，观测点设在到该公路的距离为 100 m 的 P 处．一辆小轿车由西向东匀速行驶，测得此车从 A 处行驶到 B 处所用的时间为 4 s，且 $\angle APO=60°$，$\angle BPO=45°$．求 AB 的值并判断此车是否超过了该公路 70 km/h 的限速？（参考数据：$\sqrt{2}\approx1.41$，$\sqrt{3}\approx1.73$）

数学活动

问题出在哪里

如图 23－21(1)，一张含 8×8 个小方格的正方形纸片，可以被剪成四部分，用这四部分好像可以拼成一个 13×5 的矩形，如图 23－21(2).



(1)　　　　(2)

图　23－21

看图形，凭直觉好像有

$$64=8\times8=13\times5=65.$$

(1) 你发现问题出在哪里?

(2) 怎样说清问题出在该处的原因?

(3) 注意到 $65-64=1$，如何在图 23－21(2) 中算得多出来的面积正好是 1?

(4) 观察正方形中两个三角形和两个四边形的直角边长，以及所拼成的"矩形"的边长，它们分别为：3，5，8，13，这个数列你认识吗? 查查资料，这个数列有什么性质? 这个性质与上面问题有什么关系?

小结·评价

一、内容整理

锐角的三角函数 → 锐角三角函数值的求法

↓

解直角三角形 → 应用

二、主要知识回顾

1. 在$\triangle ABC$中，$\angle C$为直角，我们把锐角A的对边与斜边的比叫做$\angle A$的________，记作________；锐角A的邻边与斜边的比叫做$\angle A$的________，记作________；锐角A的对边与邻边的比叫做$\angle A$的________，记作________.

2. 锐角A的正弦、余弦、正切都叫做锐角A的________________.

3. 几个特殊角的三角函数值：

三角函数值 α / 三角函数	30°	45°	60°
$\sin\alpha$			
$\cos\alpha$			
$\tan\alpha$			

4. 在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$所对的边分别是a，b，c，那么除直角外，其他五个元素有以下关系：

(1) 三边关系：________________.

(2) 锐角关系：________________.

(3) 边角关系：$\sin A=$________；$\cos A=$________；$\tan A=$________.

5. 三角形的面积可以用三角形的两边及其夹角的正弦来求，即$S_{\triangle ABC}=$________________.

6. 在解决实际问题时，常用到以下一些概念：

(1) 在进行高度测量时，由视线与水平线所夹的角中，当视线在水平线上方时叫做________；当视线在水平线下方时叫做________.

(2) 在进行水平测量时，常以正北或正南方向与观测目标的视线方向所

夹的角进行计算. 如图 23－22，$\angle AOB=40°$，可以说成北偏________.

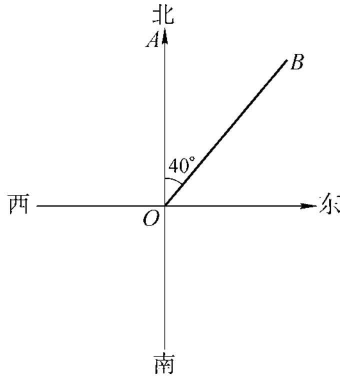


图　23－22

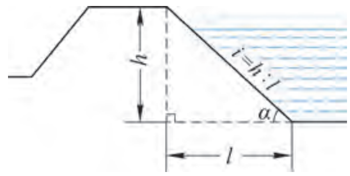


图　23－23

（3）在筑坝、开渠、修路时，设计图纸上常要注明斜坡的倾斜程度，如图 23－23，通常把坡面的铅直高度 h 和水平长度 l 的比叫做坡度或坡比，用字母 i 表示，即 $i=\frac{h}{l}$.

如果坡面与水平面的夹角 α 叫做坡角，那么

$$i=\frac{h}{l}=\underline{\qquad\qquad}.$$

三、自评与互评

1. 用计算器探索：随着锐角的增大（或减小），其正弦、余弦、正切的数值变化规律. 与同伴交流一下，你们的发现是否一致.

2. 如何测量底部不能直接到达的物体的高度？

A组 复习题

1. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$a=5$，$b=\sqrt{7}$，求 $\angle A$ 的各个三角函数.
2. 等腰三角形 ABC 的腰 $AB=AC=8$，底边 $BC=6$，求 $\angle B$ 的各个三角函数.

3. 求下列各式的值：

（1）$\tan^2 30° + 2\sin 60° + \tan 45° \cdot \sin 30° - \tan 60° + \cos^2 30°$；

（2）$\dfrac{\cos 60°}{\tan 45° - \sin 45°}$；

（3）$\sqrt{\cos^2 45° - 2\cos 45° + 1}$.

4. 用计算器求下列锐角的三角函数值：（精确到 0.000 1）

$\sin 27°49'$，$\cos 21°23'$，$\tan 86°7'$.

5. 选择：

（1）在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，下列关系中一定正确的是（　　）.

（A）$\sin A + \cos B = 0$　　（B）$\sin A - \cos B = 0$

（C）$\sin A > 1$　　（D）$\sin A = 0$

（2）在 Rt△ABC 中，如果各边的长度都扩大到原来的 2 倍，那么锐角 A 的各个三角函数值（　　）.

（A）也都扩大到原来的 2 倍　　（B）都缩小到原来的一半

（C）没有变化　　（D）不能确定

6. 填空：

（1）北偏东 40°，也就是东偏北________；

（2）若从点 A 看点 B 的俯角为 35°10′，则从点 B 看点 A 的仰角应为________；

（3）在△ABC 中，$\angle C = 90°$，如果已知 c、$\angle B$，那么 $a =$ ________，$b =$ ________；

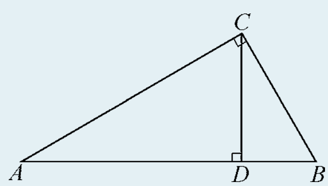
（4）在△ABC 中，$\angle C = 90°$，$\tan A = \dfrac{1}{3}$，$AC = 6$，则 $BC =$ ________，$AB =$ ________.

7. 填空：

（1）已知 $2\sin A - 1 = 0$，则锐角 $A =$ ________；

（2）已知 $\sqrt{3} - 3\tan A = 0$，则锐角 $A =$ ________.

8. 在 Rt△ABC 中，$\angle C = 90°$，$AC = 12$，$\cos A = \dfrac{12}{13}$，求 $\tan A$ 和 BC 的值.



（第 9 题）

9. 如图，在△ABC 中，$\angle C = 90°$，斜边上的高 $CD = \sqrt{3}$，$BD = 1$，解此直角三角形.

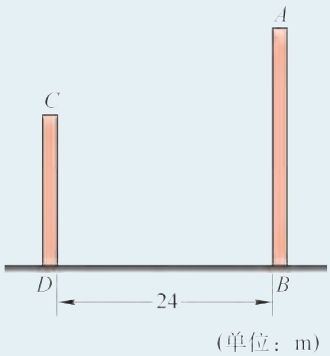
10. 已知：矩形的对角线长为 10 cm，对角线与一边的夹角为 40°，求矩形面积（精确到 1 cm^2）.

11. 设在 $\square ABCD$ 中，$\angle A$ 是锐角. 证明：$S_{\square ABCD}=AB\cdot AD\sin A$.

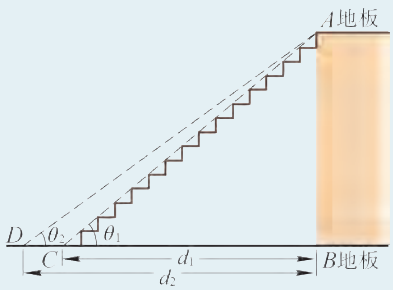
12. 已知，在四边形 $ABCD$ 中，$AB\parallel DC$，$\angle A=\angle B=60^\circ$，$DC=2$，$AB=6$，求四边形 $ABCD$ 的面积（结果保留根号）.

13. 一船向东航行，上午 9:00 到达一座灯塔 P 的西南68 n mile的 M 处，上午 11:00 到达这座灯塔的正南的 N 处，求这船的航行速度（结果保留根号）.

14. 如图，两个建筑物 AB，CD，已知它们之间的距离是24 m. 假如你身边只有一架测角器（可测俯角、仰角），你将如何测量出这两个建筑物的高？



（第 14 题）



（第 15 题）

15. 如图为建造楼梯的设计图，虚线 AC 为楼梯的倾斜线，倾斜线与地板的夹角 θ_1 为倾斜角，一般情况下，倾斜角越小，上楼梯越省力. 现把楼梯的倾斜角由 θ_1 减至 θ_2，这样楼梯占用地板的长度将由 d_1 增加到 d_2. 已知：$d_1=4$ m，$\theta_1=40^\circ$，$\theta_2=36^\circ$，求楼梯占用地板的长度增加了多少米.（精确到 0.01 m）

B组 复习题

1. 在平面直角坐标系的第一象限中，有一点 $P(x, y)$，记 $r=|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$. 若 OP 与 x 轴正方向所夹的锐角为 α，则 $\sin\alpha=$______，$\cos\alpha=$______，$\tan\alpha=$______.

2. 填空：

（1）若 $0^\circ<\alpha<45^\circ$，且 $\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\alpha=$______；

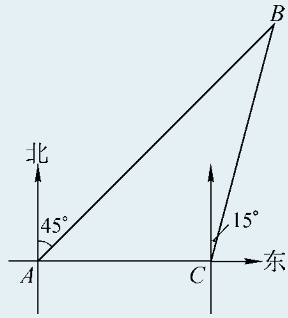
（2）已知：$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，且 α 为某等腰三角形的一个底角，那么这个等腰三角形的各角大小分别为________________________.

3. 已知：A 为任意锐角，求证：

（1）$\sin^2A+\cos^2A=1$；　　（2）$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$.

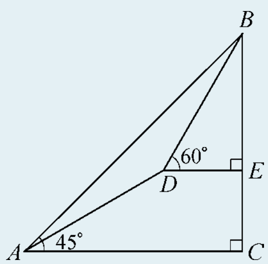
4. 在△ABC 中，$\angle C=90°$，$\sin A=\frac{3}{5}$，求 $\cos A$ 和 $\tan A$ 的值.

5. 如图，一航船在 A 处测到北偏东 45° 的方向上有一灯塔 B，航船向东以 20 n mile/h 的速度航行1.5 h 到达 C 处，又测到灯塔 B 在北偏东 15° 的方向上，求此时航船与灯塔相距多少海里（结果保留根号）.

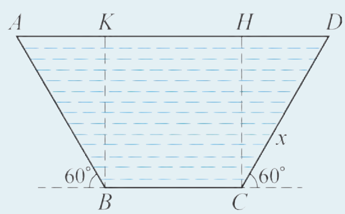


（第 5 题）

6. 如图，某人在山脚 A 处测得山顶 B 的仰角为 45°，他从 A 处沿着坡度 $i=1:\sqrt{3}$ 的斜坡前进 1 000 m 到达 D 处，这时测得山顶 B 的仰角为 60°，求山高 BC 的值（结果保留根号）.



（第 6 题）

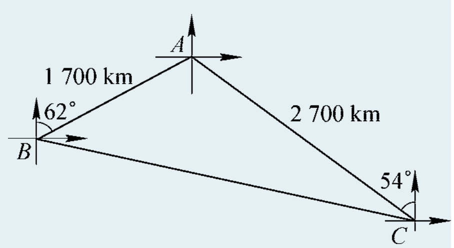


（第 7 题）

7. 如图，在兴修引水渠时，水渠的横断面一般设计成四边形 $ABCD$，$AD\parallel BC$，且 $\angle ABC=\angle DCB=120°$，记 $AB+BC+CD=l$，在 l 一定的情况下，问如何确定 AB，CD 的值，使水渠的流量最大？（在水流速度一定的情况下，流量与横断面面积成正比）

8. 在△ABC 中，$\angle C=90°$，两直角边分别为 a，b，且 a，b 满足方程 $a^2-3ab+2b^2=0$，求 $\sin A$ 的值.

9. 根据百慕大三角（图中△ABC）的位置及相关数据求百慕大三角的面积（参考数据：$\sin 64°\approx0.90$，$\cos 64°\approx0.44$，$\tan 64°\approx2.05$）.



（第 9 题）

C组 复习题

1. 在锐角三角形 ABC 中，已知 $AB=8$，$AC=10$，$S_{\triangle ABC}=20\sqrt{3}$，求 $\angle A$ 的各个三角函数.

2. 已知：凸四边形的两条对角线分别为 l_1，l_2，且所夹锐角为 α.

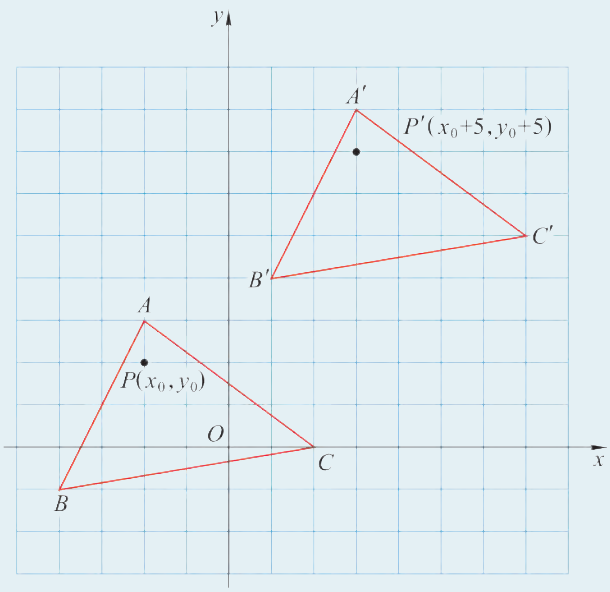
   求证：四边形的面积 S 为 $\frac{1}{2}l_1l_2\sin\alpha$.

3. 在△ABC 中，有 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，请画一个锐角三角形并给出证明.

4. 在△ABC 中，$AB=4$，$AC=2$，$\angle A=120°$，求 $\tan B$ 的值.

5. 在学习一次函数时，通过描点画图，直观地得出正比例函数 $y=kx$ $(k>0)$ 的图象是一条直线. 现在，你能对这个结论给出证明吗？

6. 如图，△$A'B'C'$是由△ABC 平移后得到的，△ABC 中任一点 $P(x_0, y_0)$经平移后得△$A'B'C'$中对应点 $P'(x_0+5, y_0+5)$，给出这个平移的方向和距离.



（第 6 题）

附录　部分中英文词汇索引

中　文	英　文	页　码
二次函数	quadratic function	3
抛物线	parabola	6
反比例	inverse proportion	44
双曲线	hyperbola	46
相似多边形	similar polygons	64
相似比	similarity ratio	64
成比例线段	proportional segments	66
黄金分割	golden section	68
正切	tangent	113
正弦	sine	115
余弦	cosine	115
三角函数	trigonometric function	115
仰角	angle of elevation	126
俯角	angle of depression	126

后记

1999 年，我们根据《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲（试用修订版）》，编写了一套华东版初中数学教材，经三年实验后，于 2002 年报教育部经全国中小学教材审定委员会审查通过.

2001 年，国家颁布了《基础教育课程改革纲要（试行）》及《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》，正式启动了新一轮中小学课程、教材改革. 本套教科书就是根据课程标准，在吸取了华东版教材实验过程中的经验后重新编写的，并于 2004 年经全国中小学教材审定委员会初审通过. 现教育部决定全面启动义务教育课程标准实验教材的修订工作，我们已切实把《义务教育数学课程标准（2011 年版）》的要求落实到新修订的教材中，使教材的质量进一步得到提升，特色更加鲜明.

本套教材在送审和实验过程中，得到了许多专家、学者、教研人员与广大师生的关爱，特别是人民教育出版社的张孝达先生与陈宏伯先生直接参与教材的整体设计和章节审稿，他们以实际行动给予我们很大的支持与鼓舞，我们衷心地感谢他们.

为了做好这次的修订工作，我们调整并充实了编写队伍，本套教科书编写组主要人员有：

吴之季　苏　淳　杜先能　徐子华　郭要红　胡　涛　陈先荣　王南林　胡茂侠　邱广东

本册主要编写人员有：

李　群　丁　虎　陈耀忠　张永超　洪顺刚　孙克刚　李毅然　刘　铁　吴中纵

此外，参与本册修改工作的还有：

梁　镇　胡思文　郑仁玉　许从永　杨家生　张贵宏　李鹏凌　徐维武　余后山　干兆宏

教材建设是一项长期任务，需要通过实验、修改，反复锤炼. 这不仅需要全体编写人员的努力，还要有广大师生的积极支持与参与，恳请使用本套教材的师生批评指正.

新时代数学编写组

2014 年 4 月

本书下列图片由东方IC提供：图21－25李岩宏、图22－9 redcover.

说　明

本书下列图片由东方IC提供：图21－25李岩宏、图22－9 redcover.

绿色印刷产品

审批编号：皖费核（2021 年秋季）第 0101 号
举报电话：12315

ISBN 978-7-5478-2170-1

定价：9.47 元