教育部审定 2012

义务教育教科书

数学

七年级 下册

上海科学技术出版社

义务教育教科书

数学

七年级 下册

新时代数学编写组 编著

上海科学技术出版社

主　　编　吴之季　苏　淳

副 主 编　杜先能　徐子华

本册主编　徐子华

策划编辑　苏德敏
责任编辑　朱先锋　李　刚
美术编辑　陈　蕾

义务教育教科书
数　　学
七年级　下册
新时代数学编写组　编著
上海世纪出版(集团)有限公司
上 海 科 学 技 术 出 版 社　出版
(上海市闵行区号景路 159 弄 A 座 9F－10F　邮政编码 201101)
新华书店发行
合肥义兴印务有限责任公司印刷
开本 787×1092　1/16　印张 9.5　字数 156 000
2013 年 1 月第 1 版　2022 年 1 月第 14 次印刷
ISBN 978－7－5478－1332－4/G·257
定价：9.71 元

如发现印装质量问题或对内容有意见建议，请与本社联系
电话：021－64848025，邮箱：jc@sstp.cn
审批编号：皖费核(2022 年春季)第 0156 号　举报电话：12315

SHUXUE

目录

SHUXUE

SHUXUE

第6章 实数

“卡西尼”号土星探测器历经了80多个月的飞行，成功进入环绕土星运行的轨道. 要使土星探测器飞离地球，它的速度需大于 v_2，计算 v_2 的公式为

$$v_2 = \sqrt{2gr}.$$

（其中 g 取 $9.8\ \mathrm{m/s^2}$，r 取 $6.4\times10^6\ \mathrm{m}$）

上式中的 v_2 如何计算呢？这就要引进新的运算——开方.

本章将学习平方根、立方根和实数等知识，并用以解决有关问题.

6.1 平方根、立方根

1. 平方根

图 6-1

问题1 装修房屋，选用了某种型号的正方形地砖，这种地砖 4 块正好铺 1 m^2，如图 6-1，问这种地砖一块的边长是多少？

设一块正方形地砖的边长为 x m，根据题意，有

$$x^2 = \frac{1}{4}.$$

这是已知一个数的平方，求这个数的问题.

一般地，如果一个数的平方等于 a，那么这个数叫做 a 的**平方根**(square root)，也叫做**二次方根**.

例如，由于 $10^2 = 100$，$(-10)^2 = 100$，所以 100 的平方根是 $+10$ 和 -10(可以合写为 ± 10).

交流

1. 16 的平方根是什么？
2. 0 的平方根是什么？
3. -9 有没有平方根？

一个正数 a 的平方根有两个，它们互为相反数. 我们用 $\sqrt{a}$ 表示 a 的正的平方根，读作"根号 a"，其中 a 叫做**被开方**

数(radicand). 这个根也叫做 a 的**算术平方根**(arithmetic square root),另一个负的平方根记为 $-\sqrt{a}$. **0 的平方根是 0,0 的算术平方根也是 0,即 $\sqrt{0}=0$. 负数没有平方根.**

求一个数的平方根的运算叫做**开平方**(extraction of square root).

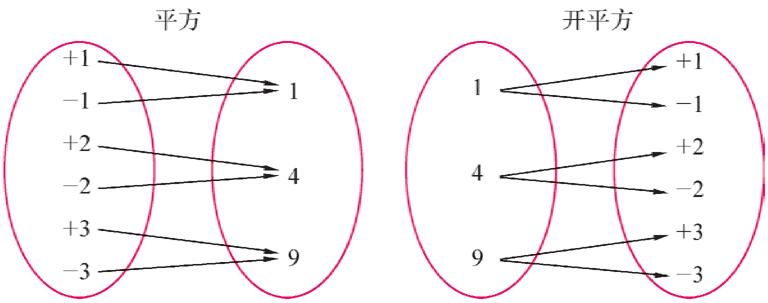


图 6-2

由上可知,开平方是平方的逆运算. 根据这种关系,我们可以求出一些数的平方根.

例 1 判断下列各数是否有平方根,为什么?

25; $\dfrac{1}{4}$; 0.0169; -64.

解 因为正数和零都有平方根,负数没有平方根,所以 $25,\dfrac{1}{4},0.0169$ 都有平方根; -64 没有平方根.

例 2 求下列各数的平方根和算术平方根:

(1) 1; (2) 81; (3) 64; (4) $(-3)^2$.

解 (1) 因为 $(\pm 1)^2=1$,所以 1 的平方根是 ± 1,即 $\pm\sqrt{1}=\pm 1$;1 的算术平方根是 1.

(2) 因为 $(\pm 9)^2=81$,所以 81 的平方根是 ± 9,即 $\pm\sqrt{81}=\pm 9$;81 的算术平方根是 9.

(3) 因为 $(\pm 8)^2=64$,所以 64 的平方根是 ± 8,即 $\pm\sqrt{64}=\pm 8$;64 的算术平方根是 8.

(4) $(-3)^2=9$.

因为$(\pm3)^2=9$,所以 9 的平方根是 ±3,也就是$(-3)^2$的平方根是 ±3,即 $\pm\sqrt{(-3)^2}=\pm3$;$(-3)^2$ 的算术平方根是 3.

利用计算器我们可以求一个正数的算术平方根或它的近似值.

例 3 利用计算器求下列各式的值(精确到 0.01):

(1) $\sqrt{2}$; (2) $\sqrt{1\,830}$; (3) $-\sqrt{0.876}$; (4) $\sqrt{\dfrac{5}{7}}$.

解 (1) 在计算器上依次键入: $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$,显示结果是 1.414 213 562,精确到 0.01,得 $\sqrt{2}\approx1.41$.

(2) $\sqrt{1\,830}\approx42.78$.

(3) $-\sqrt{0.876}\approx-0.94$.

(4) 在计算器上依次键入: $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{(}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{7}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$,

即可得 $\sqrt{\dfrac{5}{7}}\approx0.85$.

第二宇宙速度是指使人造卫星脱离地球引力作用范围飞向太阳,并围绕太阳运动所需的最小发射速度.

本章引言中提到的速度 v_2 是第二宇宙速度,$v_2=\sqrt{2gr}$,其中 g 取 $9.8\ \text{m/s}^2$,r 取 6.4×10^6 m,用计算器可求得

$$v_2\approx\sqrt{2\times9.8\times6.4\times10^6}=11\,200(\text{m/s})=11.2(\text{km/s}).$$

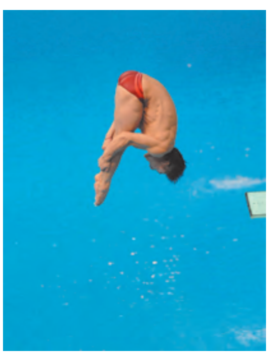


图 6-3

例 4 如图 6-3,跳水运动员要在空中下落的短暂过程中完成一系列高难度的动作. 如果不考虑空气阻力等其他因素影响,弹跳到最高点后,人体下落到水面所需要的时间 t 与下落的高度 h 之间应遵循下面的公式:

$$h=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 h 的单位是 m,t 的单位是 s,$g=9.8\ \text{m/s}^2$. 假设跳板的

高度是 3 m，运动员在跳板上跳起至高出跳板 1.2 m 处开始下落，那么运动员下落到水面约需多长时间？

解 设运动员下落到水面约需 t s，根据题意，得

$$3+1.2=\frac{1}{2}\times 9.8t^2,$$

$$t^2=\frac{2\times 4.2}{9.8}$$

$$\approx 0.857\,1,$$

$$t\approx 0.93.$$

因而，运动员下落到水面约需 0.93 s.

练习

1. 填空：

(1) 一个正数有两个平方根，而且这两个平方根________；

(2) ________有且只有一个平方根，它的平方根就是______；

(3) ________数没有平方根.

2. 判断是非：

(1) 4 是 16 的算术平方根. （ ）

(2) $\frac{2}{3}$是$\frac{4}{9}$的一个平方根. （ ）

(3) $(-5)^2$ 的平方根是 -5. （ ）

(4) 0 的算术平方根是 0. （ ）

3. 下列各式是否有意义，说明理由：

(1) $-\sqrt{3}$； (2) $\sqrt{-3}$； (3) $\sqrt{(-3)^2}$； (4) $\sqrt{0}$.

4. 求下列各数的平方根、算术平方根，并用式子表示：

(1) 49； (2) 25.

5. 用计算器求下列各式的值(精确到 0.01)：

(1) $\sqrt{127}$； (2) $\sqrt{0.635}$； (3) $\sqrt{\frac{1}{179}}$； (4) $-\sqrt{\frac{1}{3}}$.

2. 立方根

图 6-4

问题② 要做一个容积是 64 dm^3 的正方体木箱，如图 6-4，问它的棱长是多少？

设正方体木箱的棱长为 x dm，根据题意，有

$$x^3 = 64.$$

这是已知一个数的立方，求这个数的问题.

一般地，如果一个数的立方等于 a，那么这个数叫做 a 的**立方根**（cube root），也叫做**三次方根**，记作 $\sqrt[3]{a}$，读作“三次根号 a”，其中 a 叫做**被开方数**，3 叫做**根指数**（radical exponent）.

求一个数的立方根的运算叫做**开立方**（extraction of cubic root）.

在上面问题中，因为 $4^3 = 64$，所以 4 是 64 的立方根，即

$$\sqrt[3]{64} = 4.$$

开立方与立方互为逆运算. 根据这种关系，可求出一些数的立方根.

例 5 求下列各数的立方根：

（1）27；（2）-64；（3）0.

解 （1）因为 $3^3 = 27$，所以 27 的立方根是 3，

即 $$\sqrt[3]{27} = 3.$$

（2）因为 $(-4)^3 = -64$，所以 -64 的立方根是 -4，

即 $$\sqrt[3]{-64} = -4.$$

（3）因为 $0^3 = 0$，所以 0 的立方根是 0，

即 $$\sqrt[3]{0}=0.$$

利用计算器可以求一个数的立方根或它的近似值.

一般地，$\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$ 对吗？

例 6 用计算器求下列各数的立方根(精确到 0.01)：

(1) 2； (2) 7.797； (3) -17.456； (4) $\frac{137}{398}$.

解 (1) 在计算器上依次按键：$\boxed{\text{2ndf}}$ $\boxed{\sqrt[3]{\ }}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$，显示结果是 1.259 921 05，精确到 0.01，得 $\sqrt[3]{2}\approx 1.26$.

(2) $\sqrt[3]{7.797}\approx 1.98$.

请同学们自己算出第(3)(4)题的结果.

练习

1. 判断是非：

(1) 3 是 -27 的立方根. ( )

(2) 64 的立方根是 ± 4. ( )

(3) 0 是 0 的立方根. ( )

2. 填表：

a	1	8	27	64						
$\sqrt[3]{a}$					5	6	7	8	9	10

3. 求下列各数的立方根：

(1) 1； (2) -1； (3) 8； (4) -8.

4. 用计算器计算(精确到 0.1)：

(1) $\sqrt[3]{28}$； (2) $\sqrt[3]{0.345}$； (3) $\sqrt[3]{-17.6}$； (4) $\sqrt[3]{\frac{1}{48}}$.

从上面例题及练习题可以归纳得到：

正数的立方根是一个正数；负数的立方根是一个负数；0 的立方根是 0.

习题 6.1

1. 判断下列各式的正误,错的请改正:

(1) $\sqrt{4}=\pm 2$.　　(　　)

(2) $\sqrt{(-6)^2}=-6$.　　(　　)

(3) $(\pm\sqrt{4})^2=4$.　　(　　)

(4) $\sqrt{-9}=-3$.　　(　　)

2. 求下列各数的平方根、算术平方根:

(1) $(-4)^2$;　　(2) 10^2.

3. 用计算器求下列各数的平方根(精确到 0.01):

(1) 13;　　(2) 0.096;　　(3) $\dfrac{5}{13}$;　　(4) π.

4. 用计算器求下列各式的值(精确到 0.01):

(1) $\sqrt{28}$;　　(2) $\sqrt{0.462}$;　　(3) $-\sqrt{65}$;　　(4) $\pm\sqrt{18.2}$.

5. 一个正方形的面积扩大到原来的 9 倍,问它的边长是原来的多少倍?

6. 估计:$\sqrt{72}$在哪两个相邻整数之间?

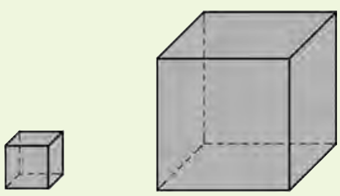
7. 求下列各数的立方根:

(1) $(-2)^3$;　　(2) $(-8)^2$.

8. 用计算器求下列各式的值 (精确到 0.01):

(1) $\sqrt[3]{387}$;　　(2) $\sqrt[3]{-18}$;　　(3) $-\sqrt[3]{\dfrac{8}{25}}$;　　(4) $\pm\sqrt[3]{2\,402}$.

9. 如图,如果一个正方体的体积变为原来的 27 倍,那么它的棱长发生了怎样的变化?



(第 9 题)

(第 10 题)

10. 如图,已知一球形储气罐的容积为 115 m^3,球的体积公式为 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (r 是球半径),求这个球形储气罐的半径(精确到 0.1 m).

6.2 实　数

思考

图 6－5 是由 4 条横线,5 条竖线构成的方格网,它们相邻的行距、列距都是 1. 从这些纵横线相交得出的 20 个点(称为格点)中,我们可以选择其中 4 个格点作为顶点连接成一个正方形,叫做格点正方形. 你能找出多少种面积互不相同的格点正方形?

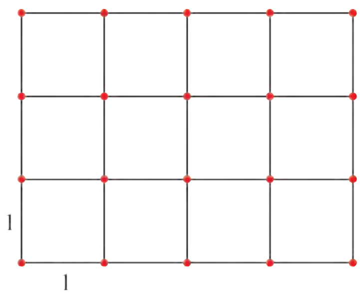


图　6−5

(1) 有面积分别是 1,4,9 的格点正方形吗?

(2) 有面积是 2 的格点正方形吗? 把它画出来.

还有与这些面积不相同的格点正方形吗?

我们看到四个边长为 1 的相邻正方形的对角线就围成一个面积为 2 的格点正方形(图 6－6),这种正方形的边长应是多少?

设这种正方形的边长为 x, 则 $x^2=2$.

因为 $x>0$,所以 $x=\sqrt{2}$.

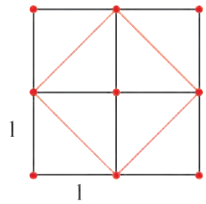


图　6−6

探究

$\sqrt{2}$是一个怎样的数呢？我们用下面的方法来研究它.

因为 $1^2=1<2$，$2^2=4>2$，所以

$$1<\sqrt{2}<2. \quad ①$$

这说明$\sqrt{2}$不可能是整数.

在 1 和 2 之间的一位小数有 1.1，1.2，…，1.9，那么$\sqrt{2}$在哪两个一位小数之间呢？

因为 $1.4^2=1.96<2$，$1.5^2=2.25>2$，所以

$$1.4<\sqrt{2}<1.5. \quad ②$$

同样，在 1.4 与 1.5 之间的两位小数有 1.41，1.42，…，1.49，那么$\sqrt{2}$在哪两个两位小数之间呢？

因为 $1.41^2=1.988\,1<2$，$1.42^2=2.016\,4>2$，所以

$$1.41<\sqrt{2}<1.42. \quad ③$$

类似地，可得

$$1.414<\sqrt{2}<1.415. \quad ④$$

……

像上面这样一直（无限）做下去，我们可以得到：

$$\sqrt{2}=1.414\,213\,5\cdots,$$

我们知道，有理数包括整数和分数，整数和分数可统一写成分数的形式（整数可以看作分母为 1 的分数）. 也就是说，有理数总可写成$\frac{n}{m}$（m，n 是整数，且 $m\neq0$）的形式. 例如，

$$2=\frac{2}{1}=2.0;$$

$$\frac{1}{2}=0.5;$$

$$-\frac{9}{11}=-0.\dot{8}\dot{1}.$$

任何整数、分数都可以化为有限小数或无限循环小数.

反过来,任何有限小数和无限循环小数都可以写成分数形式,因此有理数是有限小数或无限循环小数.

$\sqrt{2}$是一个无限不循环小数,它不是有理数.

见本章“阅读与思考”.

此外,

$$\sqrt{3}=1.732\,050\,80\cdots,$$

$$\sqrt[3]{3}=1.442\,249\,57\cdots,$$

$$\pi=3.141\,592\,65\cdots.$$

这些数都是无限不循环小数.

无限不循环小数叫做**无理数**(irrational number).

无理数可分为正无理数与负无理数,如$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π 是正无理数; $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $-\pi$ 是负无理数.

有理数和无理数统称为**实数**(real number). 这样,我们认识的数的范围又一次扩大了,我们可以将实数按如下方式分类:

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left.\begin{cases}\text{正有理数}\\\text{零}\\\text{负有理数}\end{cases}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\[2ex]\text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

数学园地

循环小数如何化为分数呢?

1. 纯循环小数

每个循环节有几位数字,分数的分母中就有几个9;分子则

是一个循环节的数. 如

$$0.\dot{3}=\frac{3}{9},\qquad 0.\dot{2}\dot{1}=\frac{21}{99}.$$

2. 混循环小数

每个循环节有几位数字，分数的分母中就有几个9，不循环的部分有几位数字，分母中9的后面就有几个0；分子则是第一个循环节及它前面的数减去不循环部分. 如

$$0.2\dot{3}=\frac{23-2}{90}=\frac{21}{90},$$

$$0.21\dot{3}\dot{7}=\frac{2\,137-21}{9\,900}=\frac{2\,116}{9\,900}.$$

练习

1. 把下列各数分类填入图中：

$0,\ 1,\ 3,\ -1,\ -2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 0.4,\ -0.25,\ 3.14,\ \pi,\ \sqrt{3},$

$\sqrt[3]{2},\ \sqrt{64},\ -\sqrt{10},\ -\sqrt[3]{8},\ \frac{\sqrt{2}}{2}.$

(第1题)

2. 把下列各数写成分数形式：

$1.5,\ -5,\ 0.\dot{7},\ 0.\dot{2}1\dot{3},\ 0.31\dot{2}\dot{6},\ 0.7\dot{2}1\dot{3}.$

3. 判断是非：

(1) 无限小数都是无理数. (　　)

(2) 无限不循环小数是无理数. (　　)

(3) 无理数是带根号的数. (　　)

(4) 分数是无理数. (　　)

有理数、无理数都有正、负之分，实数也可以作如下分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{正实数}\\ \text{零}\\ \text{负实数}\end{cases}$$

思考

每一个有理数都可用数轴上的一个点来表示，无理数（如$\sqrt{2}$）能用数轴上的点表示吗？

如图 6－7，以数轴上的单位长度为边作一个正方形，以原点为圆心、这个正方形对角线长为半径画弧，与数轴正半轴的交点记作 A，那么，点 A 表示什么数？

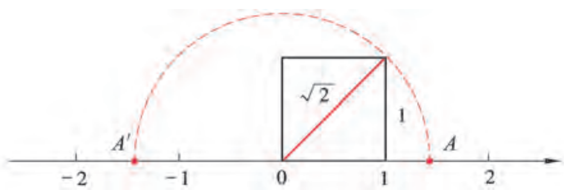


图 6－7

点 A' 是画圆弧时与数轴的另一交点，它表示什么数？

一般地，与有理数一样，每个无理数也都可以用数轴上的一个点来表示；反过来，数轴上的点不是表示无理数就是表示有理数. 所以，把数从有理数扩充到实数以后，**实数和数轴上的点一一对应**，即每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示；反过来，数轴上的每一个点都表示一个实数.

在实数范围内，相反数、倒数、绝对值的意义与在有理数范围内完全一样. 例如，

$\sqrt{2}$与$-\sqrt{2}$互为相反数，有$\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$.

$\sqrt{2}$与$\frac{1}{\sqrt{2}}$互为倒数，有$\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=1$.

任一个实数 a 的绝对值仍然用 $|a|$ 表示，如

$$|\sqrt{3}|=\sqrt{3},\ |-\sqrt{3}|=\sqrt{3}.$$

实数和有理数一样，可以进行加、减、乘、除、乘方运算，正数及零可以进行开平方运算，任意一个实数可以进行开立

在实数运算中，如果遇到无理数，并且需求出结果的近似值时，可以按照所要求的精确度用近似的有限小数代替无理数，再进行计算.

方运算. 而且有理数的运算法则和运算律对于实数仍然适用.

例 1 近似计算：

(1) $\sqrt{3}+\pi$ （精确到 0.01）；

(2) $\sqrt{5}\times\sqrt{7}$ （精确到 0.1）.

解 (1) $\sqrt{3}+\pi\approx 1.732+3.142=4.874\approx 4.87$.

(2) $\sqrt{5}\times\sqrt{7}\approx 2.24\times 2.65=5.936\approx 5.9$.

两个实数可以像有理数一样比较大小，即数轴上右边的点所表示的数总是大于左边的点所表示的数. 在实数范围内也有：

正数大于零，负数小于零，正数大于负数.

两个正数，绝对值大的数较大.

两个负数，绝对值大的数反而小.

例 2 在数轴上作出表示下列各数的点，比较它们的大小，并用“ <”连接它们.

-1, $\sqrt{2}$, -2, $-\sqrt{2}$, $|-2\sqrt{2}|$, 5.

解

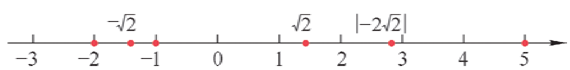


图 6-8

由数轴上各点的位置，得

$-2<-\sqrt{2}<-1<\sqrt{2}<|-2\sqrt{2}|<5$.

交流

你会比较 $\dfrac{\sqrt{7}-2}{3}$ 与 $\dfrac{1}{3}$ 的大小吗？

有位同学是这样比较的：

用计算器求得 $\frac{\sqrt{7}-2}{3} \approx 0.215$，$\frac{1}{3} \approx 0.333$，所以 $\frac{\sqrt{7}-2}{3} < \frac{1}{3}$.

你是怎样比较的，与上述方法是否相同？

练习

1. （口答）下列各数中，哪些是有理数，哪些是无理数？

   3.1415926，$\sqrt{4}$，$-\pi$，$-\sqrt[3]{8}$，$\sqrt{8}$，$\sqrt[3]{9}$，$0.\dot{3}$，$\frac{22}{7}$，$0.1818818881\cdots$（两个 1 之间依次增加一个 8）.

2. 近似计算（精确到 0.01）：

   （1）$\sqrt{7}+\sqrt{5}$；

   （2）$\frac{1}{4}\times\sqrt{6}-2\sqrt{3}$.

3. 比较下列各组数中两个数的大小：

   （1）$-\sqrt{5}$，$-\sqrt{6}$；　（2）$\sqrt{\pi}$，$\sqrt{3}$；　（3）$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，$\frac{1}{2}$.

4. 在 $\sqrt{9}$，$\sqrt{12}$，$\sqrt{13}$，$\sqrt{16}$ 和 $\sqrt{17}$ 中，介于 3 和 4 之间的无理数有________.

习题 6.2

1. 选择：

   （1）下列实数中，无理数的个数有（　　）.

   π，$-\sqrt{36}$，$0.\dot{2}\dot{3}$，$\frac{22}{7}$，$\sqrt[3]{5}$，3.1416.

   （A）1 个　（B）2 个　（C）3 个　（D）4 个

(2) 与数轴上的点建立一一对应关系的是(　　).

(A) 全体有理数　　(B) 全体整数

(C) 全体自然数　　(D) 全体实数

2. 写出两个介于 4 和 5 之间的无理数.

3. 求下列各数的相反数和绝对值:

$-\sqrt{5}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt[3]{-1}$, $\pi-3.14$, $\sqrt{5}-\sqrt{7}$, $\sqrt{3}-1.73$.

4. 比较下列各组数的大小:

(1) $-3.\dot{1}$ 和 -3.1;　　(2) $-\dfrac{1}{10}$ 和 $-\pi$;

(3) $\sqrt{2}$ 和 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$;　　(4) $\sqrt{29}$ 和 5.3.

5. 近似计算(精确到 0.01):

(1) $\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{7}$;

(2) $2\pi(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

阅读与思考

无理数漫谈

(一)

公元前 5 世纪左右,在古希腊哲学家和数学家毕达哥拉斯(Pythagoras)的领导下,成立了一个秘密会社,也就是后人所称的毕达哥拉斯学派,这个学派的基本信条是"万物皆数".他们所说的数仅仅指整数,分数是被看成两个整数之比.


图 6-9　毕达哥拉斯

这个学派的成员希帕索斯(Hippasus,公元前 470 年左右)发现一个既不是整数,又不是整数之比的数,它就是边长为 1 的正方形的对角线的长度.这一发现动摇了毕达哥拉斯学派的基本信条,引起数学史上第一次基础理论的危机.希帕索斯成了毕达哥拉斯学派的"叛逆者",被投入了大海.

在此后的2 000多年里,人们对无理数进行了孜孜不倦的探索,直到19世纪才真正地对无理数有一个全面的认识.

“有理数”“无理数”两名词是由英文翻译过来的,有理数一词的英文是“rational number”,其中“rational”有两层含义:一是“比率”,二是“合理”.从数学含义来说应该取前者,所以有理数实际上应该是“比数”,而无理数“irrational number”应该是“非比数”.但由于当初译成了“有理数”和“无理数”,经过长时间的使用,大家也习惯了,所以沿用至今.

(二)

“$\sqrt{2}$不是有理数”.对这一事实的证明,最早出现在亚里士多德(Aristotle)的著作中,但他声明来源于毕达哥拉斯学派.欧几里得(Euclid)在《原本》中给出了证明:

假设$\sqrt{2}$是有理数,由于$\sqrt{2}>0$,故必然有两个正整数n,m,使

$$\sqrt{2}=\frac{n}{m},$$

而且n与m互素(即没有1以外的公因数).

所以有

$$\frac{n^2}{m^2}=(\sqrt{2})^2=2.$$

也就是

$$n^2=2m^2.$$

上面式子的右边是偶数,故左边n^2也是偶数,因而n应是偶数,可设$n=2k$,代入上式,得

$$4k^2=2m^2,$$

即
$$2k^2=m^2.$$

这就得出m也是偶数,这说明n和m都是偶数,不互素,与假设矛盾,即$\sqrt{2}$不是有理数.

上述这种证明问题的方法,叫做反证法.在数学中,反证法是一种重要的推理方法,在以后的学习中还会遇到.

小结·评价

一、内容整理

开方运算 → 平方根、立方根

实数 → 有理数、无理数

二、主要知识回顾

1. 如果一个数的平方等于 a，那么这个数叫做 a 的平方根，其中正的平方根也叫做 a 的算术平方根. 求一个数的平方根的运算叫做开平方.

2. 如果一个数的立方等于 a，那么这个数叫做 a 的立方根. 求一个数的立方根的运算叫做开立方.

3. 无限不循环小数叫做无理数，有理数和无理数统称为实数. 实数可按如下方式分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left.\begin{cases}\text{正有理数}\\\text{零}\\\text{负有理数}\end{cases}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\[2ex]\text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

4. 实数的加、减、乘、除、乘方、非负数开平方、实数开立方运算具有与有理数相同的运算法则和运算律.

三、自评与互评

1. 请举例说明求平方根和求立方根问题在现实生活中的应用.
2. 开方与什么运算互为逆运算？迄今为止，你一共学习了哪些运算？
3. 数从有理数扩充到实数后，你觉得对解决问题有什么好处？请举例说明.
4. 下列方程，应在什么数的范围内才有解？

   (1) $2x = 4$；　　(2) $2x = 3$；

   (3) $x + 5 = 3$；　　(4) $x^2 - 3 = 0$.

A组 复习题

1. 设数轴上点 A 和点 B 分别表示数 $-\sqrt{3}$和$\sqrt{5}$,问哪些整数所表示的点介于 A,B 之间?
2. 比较下列各组数的大小:

   (1) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$和 $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$;　　(2) $\sqrt{12}$和 3.4.
3. 用计算器求下列各式的值(精确到 0.001):

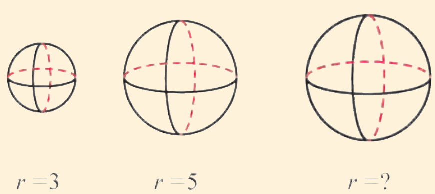
   (1) $-\sqrt{84.3}$;　　(2) $\pm\sqrt{55.5}$;　　(3) $\sqrt[3]{0.45}$;　　(4) $\sqrt[3]{-34\,012}$.
4. 设面积为 3π 的圆的半径为 r,则 r 是有理数还是无理数?
5. 用计算器求下列各数平方根的近似值(精确到 0.01):

   (1) 139.5;　　(2) $\dfrac{3}{4}$;　　(3) 0.003 2;　　(4) 3×10^4.
6. 用计算器求下列各数立方根的近似值(精确到 0.01):

   (1) 1.21;　　(2) 580 000;　　(3) -978;　　(4) $-\dfrac{73}{89}$.
7. 一个正方体的表面积等于 294 m^2,求它的体积.
8. 比较$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$与$\dfrac{3}{5}$的大小.
9. 一个正方形的面积扩大为原来面积的 4 倍,扩大后正方形的边长是原来边长的多少倍?若面积扩大为原来面积的 n 倍呢?
10. 计算(精确到 0.01):

    (1) $|\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}|+2\sqrt{2}$;

    (2) $\sqrt[3]{6}\times\pi\div\sqrt{5}$.
11. 把两个半径分别是 3,5 的铅球熔化后做成一个更大的铅球,这个大铅球的半径是多少(精确到 0.1)? $\left(\text{球的体积公式是 } V=\dfrac{4}{3}\pi r^3,\text{ 其中 } r \text{ 是球的半径}\right)$



(第 11 题)

B组 复习题

1. 判断下列各种说法的正误：

（1）分数都是有理数. （　　）

（2）无限循环小数都是无理数. （　　）

（3）任何数的平方根都是无理数. （　　）

（4）无理数与无理数的和一定是无理数. （　　）

（5）无理数的平方一定是无理数. （　　）

2. 选择题：

（1）一个数的算术平方根是 a，比这个数大 2 的数是（　　）.

（A）$a+2$　　（B）$\sqrt{a}+2$

（C）a^2+2　　（D）$\sqrt{a}-2$

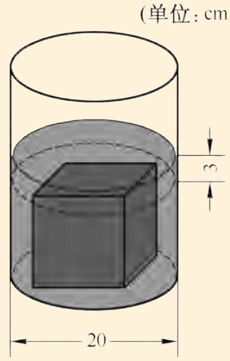
（2）已知 a 的平方根是 ± 8，则 a 的立方根是（　　）.

（A）± 4　　（B）± 2

（C）2　　（D）4

3. 如图，一个正方体铁块放入圆柱形玻璃容器后，完全没入容器内水中，使容器中的水面升高 3 cm，如果容器的底面半径是10 cm，求正方体铁块的棱长（π 取 3.14，精确到 0.1 cm）.

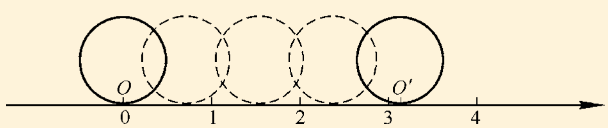
（单位：cm）



（第 3 题）

4. 已知一个正方体的棱长是 4 cm，再作一个正方体，使它的体积是原正方体体积的 8 倍，求所作的正方体与原正方体的表面积之比.

5. 如图，直径为 1 的圆从原点沿数轴向右滚动一周，圆上与原点重合的一点 O 到达点 O'，点 O'表示什么数？



（第 5 题）

C组

复 习 题

1. 写出一个在$\sqrt{2}$与$\sqrt{3}$之间的无理数.

2. 在图 6－5 的方格网中，你能画出面积为 5 的格点正方形吗？一共可以画几个？

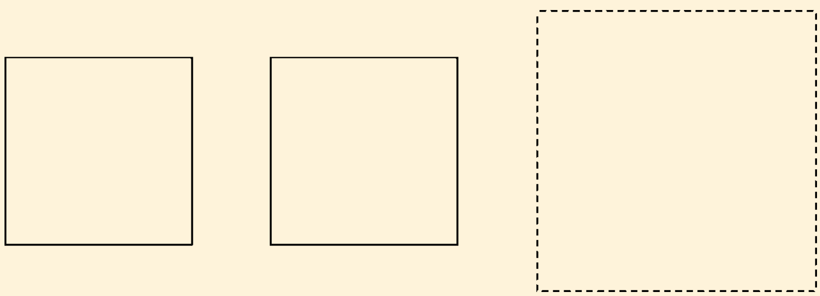
3. （1）利用计算器计算下表中上一行各式，并将结果填在表中下一行相应的格里（精确到 0.001）：

原　式	$\sqrt{0.003}$	$\sqrt{0.03}$	$\sqrt{0.3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{30}$	$\sqrt{300}$	$\sqrt{3\,000}$
结　果							

（2）你能根据 $\sqrt{3}\approx 1.732$，直接说出$\sqrt{0.003}$，$\sqrt{0.03}$，$\sqrt{0.3}$，$\sqrt{30}$，$\sqrt{300}$，$\sqrt{3\,000}$的值吗？

4. 类似上题，把表中所有平方根换成立方根. 你能根据 $\sqrt[3]{3}\approx 1.442$，直接说出$\sqrt[3]{0.003}$，$\sqrt[3]{0.03}$，$\sqrt[3]{0.3}$，$\sqrt[3]{30}$，$\sqrt[3]{300}$，$\sqrt[3]{3\,000}$的值吗？

5. 如图是两个面积为 1 的正方形，试对所给图形进行分割，然后拼成面积为 2 的大正方形. 请在图中画出分割线，并在虚线框内画出拼成的大正方形，写出大正方形的边长.



（第 5 题）

第7章 一元一次不等式与不等式组

事物之间的数量关系，除了“相等”之外，还会有“不等”的情况. 在解决实际问题时，对于等量关系，可以利用等式（包括方程、方程组）来刻画；对于不等量之间的关系，我们则用不等式来刻画.

本章将探究不等式的基本性质、一元一次不等式和不等式组的解法，以及如何运用不等式解决问题.

7.1 不等式及其基本性质

在前面的学习中，已经知道两个数或同类的量比较，有相等关系，也有不等关系. 下面用不等号来表示数量之间的不等关系，并讨论它们的性质.

图 7-1

问题1 用适当的式子表示下列关系：

（1）$2x$ 与 3 的和不大于 -6；__________

（2）x 的 5 倍与 1 的差小于 x 的 3 倍；__________

（3）a 与 b 的差是负数. __________

图 7-2

问题2 雷电的温度大约是 28 000 ℃，比太阳表面温度的 4.5 倍还要高. 设太阳表面温度为 t ℃，那么 t 应满足的关系式是__________.

问题3 一种药品每片为 0.25 g，说明书上写着："每日用量 0.75～2.25 g，分 3 次服用". 设某人一次服用 x 片，那么 x 应满足的关系式是__________.

> 不大于，即小于或等于，用"≤"表示；不小于，即大于或等于，用"≥"表示.

用不等号（>、≥、<、≤或≠）表示不等关系的式子叫做**不等式**（inequality）.

练习

1. 甲市某天最低气温为 -1℃，最高气温为 5℃，设该市这天某一时刻的气温为 t℃，求 t 应满足的数量关系.
2. 某段长为 30 km 的公路 AB，对行驶汽车限速为（不超过）60 km/h，一辆汽车从 A 到 B 的行驶时间为 t h，求 t 满足的数量关系.

我们学过利用等式的基本性质解方程,类似地,在不等式问题的求解过程中也要利用不等式的基本性质. 下面我们先来讨论不等式的基本性质.

观察

如图 7−3,在一台天平两端的托盘中分别放置了质量为 a,b 的物体,图中天平倾斜,这直观地说明 $a>b$.

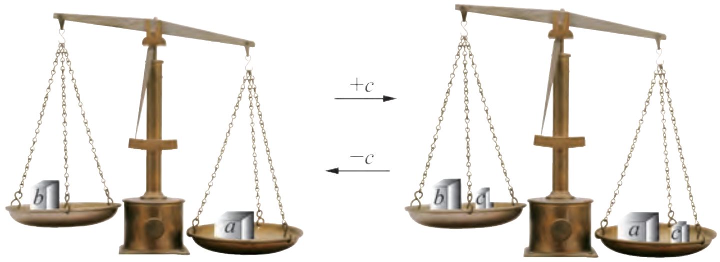


图 7−3

这时,如果在两端托盘中同时加上质量为 c 的物体,天平的倾斜方向会改变吗? 这反映的数量关系是什么呢?

不等式有如下的基本性质:

性质 1　不等式的两边都加上(或减去)同一个数或同一个整式,不等号的方向不变. 即

如果 $a>b$,那么 $a+c>b+c$,$a-c>b-c$.

思考

对于倾斜的天平,如果两边砝码的质量同时扩大相同的倍数或同时缩小为原来的几分之一,那么天平的倾斜方向会改变吗?

性质2　不等式的两边都乘以(或除以)同一个正数,不等号的方向不变. 即

如果 $a>b,c>0$,那么 $ac>bc,\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$.

探究

1. 如果 $a>b$, 那么它们的相反数 $-a$ 与 $-b$ 哪个大,你能用数轴上点的位置关系和具体的例子加以说明吗?

2. 如果 $a>b$,那么 $-a<-b$, 这个式子可理解为:

$$a\times(-1)<b\times(-1).$$

这样,对于不等式 $a>b$, 两边同乘以 -3,会得到什么结果呢?

$$\begin{tikzcd} a>b \arrow[r, "\times(-1)"] \arrow[rr, bend right, "\times(-3)"'] & a\times(-1)<b\times(-1) \arrow[r, "\times 3"] & a\times(-3)<b\times(-3). \end{tikzcd}$$

3. 如果 $a>b,c<0$, 那么 ac 与 bc 有怎样的大小关系?

性质3　不等式的两边都乘以(或除以)同一个负数,不等号的方向改变. 即

如果 $a>b,c<0$,那么 $ac<bc,\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$.

性质4　如果 $a>b$,那么 $b<a$.

例如,由 $3>x$,可得 $x<3$.

观察

如图 7-4，设数轴上的三个点 A,B,C 分别表示三个实数 a,b,c. 从中你能发现不等式的什么性质？

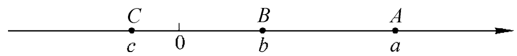


图 7-4

由上可得：

性质 5　如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$.

例如，由 $\angle A > \angle B$，$\angle B > 30°$，可得 $\angle A > 30°$.

交流

等式与不等式的基本性质有哪些相同点和不同点？

练习

1. 如果 $a<b$，用不等号连接下列各式的两边：

　(1) $4a$ ______ $4b$；　　(2) $a-10$ ______ $b-10$；

　(3) $\frac{1}{3}a$ ______ $\frac{1}{3}b$；　　(4) $-\frac{5}{2}a$ ______ $-\frac{5}{2}b$.

2. 若 $m>n$，判断下列不等式是否正确：

　(1) $m-7<n-7$.　(　　)

　(2) $3m<3n$.　(　　)

　(3) $-5m>-5n$.　(　　)

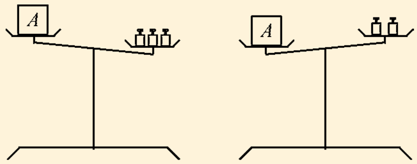
　(4) $\frac{m}{9}>\frac{n}{9}$.　(　　)

3. 如果 $x \geqslant y$，$a<0$，$b>0$，用不等号连接下列各式的两边：

(1) $\frac{x}{a}$______$\frac{y}{a}$；　　(2) bx______by；

(3) $2x$______$x+y$；　　(4) abx______aby.

4. 如图，若天平右盘中每个砝码的质量都是 1 g，则图中药品 A 的质量在什么范围内？



(第 4 题)

习题 7.1

1. 用不等式表示下列关系：

(1) a 是正数；　　(2) a 是负数；

(3) a 与 5 的和是正数；　　(4) b 减 5 的差是负数；

(5) x 的 3 倍大于或等于 9；　　(6) y 的一半小于 3.

2. 已知 $a<b$，判断下列不等式是否成立：

(1) $a-3<b-3$.　　(　　)

(2) $2a<2b$.　　(　　)

(3) $-5a<-5b$.　　(　　)

(4) $-4a+2<-4b+2$.　　(　　)

3. 用“ > ”或“ < ”填空：

(1) 如果 $a-1<b-1$，那么 a____b；

(2) 如果 $3a>3b$，那么 a____b；

(3) 如果 $-a<-b$，那么 a____b；

(4) 如果 $2a+1<2b+1$，那么 a____b；

(5) 如果 $a>b$，那么 $a(a-b)$____$b(a-b)$.

4. 根据不等式的基本性质，将下列不等式化成“ $x>a$ ”或“ $x<a$ ”的形式：

(1) $x-1<3$；　　(2) $6x<5x-2$；　　(3) $\frac{x}{3}<5$；　　(4) $-4x>3$.

5. 用“ < ”或“ > ”填空：

(1) 当 $a>0$，b____0 时，$ab>0$；　　(2) 当 $a>0$，b____0 时，$ab<0$；

(3) 当 $a<0$，b____0 时，$ab>0$；　　(4) 当 $a<0$，b____0 时，$ab<0$.

6. 比较下面各题中两个数的大小：

(1) $\sqrt[3]{-27}$ 与 $-\sqrt{(-2)^2}$；　　(2) $\sqrt{8}$ 与 $\sqrt[3]{28}$.

7.2 一元一次不等式

问题 某公司的统计资料表明，科研经费每增加 1 万元，年利润就增加 1.8 万元. 如果该公司原来的年利润为 200 万元，要使年利润超过 245 万元，那么增加的科研经费应高于多少万元？

图 7-5

设该公司增加科研经费 x 万元，那么年利润就增加 $1.8x$ 万元. 因为年利润要超过 245 万元，所以

$$200+1.8x>245.$$

这样，就得到了含有未知数的不等式. 像这种含有一个未知数，未知数的次数是 1、且不等号两边都是整式的不等式叫做**一元一次不等式**(linear inequality with one unknown).

对于不等式 $200+1.8x>245$：

当 x 取 26 时，代入原不等式左边，得

$$200+1.8\times 26=246.8.$$

当 x 取 25 时，代入原不等式左边，得

$$200+1.8\times 25=245.$$

当 x 取 24 时，代入原不等式左边，得

$$200+1.8\times 24=243.2.$$

这就是说，当 x 取某些值（如 26）时，不等式 $200+1.8x>245$ 成立；当 x 取另外一些值（如 25，24）时，不等式 $200+1.8x>245$ 不成立.

思考

1. 判断下列给出的数中哪些能使不等式 $200+1.8x>245$ 成立：

$$30.5,\ 24.5,\ 25.5,\ 22,\ 10.$$

2. 你还能找出使上述不等式成立的其他数吗？能找多少个？

一般地，能够使不等式成立的未知数的值，叫做这个**不等式的解**，所有这些解的全体称为这个不等式的**解集**（solution set）.

由上可知，大于 25 的任何一个实数（如 26，30.5 等）都是不等式 $200+1.8x>245$ 的解，而所有这些解的全体（$x>25$）称为这个不等式的解集.

求不等式解集的过程叫做**解不等式**（solving inequality）.

例 1 解不等式：$2x+5\leqslant 7(2-x)$.

解 去括号，得

$$2x+5\leqslant 14-7x.$$

移项，得

$$2x+7x\leqslant 14-5.$$

合并同类项，得

$$9x\leqslant 9.$$

x 系数化成 1，得

$$x \leqslant 1.$$

不等式的解集可以在数轴上直观地表示出来. 如 $x \leqslant 1$，可用数轴上表示 1 的点以及左边所有点来表示（图 7－6）.

图 7－6

解集 $x \leqslant 1$ 包括 1，则在数轴上把表示 1 的点画成实心点.

练习

1. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

   (1) $2x \geqslant -8$；　　(2) $-4x \leqslant 2$；

   (3) $5x-4 \leqslant 7x-1$；　　(4) $2x-5 \geqslant 2+5x$.

2. 解下列不等式：

   (1) $3(1-x) \leqslant x+8$；　　(2) $12-2x \geqslant 3(2x-3)$.

3. 解本节问题中的不等式：

   $200+1.8x>245$.

例 2　解不等式，并把它的解集在数轴上表示出来：

$$\frac{4+x}{3}-1<\frac{x}{2}.$$

解　去分母，得

$$2(4+x)-6<3x.$$

去括号，得

$$8+2x-6<3x.$$

移项、合并同类项，得

$$-x<-2.$$

x 系数化成 1，得

$$x > 2.$$

在数轴上表示不等式的解集（图 7－7）.

图 7-7

解集 $x > 2$ 不包括 2，所以在数轴上把表示 2 的点画成空心点.

交流

一元一次方程的解法与一元一次不等式的解法有哪些相同点和不同点？为什么解法会有不同？

练习

1. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

（1）$x+5>2$；（2）$2x<-2$；

（3）$15-7x>3x+5$；（4）$4x-7>2x+5$.

2. 解下列不等式：

（1）$\dfrac{3x+7}{5}>x-1$；（2）$\dfrac{2x+1}{-15}>\dfrac{x-3}{3}$.

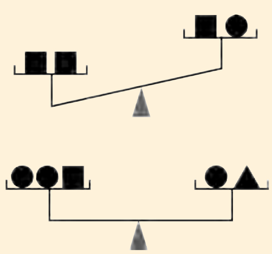
3. 当 x 取什么值时，代数式 $4x-1$ 的值

（1）大于 7；（2）小于 $-2x+5$ 的值.

4. 设▲，■，●表示三种不同的物体，现用天平称了两次，情况如图所示，那么▲，■，●这三种物体的质量从大到小的顺序排列应为（　　）.

（A）■，●，▲（B）■，▲，●

（C）▲，●，■（D）▲，■，●



（第 4 题）

图　7-8

例 3　松山公园菊花展个人票每张 10 元，20 人以上（含 20 人）的团体票 8 折优惠. 在人数不足 20 人的情况下，试问何时买 20 人的团体票比买个人票要便宜？

解　设人数为 x，买个人票需要 $10x$ 元，买 20 人的团体票需要 $20\times10\times80\%$ 元，根据题意，得

$$10x>20\times10\times80\%.$$

解不等式，得

$$x>16.$$

因为人数必须是小于 20 的整数，即 $x<20$. 因此，当人数是 17，18，19 时，买 20 人的团体票比买个人票要便宜.

练习

1. 学校准备用 2 000 元购买名著和辞典，其中名著每套 65 元，辞典每本 40 元. 现已购买名著 20 套，问最多还能买辞典多少本？
2. 某班级共有 50 名学生，准备召开元旦晚会，需租用场地和音响设备，其费用为 500 元，同时为每位学生提供水果和点心. 如果总费用预算不超过 750 元，问最多可以给每位学生准备用于买水果和点心的费用为多少？
3. 某种导火绳燃烧的速度是 0.8 cm/s，一位工人点燃导火绳后以 6 m/s 的速度跑到距爆破点 120 m 以外的安全区，问导火绳至少要多长？

习题 7.2

1. 解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来：

　(1) $-\dfrac{2}{3}x<-4$；　　(2) $14-7x\leqslant9-2x$；

　(3) $4(x-3)\leqslant2(x-1)$；　　(4) $11-3x\geqslant2(x-2)$.

2. 设代数式 $3(1-2x)$ 的值不大于 -2，求 x 的取值范围.

3. 解下列不等式：

(1) $2x-4>\dfrac{6x+1}{2}$；

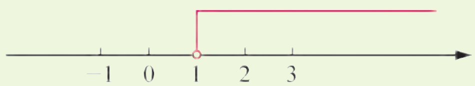
(2) $x-\dfrac{1}{2}(4x-1)<\dfrac{3}{2}$；

(3) $\dfrac{4+x}{2}+1\geqslant\dfrac{4(x+1)}{3}$；

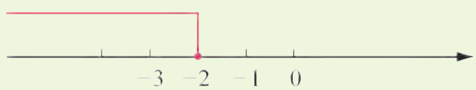
(4) $\dfrac{2x-5}{6}>3x-\dfrac{x+2}{4}$.

4. 根据下列用数轴表示的不等式的解集，写出一个相应的含 x 的不等式：

(1)



(2)



（第 4 题）

5. 求满足不等式 $3(x-2)<12$ 的所有正整数解.

6. 甲步行的速度为 5 km/h，先走 30 min 后，乙从甲的出发地沿同路追赶甲，乙步行的速度最快为6 km/h，问乙至少需要多少时间才能赶上甲？

7. 李老师每天都是骑摩托车从家到学校，离家最初的 6 km，平均速度为 30 km/h，超过 6 km 后，平均速度为 50 km/h. 这样，李老师每天从家到学校所需时间不超过 0.5 h，求李老师家到学校的距离最远是多少？

8. 一水果商某次按每千克 4 元购进一批苹果，销售过程中有 20% 的苹果正常损耗. 问该水果商把售价定为多少时可以避免亏本？

9. 学校举行环保知识竞赛，共有 20 个问题，答对一题得 5 分，不答或答错一题扣 3 分. 如果王林希望自己的得分不低于 80 分，那么他至少应答对多少题？

10. 你能举出一个生活中的事例，来说明不等式 $2x+5>11$ 的实际意义吗？

7.3 一元一次不等式组

图 7-9

问题❶ 小莉带 5 元钱去超市买作业本，她拿了 5 本，付款时钱不够，于是小莉退掉一本，收银员找给她一些零钱。请你估计一下，作业本单价约是多少元？

设作业本的单价为 x 元，那么 5 本作业本的价格为 $5x$ 元，根据“付款时钱不够”可知：

$$5x > 5.$$

退掉一本，即 4 本作业本的价格应为 $4x$ 元，由于收银员还找了一些零钱，于是

$$4x < 5.$$

这里，作业本的单价 x 应同时满足上述两个不等式。

我们把这两个不等式合写在一起，并用括号括起来，就得到一个不等式组：

$$\begin{cases} 5x > 5, & ① \\ 4x < 5. & ② \end{cases}$$

问题❷ 某村种植杂交水稻 8 hm^2，去年的总产量是 94 800 kg. 今年改进了耕作技术，估计总产量比去年增产 2% ~4%（包括 2% 和 4%）. 那么今年水稻平均每公顷的产量将会在什么范围内？

图 7-10

设今年水稻平均每公顷的产量为 x kg，则今年水稻的总产量为 $8x$ kg，根据题意，得

$$\begin{cases} 8x \geqslant 94\,800 \times (1 + 2\%), & ① \\ 8x \leqslant 94\,800 \times (1 + 4\%). & ② \end{cases}$$

像上面这样，由几个含有同一个未知数的一元一次不等式组成的不等式组，叫做**一元一次不等式组**(system of linear inequalities with one unknown). 这几个一元一次不等式解集的公共部分，叫做这个一元一次不等式组的**解集**.

求一元一次不等式组解集的过程叫做**解不等式组**.

例 1 解不等式组：

$$\begin{cases}2x+3>0, & ① \\ 3+x<3x-1. & ②\end{cases}$$

解 解不等式①，得

$$x>-1.5.$$

解不等式②，得

$$x>2.$$

在数轴上分别表示这两个不等式的解集(图 7－11).

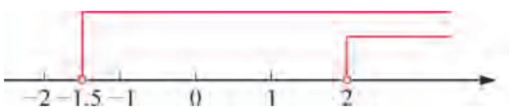


图 7－11

利用数轴来确定不等式组的解集，直观方便.

由图 7－11 可知，这两个不等式解集的公共部分，是原不等式组的解集，因此，原不等式组的解集是 $x>2$.

练习

1. 说出下列不等式组的解集：

(1) $\begin{cases}x>0, \\ x>-2;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x<-5, \\ x<-1;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x>2, \\ x<7;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}x<0, \\ x>3.\end{cases}$

2. 解下列不等式组，并把解集在数轴上表示出来：

(1) $\begin{cases}2x-1\geqslant x+1, \\ x+8<4x+1;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}5x+6>4, \\ 15+9x<10-4x.\end{cases}$

例 2 解不等式组：

$$\begin{cases} 5x-2<7x-4, & ① \\ \dfrac{2x-1}{3}>\dfrac{3x+1}{2}. & ② \end{cases}$$

解 解不等式①，得

$$x>1.$$

解不等式②，得

$$x<-1.$$

在数轴上分别表示这两个不等式的解集（图 7－12）.

图 7－12

从图 7－12 可知，这两个不等式的解集无公共部分，因此，原不等式组无解.

练习

1. 解下列不等式组，并把解集在数轴上表示出来：

（1）$\begin{cases} 2x+5>5x+2, \\ 2(x-1)>3x; \end{cases}$ （2）$\begin{cases} \dfrac{x-2}{3}\geqslant 1, \\ 3x+2\geqslant 11; \end{cases}$ （3）$\begin{cases} 5x-2>3(x+1), \\ -\dfrac{7}{2}x-1\geqslant 7-\dfrac{3}{2}x. \end{cases}$

2. 解本节开始的问题 1，2 中得到的不等式组：

（1）$\begin{cases} 5x>5, \\ 4x<5; \end{cases}$ （2）$\begin{cases} 8x\geqslant 94\ 800\times(1+2\%), \\ 8x\leqslant 94\ 800\times(1+4\%). \end{cases}$

交流

1. 说一说不等式组的解集有哪几种情况?

2. 假设 $a<b$, 你能很快说出下列不等式组的解集吗?

(1) $\begin{cases} x>a, \\ x>b; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x<a, \\ x<b; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x>a, \\ x<b; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x<a, \\ x>b. \end{cases}$

如果你有困难,就求助于数轴吧!

习题 7.3

1. 解下列不等式组:

(1) $\begin{cases} 2x-3>x-4, \\ 5x+1<3x+3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x+1<7, \\ 7\geqslant 3x+4. \end{cases}$

2. 解下列不等式组:

(1) $\begin{cases} 3x<6+5x, \\ 4x<2(x-1); \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{x-4}{5}\geqslant 1, \\ 2(x+1)\geqslant 10; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-4\geqslant 3(x-2), \\ \dfrac{1+2x}{3}>x-1; \end{cases}$　　(4) $11<1-2x<21$.

3. 某生物兴趣小组要在恒温箱中培养 A,B 两种菌种,A 种菌种生长的温度在 35 ~ 38℃之间,B 种菌种的生长温度在 34 ~ 36℃之间,那么恒温箱的温度 t ℃应该设定在什么范围内?

7.4 综合与实践

排队问题

图　7-13

图　7-14

在日常生活和生产实践中经常遇到排队等待的现象，例如，医院挂号付费、银行办理业务等. 除了上述有形的排队，还有大量“无形”的排队现象，例如，生产线上的原料等待加工，因故障停止运转的机器等待工人修理等.

某些场合下，由于排队的人很多，人们将花费很多的时间在等待，这使人们的工作和生活受到很大影响. 同时，也使人们对服务机构的服务产生不满，这无疑损害了服务机构的效益和形象.

服务机构通常通过增加服务窗口来减少排队，但窗口增加过多又会造成人力、物力的浪费，一般是根据顾客可接受的排队等待时间来安排和调整其服务窗口的.

如何使投入的资源较少，而顾客对得到的服务又较满意，这就需要研究排队问题，下面我们来研究最简单的排队问题.

问题1　某服务机构开设了一个窗口办理业务，并按顾客“先到达，先服务”的方式服务，该窗口每 2 min 服务一位顾客. 已知当窗口开始工作时，已经有 6 位顾客在等待，在窗口开始工作 1 min 后，又有一位“新顾客”到达，且预计以后每 5 min 都有一位“新顾客”到达.

（1）设 e_1，e_2，…，e_6 表示当窗口开始工作时已经在等待的 6 位顾客，c_1，c_2，…，c_n 表示在窗口开始工作以后，按先后顺序到达的“新顾客”，请将下面表格补充完整（这里假设 e_1，e_2，…，e_6 的到达时间为 0）.

顾　客	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	…
到达时间/min	0	0	0	0	0	0	1						…
服务开始时间/min	0	2	4										…
服务结束时间/min	2	4	6										…

每一位顾客的服务开始时间都等于其到达时间吗?

(2) 下面表格表示每一位顾客得到服务之前所需等待的时间,试将该表格补充完整.

顾　客	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	…
等待时间/min	0	2	4	6	8			8	5				…

(3) 根据上述两个表格,能否知道“新顾客”中,哪一位是第一位到达服务机构而不需要排队的? 求出他的到达时间.

(4) 在第一位不需要排队的顾客到达之前,该窗口已经服务了多少位顾客? 为这些顾客服务共花费了多长时间?

(5) 平均等待时间是一个重要的服务质量指标,为考察服务质量,问排队现象消失之前,所有顾客的平均等待时间是多少?

在上述问题中,如果问题的条件变复杂(例如,当窗口开始工作时已经在等待的顾客非常多),使用列表方法就很不方便,你能否用代数式表示出上面的数量,总结上面表格中的数量关系,并根据这个关系来解决问题?

问题❷　在问题 1 的条件中,当服务机构的窗口开始工作时,如果已经有 10 位顾客在等待(其他条件不变),且当“新顾客”c_n 离去时,排队现象就此消失了,即 c_{n+1} 为第一位到达后不需要排队的“新顾客”,问:

在 c_{n+1} 到达服务机构之前,该窗口为顾客服务所花费的时间小于等于 c_{n+1} 的到达时间.

(1) 用关于 n 的代数式来表示,在第一位不需要排队的“新顾客”c_{n+1} 到达之前,该窗口已经服务了多少位顾客? 为这些顾客服务共花费了多长时间?

(2) 用关于 n 的代数式表示 c_{n+1} 的到达时间.

(3) 根据(1)和(2)得到的代数式以及它们的数量关系,求 $n+1$ 的值.

问题❸ 请你选择一个排队现象进行调查,并就你调查发现的问题设计一个解决方案.

小结·评价

一、内容整理

二、主要知识回顾

1. 不等式的基本性质与等式的基本性质有哪些相同点与不同点?

2. 一元一次不等式的解法与一元一次方程的解法有什么联系,解一元一次不等式时有哪些需要注意的事项?

三、自评与互评

1. 举例说明生活中的不等关系.

2. 和你的同伴互出几道题,检查一下各自对一元一次不等式和不等式组的掌握情况.

3. 你对类比的方法有什么认识? 和同伴交流自己的学习体会.

4. 举例说明应用不等式解决实际问题的一般过程. 你能编一道可用不等式解决的问题吗?

A组

复 习 题

1. 填空：

(1) x 的$\frac{1}{3}$与 x 的差为正数，用不等式表示为________；

(2) 某种植物生长的适宜温度不能低于 18℃，也不能高于 22℃，若设该种植物生长的适宜温度为 x℃，则有不等式__________；

(3) 恩格尔系数是指家庭日常食品支出占家庭经济收入的比例，它反映了居民家庭的实际生活水平. 根据联合国粮农组织提出的标准，不同类型家庭的恩格尔系数如下表所示：

家庭类型	贫困	温饱	小康	富裕	最富裕
恩格尔系数(%)	59 以上	50～58	40～49	30～39	不到 30

设恩格尔系数为 n，请你用含 n 的不等式表示小康型家庭的恩格尔系数的范围__________；

(4) 如果 $a+b>c+b$，那么 a ____ c；

(5) 如果 $c<0$，且$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$，那么 a ____ b.

2. 在下列括号内填上不等式变形的依据：

(1) 由 $3x-5>1$，得 $3x>6$； (　　　　　　)

(2) 由 $-2x>1$，得 $x<-\frac{1}{2}$； (　　　　　　)

(3) 由 $1-x<3$，得 $-x<2$； (　　　　　　)

(4) 由 $\frac{1}{5}x>\frac{1}{3}$，得 $x>\frac{5}{3}$. (　　　　　　)

3. 解下列不等式，并在数轴上表示它们的解集：

(1) $7-2(x-3)\leqslant 5x-1$；

(2) $1-\frac{x}{3}\leqslant\frac{x+10}{2}$.

4. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}2x-3>x-1,\\2x+9<4x-1;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\frac{3x-5}{2}\leqslant x-2,\\3(x-1)<4(x-1);\end{cases}$

(3) $1<4x-3<5$;　　(4) $\begin{cases} x-1<0, \\ 1-x\geqslant 3. \end{cases}$

5. 某乡在遭遇洪水后，为排除局部低洼地的内涝，安排了抽水速度为 20 m^3/min 的抽水机 5 台同时工作，估计积水量为 $1.5\times10^5 \sim 1.8\times10^5$ m^3，问大约需多少时间才能将积水排完？

B组 复习题

1. 选择：

(1) 由 $x<y$ 能得到 $ax>ay$，则(　　).

(A) $a\geqslant 0$　　(B) $a\leqslant 0$

(C) $a>0$　　(D) $a<0$

(2) 若 $a<b<0$，则下列各式中，不能成立的是(　　).

(A) $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$　　(B) $a-b<0$

(C) $\frac{a}{b}>1$　　(D) $\frac{a}{b}<1$

(3) 若 $m<0$，则不等式 $mx+n<0$ 的解集是(　　).

(A) $x>-\frac{n}{m}$　　(B) $x<-\frac{n}{m}$

(C) $x>\frac{n}{m}$　　(D) $x<\frac{n}{m}$

2. 求不等式组 $-2\leqslant\frac{1+2x}{3}\leqslant 2$ 的整数解.

3. 三个连续自然数组成一个自然数组，其和小于 16，问这样的自然数组共有多少组？把它们分别写出来.

4. 求满足下面不等式组中整数 x 的最大值和最小值：

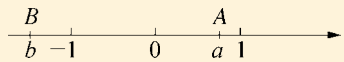
$$\begin{cases} \frac{4}{3}x>x-2, \\ \frac{3x+2}{4}\geqslant 2x+1. \end{cases}$$

5. 如果关于 x 的不等式 $(1-m)x>3$ 可化为 $x<\dfrac{3}{1-m}$，试确定 m 的取值范围.

6. 如图，数轴上 A，B 两点对应实数 a，b，用“>”或“<”填空：

(1) $a+b$ ____ 0；　(2) ab ____ 0；

(3) $a-b$ ____ 0；　(4) $|a|-|b|$ ____ 0.



（第 6 题）

C组 复习题

1. 如果不等式 $(a-1)x>(a-1)$ 的解集是 $x<1$，那么 a 的取值范围是什么？

2. 如果不等式组 $\begin{cases}-x+2<x-6,\\ x>a\end{cases}$ 的解集是 $x>4$，那么 a 的取值范围是什么？

3. 方程组 $\begin{cases}3x+7y=k,\\ 2x+5y=20\end{cases}$ 的解 x，y 都是正数，求整数 k.

第 8 章

整式乘法与因式分解

一个施工队修筑一条路面宽为 n m的公路，第一天修筑 a m 长，第二天修筑 b m 长，第三天修筑 c m 长，3 天修筑路面的面积共是多少？

本章将学习整式的乘法与因式分解，并运用它们解决问题.

8.1 幂的运算

1. 同底数幂的乘法

问题 我国首台千万亿次超级计算机系统“天河一号”计算机每秒可进行 2.57×10^{15} 次运算，问它工作 1 h（3.6×10^{3} s）可进行多少次运算？

图 8-1

$$
\begin{aligned}
&2.57\times10^{15}\times3.6\times10^{3}\\
=&2.57\times3.6\times10^{15}\times10^{3}\\
=&?
\end{aligned}
$$

解决这个问题需要研究同底数幂的乘法.

思考

怎样计算 $a^{m}\cdot a^{n}$？

先完成下表：

算　式	运算过程	结　果
$2^{2}\times2^{3}$	$2\times2\times2\times2\times2$	2^{5}
$10^{3}\times10^{4}$		
$a^{2}\cdot a^{3}$		
$a^{4}\cdot a^{5}$		

观察上表，发现同底数幂相乘有什么规律？

一般地，如果字母 m,n 都是正整数，那么

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m个})(\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n个}) \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{(m+n)个} \\ &= a^{m+n}. \end{aligned}$$

由此得幂的运算性质 1：

$$\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}} \ (m,n 都是正整数).$$

同底数幂相乘，底数不变，指数相加.

例 1 计算：

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8$；　　(2) $(-2)^2 \times (-2)^7$；

(3) $a^2 \cdot a^3 \cdot a^6$；　　(4) $(-y)^3 \cdot y^4$.

解 (1) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{5+8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{13}$.

(2) $(-2)^2 \times (-2)^7 = (-2)^{2+7} = (-2)^9 = -2^9$.

(3) $a^2 \cdot a^3 \cdot a^6 = a^{2+3+6} = a^{11}$.

(4) $(-y)^3 \cdot y^4 = -y^3 \cdot y^4 = -y^{3+4} = -y^7$.

练习

1. 下面的计算对不对？如果不对，应怎样改正？

(1) $x^3 + x^3 = x^6$；　(　　　　　　)

(2) $x^3 \cdot x^3 = 2x^3$；　(　　　　　　)

(3) $c \cdot c^3 = c^3$；　(　　　　　　)

(4) $c + c^3 = c^4$.　(　　　　　　)

2. 计算：

(1) $10^5 \times 10^3$；　　(2) $-a^2 \cdot a^5$；

(3) $-x^3 \cdot (-x)^5$；　　(4) $y^8 \cdot (-y)$；

(5) $(-x)^2 \cdot x^3 \cdot (-x)^3$；　　(6) $(-y)^2 \cdot (-y)^3 \cdot (-y)$.

2. 幂的乘方与积的乘方

思考

怎样计算$(a^m)^n$？

先完成下表：

算　式	运算过程	结　果
$(5^2)^3$	$5^2\times5^2\times5^2$	5^6
$(2^3)^2$		
$(a^2)^3$		
$(a^3)^4$		

观察上表，发现幂的乘方有什么规律？

一般地，如果字母 m，n 都是正整数，那么

$$(a^m)^n = \underline{\qquad\qquad}$$
$$= \underline{\qquad\qquad}$$
$$= \underline{\qquad\qquad}.$$

由此得幂的运算性质 2：

$$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}\ (m,n\text{ 都是正整数}).$$

幂的乘方，底数不变，指数相乘.

例 2　计算：

(1) $(10^5)^3$；　　(2) $(x^4)^2$；　　(3) $(-a^2)^3$.

解　(1) $(10^5)^3 = 10^{5\times3} = 10^{15}$.

(2) $(x^4)^2 = x^{4\times2} = x^8$.

(3) $(-a^2)^3 = -a^{2\times3} = -a^6$.

练习

1. 计算：

(1) $(10^6)^3$；　　(2) $(-a^3)^4$；

(3) $-(x^3)^5$；　　(4) $(-y^3)^2$；

(5) $(-a^3)^2\cdot(a^4)^3$；　　(6) $-x^3\cdot(-x^2)^3$.

2. 下面的计算对不对？如果不对，应怎样改正？

(1) $(x^3)^2=x^5$；　　(　　　　)

(2) $x^3\cdot x^2=x^6$；　　(　　　　)

(3) $x^2\cdot x^2\cdot x^2=x^{3+2}$；　　(　　　　)

(4) $x^3\cdot x^2=(x^3)^2=x^{3\times2}$.　　(　　　　)

思考

怎样计算$(ab)^2$，$(ab)^3$，$(ab)^4$？

$(ab)^2=(ab)\cdot(ab)=(aa)\cdot(bb)=a^2b^2$；

$(ab)^3=$ ______ $=$ ______ $=$ ______；

$(ab)^4=$ ______ $=$ ______ $=$ ______.

我们知道两个整数相乘时，它们都是积的因数．类似地，a 和 b 相乘时，a 和 b 叫做积 ab 的因式.

一般地，如果字母 n 是正整数，那么

$(ab)^n=$ ________

$=$ ________

$=$ ________.

由此得幂的运算性质 3：

$$(ab)^n=a^nb^n\ (n\text{ 是正整数}).$$

积的乘方等于各因式乘方的积.

例 3 计算：

(1) $(2x)^4$； (2) $(-3ab^2c^3)^2$.

解 (1) $(2x)^4=2^4\cdot x^4=16x^4$.

(2) $(-3ab^2c^3)^2=(-3)^2\cdot a^2\cdot(b^2)^2\cdot(c^3)^2$

$=9a^2b^4c^6$.

例 4 球的体积公式是 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$（r 为球的半径）. 已知地球半径约为 6.4×10^3 km，求地球的体积（π 取 3.14）.

图 8-2

解
$$\begin{aligned}V&=\frac{4}{3}\pi r^3\\&=\frac{4}{3}\times3.14\times(6.4\times10^3)^3\\&=\frac{4}{3}\times3.14\times6.4^3\times10^9\\&\approx1.1\times10^{12}(\mathrm{km}^3).\end{aligned}$$

因而，地球的体积约为 1.1×10^{12} km^3.

练习

1. 计算：

   (1) $(2\times10^3)^3$； (2) $(-3\times10^4)^2$.

2. 计算：

   (1) $(3m)^2$； (2) $(-2a^3b^2c)^2$.

3. 下面的计算对不对？如果不对，应怎样改正？

   (1) $(a^3b)^3=a^3b^3$； (　　　　　　)

   (2) $(6xy)^2=12x^2y^2$； (　　　　　　)

   (3) $-(3x^3)^2=9x^6$； (　　　　　　)

   (4) $(-2ax^2)^2=-4a^2x^4$. (　　　　　　)

4. 球的表面积公式为 $S=4\pi r^2$. 已知地球半径约为 6.4×10^3 km，求地球的表面积（π 取 3.14）.

3. 同底数幂的除法

思考

怎样计算 $a^m \div a^n$?

先完成下表:

算 式	运算过程	结 果
$3^5 \div 3^2$	$\dfrac{3\times3\times3\times3\times3}{3\times3}$	3^3
$4^6 \div 4^3$		
$a^4 \div a^2$		
$a^5 \div a^3$		

观察上表,发现同底数幂相除有什么规律?

一般地,如果字母 m,n 都是正整数($m>n$),那么

$$a^m \div a^n = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

由此得幂的运算性质 4:

$\boldsymbol{a^m \div a^n = a^{m-n}}$ ($a\neq 0$, m,n 都是正整数,且 $m>n$).

同底数幂相除,底数不变,指数相减.

练习

1. 计算:

(1) $a^{10}\div a^5$;　　(2) $(-xy)^3\div(-xy)$;

(3) $(a-b)^5\div(b-a)^4$;　　(4) $(y^m)^2\div y^m$.

2. 下面的计算对不对？如果不对，应怎样改正？

(1) $a^{10} \div a^{2} = a^{5}$;　　(　　　　)

(2) $x^{5} \div x^{4} = x$;　　(　　　　)

(3) $a^{3} \div a = a^{3}$;　　(　　　　)

(4) $(-b)^{4} \div (-b)^{2} = -b^{2}$;　　(　　　　)

(5) $(-x)^{6} \div (-x) = x^{6}$;　　(　　　　)

(6) $(-y)^{3} \div y^{2} = y$.　　(　　　　)

探究

我们已经得到了当 $m > n$ 时，$a^{m} \div a^{n}(a \neq 0)$ 的运算法则，那么当 $m \leqslant n$ (m, n 都是正整数) 时，$a^{m} \div a^{n}$ ($a \neq 0$) 又如何计算呢？

(1) 当被除式的指数等于除式的指数(即 $m = n$)时，例如，

$$3^{3} \div 3^{3},\ 10^{8} \div 10^{8},\ a^{n} \div a^{n}.$$

容易看出所得的商都是 1. 另一方面，仿照同底数幂的除法性质进行计算，得

$$3^{3} \div 3^{3} = 3^{3-3} = 3^{0},$$

$$10^{8} \div 10^{8} = 10^{8-8} = 10^{0},$$

$$a^{n} \div a^{n} = a^{n-n} = a^{0}.$$

比较两种算法，你有什么发现？

这样就出现了零次幂. 我们约定：

$$\boldsymbol{a^{0} = 1}\ (a \neq 0).$$

任何一个不等于零的数的零次幂都等于 1.

(2) 当被除式的指数小于除式的指数(即 $m < n$)时，

例如，

$$3^2 \div 3^5,\ 10^4 \div 10^8,\ a^m \div a^n.$$

那么可以通过分数约分，得

$$3^2 \div 3^5 = \frac{3^2}{3^5} = \frac{3^2}{3^2 \times 3^3} = \frac{1}{3^3},$$

$$10^4 \div 10^8 = \frac{10^4}{10^8} = \frac{10^4}{10^4 \times 10^4} = \frac{1}{10^4},$$

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} = \frac{1}{a^p} \quad (p = n - m).$$

另一方面，仿照同底数幂的除法性质进行计算，得

$$3^2 \div 3^5 = 3^{2-5} = 3^{-3},$$

$$10^4 \div 10^8 = 10^{4-8} = 10^{-4},$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n} = a^{-p}.$$

正整数次幂的运算性质同样适合于零次幂和负整数次幂.

这样就出现了负整数次幂. 我们约定：

$$\boldsymbol{a^{-p} = \frac{1}{a^p}} \quad (a \neq 0, p \text{ 是正整数}).$$

任何一个不等于零的数的 $-p$（p 是正整数）次幂，等于这个数的 p 次幂的倒数.

有了上述约定，我们再遇到计算 $a^m \div a^n$ 时，就不必限制 $m > n$ 了.

例 5 计算：

(1) $10^6 \div 10^6$；　　(2) $\left(\frac{1}{7}\right)^0 \div \left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$；

(3) $(-2)^3 \div (-2)^5$.

解 (1) $10^6 \div 10^6 = 10^{6-6} = 10^0 = 1$.

(2) $\left(\frac{1}{7}\right)^0 \div \left(\frac{1}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{7}\right)^{0-(-2)} = \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$.

(3) $(-2)^3 \div (-2)^5 = (-2)^{3-5} = (-2)^{-2}$

$$= \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}.$$

练习

1. 计算：

(1) $3^9 \div 3^7$;

(2) $\left(\frac{3}{8}\right)^4 \div \left(\frac{3}{8}\right)^3$;

(3) $\left(-\frac{2}{5}\right)^5 \div \left(-\frac{2}{5}\right)^6$.

2. 计算：

(1) $(-x)^{10} \div (-x)^7$;

(2) $(-m)^5 \div (-m)^9$;

(3) $4^{m+2} \div 4^{m-2}$;

(4) $(xy)^5 \div (-xy)^2$;

(5) $(-2xy)^5 \div (-2xy)^5$.

3. 用分数或小数表示下列各数：

(1) 5^{-3};

(2) 2.1×10^{-4};

(3) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$;

(4) $(-4)^{-3}$.

前面我们学过用科学记数法来表示一些绝对值大于 10 的数，例如，2 280 000 可记作 2.28×10^6. 那么，绝对值小于 1 的数如何表示呢？不难得出

$$0.000\,001 = \frac{1}{1\,000\,000} = \frac{1}{10^6} = 10^{-6},$$

$$-0.000\,43 = \frac{-4.3}{10\,000} = \frac{-4.3}{10^4} = -4.3 \times 10^{-4}.$$

可见，绝对值小于 1 的数可记成 $\pm a \times 10^{-n}$ 的形式，其中 $1 \leqslant a < 10$, n 是正整数，n 等于原数中第一个不等于零的数字前面的零的个数（包括小数点前面的一个零），这种记数方法也是科学记数法.

例 6 用科学记数法表示下列各数：

(1) 0.000 76；　　(2) −0.000 001 59.

解 (1) $0.000\,76 = 7.6 \times 0.000\,1 = 7.6 \times 10^{-4}$.

(2) $-0.000\,001\,59 = -1.59 \times 0.000\,001 = -1.59 \times 10^{-6}$.

用科学记数法表示较大或较小的数，有利于按幂的运算性质简化计算.

练习

1. 用科学记数法表示下列各数：
   0.060 2，$-0.006\ 02$，0.000 060 2，153.8，$-34\ 000$.
2. 水是由氢、氧两种元素组成的，1 个氢原子的质量为 1.674×10^{-27} kg，1 个氧原子的质量为 2.657×10^{-26} kg. 1 个氢原子与 1 个氧原子的质量哪个大？
3. 雷达发出的微波以 3×10^{5} km/s 的速度射向飞机，飞机再将微波反射回来，经 12.6 μs 后雷达站收到反射微波，试问飞机与雷达站的距离是多少千米？（1 μs $=10^{-6}$ s）

（第 3 题）

习题 8.1

1. 计算：
   (1) $a^3\cdot a$；
   (2) $-b\cdot(-b)^2$；
   (3) $3\times3^3-3\times9$；
   (4) $b\cdot b^2\cdot b^3$.
2. 计算：
   (1) $(a^5)^3$；
   (2) $-(a^2)^4$；
   (3) $(-a^3)^3$；
   (4) $(a^2)^3\cdot a^4$；
   (5) $-x\cdot(x^2)^3$；
   (6) $(x^3)^4+(x^4)^3$.
3. 计算：
   (1) $(5a^2)^2$；
   (2) $(-4a^3)^2$；
   (3) $(-2x^2y)^5$；
   (4) $(-3x^2)^3+(2x^3)^2$.
4. 填空：
   (1) $(-a^2)^3\div(-a^2)=$ ________；
   (2) $(ab)^5\div(ab)^3=$ ________；

(3) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \div (-2)^3 \div (-2)^{-2} =$ ________;

(4) ________ $\div (a^2b^3) = a^6b^8$.

5. 选择:

(1) 3^{-2}与3^2的关系是(　　).

(A) 互为相反数　　(B) 互为倒数

(C) 和为零　　(D) 绝对值相等

(2) 下列运算正确的是(　　).

(A) $a^5 \div a^2 = a^3$　　(B) $a \cdot a^3 = a^3$

(C) $(a^2)^3 = a^5$　　(D) $(ab^3)^2 = ab^6$

6. 选择:

(1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2011} \times (1.5)^{2010} \times (-1)^{2010}$的结果是(　　).

(A) $\frac{2}{3}$　　(B) $-\frac{2}{3}$

(C) $\frac{3}{2}$　　(D) $-\frac{3}{2}$

(2) 若 $a = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$, $b = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^0$, $c = 0.75^{-1}$, 则 a, b, c 三个数的大小关系是(　　).

(A) $a > b > c$　　(B) $c > a > b$

(C) $a > c > b$　　(D) $c > b > a$

7. 计算:

(1) $(a^3)^2 \div a^4 \cdot a$;　　(2) $x^6 \div (x^4 \div x^2)$;

(3) $2a^3 + a^6 \div (-a)^3$;　　(4) $(-5a^3)^2 + (-3a^2)^2 \cdot (-a^2)$.

8. 计算:

(1) $\left(-\frac{2}{3}\right)^0 \times 10^{-2}$;　　(2) $\left(\frac{1}{8}\right)^0 \times 4^{-2} \times 2^4$;

(3) $2^{2010} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2010}$;　　(4) $2^{22} \times 25^{11}$.

9. 一微型电子元件的直径约为 50 000 nm,合多少米?(nm 是长度单位,叫做纳米,1 nm $=10^{-9}$ m)

8.2 整式乘法

1. 单项式与单项式相乘

问题❶ 光的速度大约是 3×10^5 km/s，从太阳系以外距离地球最近的一颗恒星（比邻星）发出的光，需要4年才能到达地球，1年以 3×10^7 s计算，试问地球与这颗恒星的距离约为多少千米？

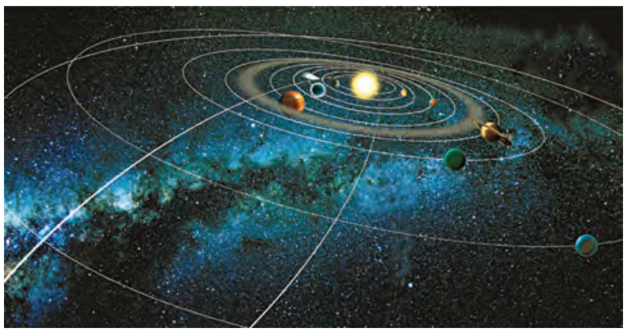


图 8-3

地球与比邻星的距离应是 $(3\times10^5)\times(4\times3\times10^7)$ km. 这个式子应如何计算呢？

$$
\begin{aligned}
&(3\times10^5)\times(4\times3\times10^7)\\
&=4\times3\times3\times10^5\times10^7\\
&=4\times3^2\times10^{12}\\
&=3.6\times10^{13}\text{(km)}.
\end{aligned}
$$

因而，地球与这颗恒星的距离约为 3.6×10^{13} km.

交流

1. 上面的运算应用了哪些性质?

2. 如果把上面算式中的数字换成字母. 例如 $bc^5 \times abc^7$,该如何计算呢?

3. 完成下面计算:

$4x^2y \cdot 3xy^2 = (4 \times 3) \cdot (x^2 \cdot \_\_\_\_) \cdot (y \cdot \_\_\_\_)$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_$;

$5abc \cdot (-3ab)$

$= [5 \times (-3)] \cdot (a \cdot \_\_\_) \cdot (b \cdot \_\_\_) \cdot c$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_$.

从以上的计算过程中,你能归纳出单项式乘法的法则吗?

单项式的乘法法则:

单项式相乘,把系数、同底数幂分别相乘,作为积的因式;对于只在一个单项式里含有的字母,则连同它的指数作为积的一个因式.

例 1 计算:$(-4abc)\left(\frac{1}{2}ab\right)$.

解 $(-4abc)\left(\frac{1}{2}ab\right) = \left(-4 \times \frac{1}{2}\right) \cdot a^2b^2c = -2a^2b^2c$.

练习

1. 计算:

(1) $2x^2 \cdot 3x^3$;

(2) $\frac{2}{5}a^2b^3 \cdot \frac{5}{6}abc$;

(3) $(-2.5x^2) \cdot (-4x)^2$;

(4) $(-4x^2y)(-xy)^2\left(-\frac{1}{2}y^3\right)$.

2. 计算：

(1) $(4\times10^5)\times(5\times10^6)\times(3\times10^4)$；

(2) $2a^2\cdot(-2a)^2+(2a^3)\cdot5a$.

3. 计算 8.1 节中的问题.

4. “勇气”号探测器于北京时间 2004 年 1 月 4 日在火星上成功登陆. “勇气”号探测器是按第二宇宙速度 (11.2 km/s) 飞行了 6 个月后到达火星的，此时，它飞行了多少千米？(1 个月按 30 天计算)

“勇气”号探测器在火星上

(第 4 题)

思考

怎样计算 $15a^4b^3x^2\div3a^2b^3$？

我们知道，计算 $15a^4b^3x^2\div3a^2b^3$，就是要求一个单项式，使它与 $3a^2b^3$ 相乘的积等于 $15a^4b^3x^2$.

因为 $(5a^2x^2)\cdot(3a^2b^3)=15a^4b^3x^2$，

所以 $15a^4b^3x^2\div3a^2b^3=5a^2x^2$.

分析所得式子，能得到什么规律？

单项式相除，把系数、同底数幂分别相除，作为商的因式；对于只在被除式里含有的字母，则连同它的指数作为商的一个因式.

例 2 计算：

(1) $32x^5y^3\div8x^3y$；　　(2) $-7a^8b^4c^2\div49a^7b^4$.

解 (1) $32x^5y^3\div8x^3y$

$=(32\div8)x^{5-3}y^{3-1}$

$=4x^2y^2$.

$$
\begin{aligned}
(2)\quad & -7a^8b^4c^2 \div 49a^7b^4 \\
&= [(-7)\div 49]a^{8-7}b^{4-4}c^2 \\
&= -\frac{1}{7}ac^2.
\end{aligned}
$$

例 3 “卡西尼”号土星探测器历经 7 年多、行程约 3.5×10^9 km 后进入环绕土星运行的轨道.

图 8-4

(1) 它的这一行程相当于地球赤道多少圈?(已知地球半径约 6.4×10^3 km, π 取 3.14)

(2) 这一行程如果由速度是 100 km/h 的汽车来完成,需要行驶多少年?(1 年按 365 天计算)

(3) 这一行程如果由速度是 10 m/s 的短跑飞人来完成,需要跑多少年?

解 (1) $3.5\times10^9\div(2\times3.14\times6.4\times10^3)$

$\approx 8.7\times10^4$(圈).

探测器的行程相当于地球赤道约 87 000 圈.

(2) $3.5\times10^9\div(365\times24\times100)\approx4.0\times10^3$(年).

探测器的行程相当于由速度为 100 km/h 的汽车行驶约 4 000 年.

(3) $3.5\times10^9\div(365\times24\times3.6\times10^3\times10\times10^{-3})$

$\approx 1.1\times10^4$(年).

探测器的行程相当于由速度为 10 m/s 的短跑飞人跑约 11 000 年.

你还能用什么方法,让人感受到 3.5×10^9 km 的长度?

练习

计算:

(1) $15ab^3\div(-5ab)$;

(2) $-10a^2b^3\div6ab^2$;

(3) $6a^2b\div3ab$;

(4) $(9\times10^8)\div(3\times10^5)$.

2. 单项式与多项式相乘

问题❷　一个施工队修筑一条路面宽为 n m 的公路，第一天修筑 a m 长，第二天修筑 b m 长，第三天修筑 c m 长，3 天共修筑路面的面积是多少？

图　8-5

先按题意画图 8－6，结合图形考虑有几种计算方法？

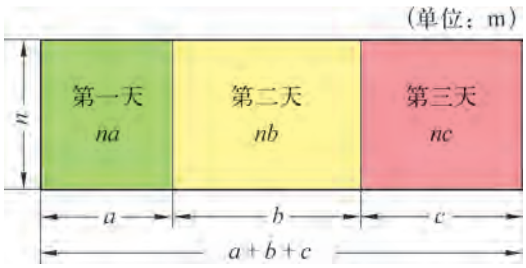


图　8-6

方法一：3 天共修筑路面的总长为 $(a+b+c)$ m，因为路面的宽为 n m，所以 3 天共修筑路面__________ m^2.

方法二：先分别计算每天修筑路面的面积，然后相加，则 3 天共修筑路面__________ m^2.

因此，有

__________ = __________.

事实上，因为代数式中的字母都表示数，因此，根据乘法分配律，可得到

$$n(a+b+c)=na+nb+nc.$$

运用乘法分配律，把单项式与多项式的相乘转化为单项式与单项式的相乘.

单项式与多项式的乘法法则：

单项式与多项式相乘，用单项式和多项式的每一项分别相乘，再把所得的积相加.

例 4　计算：

(1) $(-2x)(x^2-x+1)$；

(2) $a(a^2+a)-a^2(a-2)$.

解 (1) $(-2x)(x^2-x+1)$

$=(-2x)x^2+(-2x)\cdot(-x)+(-2x)\cdot 1$

$=-2x^3+2x^2-2x$.

(2) $a(a^2+a)-a^2(a-2)$

$=a\cdot a^2+a\cdot a-a^2\cdot a+2a^2$

$=a^3+a^2-a^3+2a^2$

$=3a^2$.

练习

1. 计算：

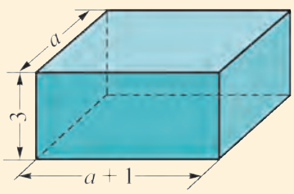
(1) $5x\cdot(3x+4)$；　　(2) $\left(5a^2-\frac{4}{3}a+1\right)(-3a)$.

2. 化简：

(1) $x(x^2+3)+x^2(x-3)-3x(x^2-x-1)$；

(2) $(-a)\cdot(-2ab)+3a\cdot\left(ab-\frac{1}{3}b-1\right)$.

3. 某长方体的长为 $a+1$，宽为 a，高为 3，问这个长方体的体积是多少？



（第 3 题）

思考

如何计算 $(a+b-c)\div m$？

根据 $a\div b=a\times\frac{1}{b}$，可把除法转化为乘法，由此得到

$(a+b-c)\div m$

$=(a+b-c)\times\frac{1}{m}$

$$= a \times \frac{1}{m} + b \times \frac{1}{m} - c \times \frac{1}{m}$$

$$= a \div m + b \div m - c \div m.$$

多项式除以单项式,先把这个多项式的每一项除以这个单项式,再把所得的商相加.

例 5 计算:

(1) $(20a^2 - 4a) \div 4a$;

(2) $(24x^2y - 12xy^2 + 8xy) \div (-6xy)$;

(3) $[6xy^2(x^2 - 3xy) + (-3xy)^2] \div 3x^2y^2$.

解 (1) $(20a^2 - 4a) \div 4a$

$= 20a^2 \div 4a - 4a \div 4a$

$= 5a - 1.$

(2) $(24x^2y - 12xy^2 + 8xy) \div (-6xy)$

$= 24x^2y \div (-6xy) - 12xy^2 \div (-6xy)$

$\quad + 8xy \div (-6xy)$

$= -4x + 2y - \frac{4}{3}.$

(3) $[6xy^2(x^2 - 3xy) + (-3xy)^2] \div 3x^2y^2$

$= [6x^3y^2 - 18x^2y^3 + 9x^2y^2] \div 3x^2y^2$

$= 2x - 6y + 3.$

练习

计算:

(1) $(6a^2b + 3a) \div a$;

(2) $(4x^3y^2 - x^2y^2) \div (-2x^2y)$;

(3) $(20m^4n^3 - 12m^3n^2 + 3m^2n) \div (-4m^2n)$;

(4) $[15(a + b)^3 - 9(a + b)^2] \div 3(a + b)^2$.

3. 多项式与多项式相乘

问题❸　一块长方形的菜地，长为 a，宽为 m. 现将它的长增加 b，宽增加 n，求扩大后的菜地面积.

先按题意画图 8－7，结合图形考虑有几种计算方法？

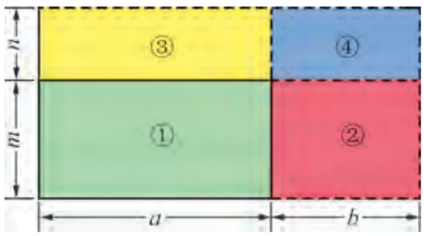


图　8－7

方法一：扩大后菜地的长是 $a+b$，宽是 $m+n$，所以它的面积是________________.

方法二：先算 4 块小长方形的面积，再求总面积，扩大后菜地的面积是________________.

因此，有

$$(a+b)(m+n)=am+bm+an+bn.$$

上面的运算还可以把 $(a+b)$ 看作一个整体运用分配律，再根据单项式与多项式的乘法法则，得

$$\begin{aligned}(a+b)(m+n)&=(a+b)m+(a+b)n\\&=am+bm+an+bn.\end{aligned}$$

$$(a+b)(m+n)=am+bm+an+bn.$$

多项式与多项式的乘法法则：

多项式与多项式相乘，先用一个多项式的每一项与另一个多项式的每一项相乘，再把所得的积相加.

把 $(a+b)$ 看作一个整体，$(a+b)$ 与 $(m+n)$ 的相乘就转化为单项式与多项式的相乘.

这两个多项式叫做所得积的因式.

例 6 计算：

(1) $(-2x-1)(3x-2)$； (2) $(ax+b)(cx+d)$.

解 (1)

$$
\begin{aligned}
&(-2x-1)(3x-2)\\
&=(-2x)\cdot 3x+(-2x)\cdot(-2)+(-1)\cdot 3x\\
&\quad+(-1)\times(-2)\\
&=-6x^2+4x-3x+2\\
&=-6x^2+x+2.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&(ax+b)(cx+d)\\
&=ax\cdot cx+ax\cdot d+b\cdot cx+bd\\
&=acx^2+(ad+bc)x+bd.
\end{aligned}
$$

例 7 计算：

(1) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$； (2) $(y^2+y+1)(y+2)$.

解 (1)

$$
\begin{aligned}
&(a+b)(a^2-ab+b^2)\\
&=a\cdot a^2-a\cdot ab+a\cdot b^2+b\cdot a^2\\
&\quad-b\cdot ab+b\cdot b^2\\
&=a^3+b^3.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&(y^2+y+1)(y+2)\\
&=y^3+2y^2+y^2+2y+y+2\\
&=y^3+3y^2+3y+2.
\end{aligned}
$$

练习

1. 计算：

   (1) $(2n+6)(n-3)$； (2) $(3x-y)(3x+y)$.

2. 计算：

   (1) $(3a-2)(a-1)+(a+1)(a+2)$；

   (2) $(3a+2)(3a-2)-9a(a-1)$.

3. 计算：

   (1) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$； (2) $(x+1)(x^2-2x+3)$.

习题 8.2

1. 计算：

(1) $(-5a^2b)(2ab^2c)$；

(2) $\left(-\frac{3}{4}ax\right)\left(-\frac{2}{3}bx^3\right)$；

(3) $(2\times10^4)(6\times10^5)$；

(4) $\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot2x^3\cdot(-3x^2)$.

2. 计算：

(1) $(mn)^2(-m^2n)$；

(2) $(2m)^3\left(-\frac{1}{4}m\right)^2$；

(3) $x^2y^3-2x(4xy^3)$；

(4) $(3m^2n)\cdot\left(\frac{2}{3}m^2n^2\right)-(-10m)\cdot m^3n^3$.

3. 在 1 km^2 的土地上，一年内所得到的太阳能相当于燃烧 1.3×10^5 kg 煤所产生的能量. 我国陆地面积约为 9.6×10^6 km^2，求我国陆地一年内得到的太阳能相当于燃烧多少千克煤所产生的能量.

4. 计算：

(1) $(3y-6)(-y)$；

(2) $(-3x)\left(4x^2-\frac{4}{3}x+1\right)$；

(3) $(-xy)(2x-5y-1)$；

(4) $(4y-1)(y-5)$；

(5) $(2x+3)(4x+1)$；

(6) $\left(\frac{3}{4}x+1\right)\left(\frac{2}{3}x-3\right)$.

5. 化简：

(1) $5x(2x+4)+x(x-1)$；

(2) $2a(a^2+3a-2)-2(a^3+2a^2-a+1)$.

6. 计算：

(1) $12a^3b^2\div(-4a^2)$；

(2) $(-3x^2y)^2\div3x^4y^2$.

7. 计算：

(1) $(16m^2-24mn)\div 8m$；

(2) $(9x^2y-6xy^2)\div(-3xy)$.

8. 计算：

(1) $(25x^2-10xy+15x)\div 5x$；

(2) $(4a^3-12a^2b-2ab^2)\div(-4a)$.

9. 据调查，我国每年消费一次性筷子约 450 亿双，耗费木材 $1.66\times10^6\ \mathrm{m}^3$，假如一棵生长了 20 年的大树相当于 $1\ \mathrm{m}^3$ 的木材，则：

(1) $1\ \mathrm{m}^3$ 木材能生产多少双一次性筷子？

(2) 我国每年消费一次性筷子所消耗的木材要砍伐多少棵生长了 20 年的大树？

10. 先化简，再求值：

(1) $a(b-c)-b(c-a)+c(a-b)$，其中 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=-1$，$c=-2$；

(2) $(x-y)(x-2y)-(3x-2y)(x-3y)$，其中 $x=4$，$y=-1$.

11. 解方程：

(1) $(x-3)(x-2)+18=(x+9)(x+1)$；

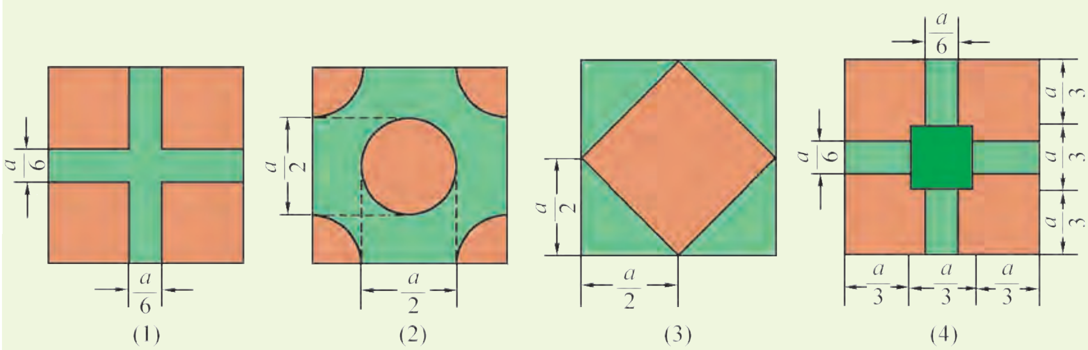
(2) $(x-6)(x^2+x+1)-x(x+1)(x-1)=x(2-5x)$.

12. 计算：

(1) $(x+1)(x^2-x+1)$；

(2) $(3x+1)(x^2-2x+3)$.

13. 在一个边长为 a 的正方形地块上，辟出一部分作为花坛，下面给出几种设计方案，请你分别写出花坛（图中绿色部分）面积 S 的表达式，并计算当 $a=10$ 时面积 S 的值.



（第 13 题）

数学活动

求最大乘积

1. 将数字 1，2，3，4，5 组成一个 3 位数和一个 2 位数，每个数字仅用一次. 怎样分这 5 个数字，使组成的两个数的乘积最大？

2. 请你任选 5 个不同的数字，按问题 1 的要求，组成一个 3 位数和一个 2 位数，使这两个数的乘积最大（试验时可借助计算器）.

3. （1）根据问题 1 和问题 2，猜想合乎要求的 3 位数和 2 位数的特点；

（2）若这 5 个数字分别为 a，b，c，d，e，且有 $a>b>c>d>e$ $(e\neq 0)$，根据你的猜想写出这两个 3 位数和 2 位数.

4. 将第 1 题和第 2 题中的结果改为使乘积最小，求所组成的两个数.

8.3 完全平方公式与平方差公式

由多项式乘法可得乘法公式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2. \quad ①$$

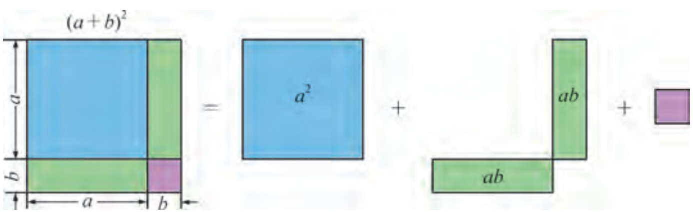
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2. \quad ②$$

上面两个公式，今后可以直接应用于运算，称为**完全平方公式**(formula for the square of the sum).

完全平方公式用语言叙述是：**两个数的和(或差)的平方，等于这两个数的平方和加(或减)这两个数乘积的2倍.**

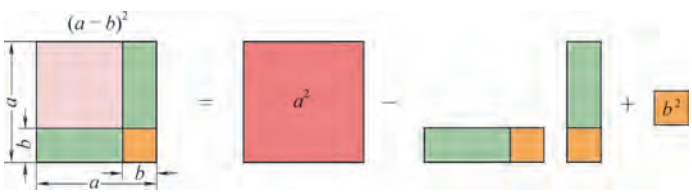
观察

完全平方公式，除直接由乘法得到，你还可通过图形面积割补的方法得到吗(图8－8)?



$(a+b)^2=a^2+2ab+(\qquad)$

(1)



$(a-b)^2=a^2-(\qquad)+b^2$

(2)

图 8-8

这两个公式中的②式也可在①式中用 $-b$ 代替 b 而得出.

例 1　利用乘法公式计算：

(1) $(2x+y)^2$；　　　　(2) $(3a-2b)^2$.

解　运用公式计算，要先识别 a,b 在具体式子中分别表示什么.

$$(1)\ (2x+y)^2 = (2x)^2 + 2\cdot(2x)y + y^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

$$= 4x^2 + 4xy + y^2.$$

$$(2)\ (3a-2b)^2 = (3a)^2 - 2\cdot(3a)(2b) + (2b)^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$$

$$= 9a^2 - 12ab + 4b^2.$$

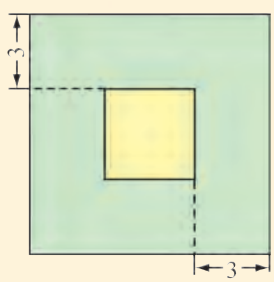
练习

1. 利用乘法公式计算：

(1) $(3x+1)^2$；　　　　(2) $(a-3b)^2$；

(3) $\left(2x+\dfrac{y}{2}\right)^2$；　　　　(4) $(-2x+3y)^2$.

2. 如图，是一张正方形的纸片，如果把它沿着各边都剪去 3 cm 宽的一条，那么所得小正方形的面积比原正方形的面积减少 84 cm^2，求原正方形的边长.



(第 2 题)

思考

1. 由多项式乘法计算：

(1) $(3m+1)(3m-1)$；(2) $(x^2+y)(x^2-y)$.

2. 你能得到 $(a+b)(a-b)$ 的计算公式吗？

这个公式称为**平方差公式**(formula for the difference of squares)，用语言如何表述？

3. 你能设计一个图形来说明上面公式吗？

例 2 利用乘法公式计算：

(1) $1\,999\times 2\,001$； (2) $(x+3)(x-3)(x^2+9)$.

解 (1)
$$\begin{aligned}&1\,999\times 2\,001\\ =&(2\,000-1)\times(2\,000+1)\\ =&2\,000^2-1^2\\ =&3\,999\,999.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(x+3)(x-3)(x^2+9)\\ =&(x^2-9)(x^2+9)\\ =&x^4-81.\end{aligned}$$

练习

1. 利用乘法公式计算：

(1) $(2a+5b)(2a-5b)$； (2) $\left(\frac{1}{2}x-3\right)\left(\frac{1}{2}x+3\right)$；

(3) $(y-2x)(-2x-y)$； (4) $(xy+1)(xy-1)$.

2. 利用乘法公式计算：

(1) 598×602； (2) 999^2.

例3 计算：

(1) $(a+b+c)^2$； (2) $(a-b)^3$.

解 (1) $(a+b+c)^2$

$=[(a+b)+c]^2$

$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$

(2) $(a-b)^3$

$=(a-b)(a-b)^2$

$=(a-b)(a^2-2ab+b^2)$

$=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3$

$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$

练习

1. 计算：

(1) $(a+b)^3$； (2) $(x-5)^3$.

2. 计算：

$(a-b-c)^2$.

习题 8.3

1. 计算：

(1) $\left(4x+\frac{1}{2}\right)^2$； (2) $\left(\frac{1}{4}m-2n\right)^2$.

2. 计算：

(1) $(2m+3n)(2m-3n)$；

(2) $\left(-3a-\frac{1}{2}b\right)\left(-3a+\frac{1}{2}b\right)$；

(3) $(-4x+y)(y+4x)$；

(4) $(x+y)(x-y)+(y-z)(y+z)-(x+z)(x-z)$.

3. 计算：

(1) $(y+3)^2(3-y)^2$；

(2) $(2a+b+1)(2a+b-1)$；

(3) $(a-2b-3)(a+2b+3)$.

4. 先化简，再求值：

$(5y+1)(5y-1)-(5y+25y^2)$，其中 $y=\frac{2}{5}$.

5. 解方程：

(1) $\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$；

(2) $(x+1)(x-1)-(x+2)^2=7$.

6. 解不等式：

$2(x+4)(x-4)<(x-2)(2x+5)$.

7. 填空：

(1) $[(\quad)+(\quad)]^2=4x^2+(\quad)+9y^2$；

(2) $[x+(\quad)][x+(\quad)]=x^2+(\quad)+6$；

(3) $x^2+3x+(\quad)=(x+\quad)^2$.

8. 如果多项式 $4x^2+1$ 加上一个单项式后能成为一个多项式的完全平方，那么这个单项式是什么？

9. 计算：

(1) $(2x+3)^3$； (2) $(2a-b-3c)^2$.

10. 已知 $a+b+c=0$，$a^2+b^2+c^2=3$，求 $ab+bc+ca$ 的值.

11. 一个圆的半径为 r cm，若半径减少 2 cm，那么这个圆的面积减少多少？

8.4 因式分解

在小学，我们学过整数的因数分解，例如，

$$6=2\times3,$$
$$30=2\times3\times5.$$

类似地，在整式中，也可以把一个多项式化成几个因式乘积的形式，例如，

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2,$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$
$$na+nb+nc=n(a+b+c).$$

像这样，把一个多项式化为几个整式的积的形式，叫做**因式分解**(factorization)，也叫做把这个多项式分解因式.

观察

下列整式乘法与因式分解之间有什么关系？

(1) $m(a+b+c)=ma+mb+mc$,

$ma+mb+mc=m(a+b+c)$;

(2) $(a-7)^2=a^2-14a+49$,

$a^2-14a+49=(a-7)^2$;

(3) $(x+3)(x-3)=x^2-9$,

$x^2-9=(x+3)(x-3)$.

下面介绍因式分解的两种基本方法.

1. 提公因式法

由 $m(a+b+c)=ma+mb+mc$，可得

$$ma+mb+mc=m(a+b+c).$$

我们来分析一下 $ma+mb+mc$ 的特点：它的每一项都含有一个相同因式 m，m 叫做各项的**公因式**(common factor). 如果把这个公因式提到括号外面，这样 $ma+mb+mc$ 就分解成两个因式的积 $m(a+b+c)$，即

$$ma+mb+mc=m(a+b+c).$$

这种因式分解的方法叫做**提公因式法**.

例 1 把下列各式分解因式：

(1) $4m^2-8mn$；(2) $3ax^2-6axy+3a$.

解 (1) $4m^2-8mn$

$=4m\cdot m-4m\cdot 2n$

$=4m(m-2n)$.

(2) $3ax^2-6axy+3a$

$=3a\cdot x^2-3a\cdot 2xy+3a\cdot 1$

$=3a(x^2-2xy+1)$.

最后一项 $3a$ 提取后还有因数 1.

例 2 把下列各式分解因式：

(1) $2x(b+c)-3y(b+c)$；(2) $3n(x-2)+(2-x)$.

解 (1) $2x(b+c)-3y(b+c)$

$=(b+c)(2x-3y)$.

(2) $3n(x-2)+(2-x)$

$=3n(x-2)-(x-2)$

$=(x-2)(3n-1)$.

$2-x$ 与 $x-2$ 有什么关系？

练习

1. 填空：

(1) $6x^3-18x^2=$ ____ $(x-3)$；　　(2) $-7a^2+21a=-7a($ ______ $)$.

2. 把下列各式分解因式：

(1) $np-nq$；　　(2) $-x^3y-x^2y^2+xy$.

3. 把下列各式分解因式：

(1) $3(a+b)^2+6(a+b)$；　　(2) $m(a-b)-n(a-b)$；

(3) $6(x-y)^3-3y(y-x)^2$；　　(4) $mn(m-n)-m(n-m)^2$.

2. 公式法

运用公式(完全平方公式和平方差公式)进行因式分解的方法叫做**公式法**.

例 3 把下列各式分解因式：

(1) $x^2+14x+49$；　　(2) $9a^2-30ab+25b^2$；

(3) x^2-81；　　(4) $36a^2-25b^2$.

解 (1)
$$\begin{aligned} & x^2+14x+49 \\ =& x^2+2\cdot x\cdot 7+7^2 \\ =& (x+7)^2. \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} & 9a^2-30ab+25b^2 \\ =& (3a)^2-2\times 3a\times 5b+(5b)^2 \\ =& (3a-5b)^2. \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} & x^2-81 \\ =& x^2-9^2 \\ =& (x+9)(x-9). \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} & 36a^2-25b^2 \\ =& (6a)^2-(5b)^2 \\ =& (6a+5b)(6a-5b). \end{aligned}$$

练习

1. 把下列各式写成完全平方的形式：

(1) $0.81x^2 = (\qquad)^2$；　　(2) $\frac{16}{25}m^2n^4 = (\qquad)^2$；

(3) $y^2 - 8y + 16 = (\qquad)^2$；　　(4) $x^2 + x + \frac{1}{4} = (\qquad)^2$.

2. 把下列各式分解因式：

(1) $x^2 + 2x + 1$；　　(2) $y^2 - 4$；　　(3) $1 - 6y + 9y^2$；

(4) $1 - 36n^2$；　　(5) $9n^2 + 64m^2 - 48mn$；　　(6) $-16 + a^2b^2$.

在因式分解的过程中，有时提取公因式与利用公式两种方法要同时使用.

例 4　把下列多项式分解因式：

(1) $ab^2 - ac^2$；

(2) $3ax^2 + 24axy + 48ay^2$.

解　(1)

$$\begin{aligned} & ab^2 - ac^2 \\ = {} & a(b^2 - c^2) \quad \text{（提取公因式）} \\ = {} & a(b + c)(b - c). \quad \text{（用平方差公式）} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & 3ax^2 + 24axy + 48ay^2 \\ = {} & 3a(x^2 + 8xy + 16y^2) \quad \text{（提取公因式）} \\ = {} & 3a(x + 4y)^2. \quad \text{（用完全平方公式）} \end{aligned}$$

练习

把下列多项式分解因式：

(1) $2x^3 - 32x$；　　(2) $9a^3b^3 - ab$；　　(3) $mx^2 - 8mx + 16m$；

(4) $-x^4 + 256$；　　(5) $-a + 2a^2 - a^3$；　　(6) $27x^2y^2 - 18x^2y + 3x^2$.

例 5 把下列各式分解因式：

(1) $x^2-y^2+ax+ay$；

(2) $a^2+2ab+b^2-c^2$.

分析：在(1)式中，把第一、二项作为一组，可以用平方差公式分解因式，其中一个因式是 $(x+y)$；把第三、四项作为另一组，在提取公因式 a 后，另一个因式也是 $(x+y)$；在(2)式中，把前三项作为一组，它是一个完全平方式 $(a+b)^2$；把第四项 $-c^2$ 作为另一组，那么 $(a+b)^2-c^2$ 是平方差形式的多项式，可再次利用公式分解因式.

解 (1)
$$\begin{aligned} & x^2-y^2+ax+ay \\ =\ & (x^2-y^2)+(ax+ay) \\ =\ & (x+y)(x-y)+a(x+y) \\ =\ & (x+y)(x-y+a). \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} & a^2+2ab+b^2-c^2 \\ =\ & (a^2+2ab+b^2)-c^2 \\ =\ & (a+b)^2-c^2 \\ =\ & (a+b+c)(a+b-c). \end{aligned}$$

从本例可以看出，因式分解有时需先分组，分组后利用提取公因式或运用公式进行分解.

练习

把下列各式分解因式：

(1) $4a^2-b^2+4a-2b$；

(2) $x^2-2xy+y^2-1$；

(3) $9x^2+6x+2y-y^2$；

(4) $x^2-y^2+a^2-b^2+2ax+2by$.

习题 8.4

1. 把下列各式分解因式：

(1) $ax-ay+az$；

(2) $6a^2b-15ab^2+30a^2b^2$；

(3) $10a(x-y)^2-5b(y-x)$；

(4) $x(a-x)(a-y)-y(x-a)(y-a)$.

2. 速算：

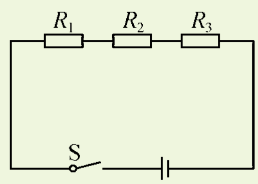
(1) $3.14\times7.5+3.14\times2.5$；

(2) $4.298\times3.256-3.256\times3.298$；

(3) $1\,004^2-996^2$；

(4) $65^2+2\times35\times65+35^2$.

3. 某串联电路中电流 I(单位 A)、电阻 R_1,R_2,R_3(单位 Ω)与电压 U(单位 V)有下列关系：$U=IR_1+IR_2+IR_3$. 当 $R_1=21.3$,$R_2=42.5$,$R_3=16.2$,$I=1.25$ 时，求 U 的值.



(第 3 题)

4. 把下列各式分解因式：

(1) $x^2-6ax+9a^2$；　(2) $4x^2-100$；

(3) $25m^2-80m+64$；　(4) $0.49x^2-144y^2$.

5. 把下列各式分解因式：

(1) y^4-y^2；　(2) $3ax^2-3ay^2$；

(3) $4x^3-8x^2+4x$；　(4) $a^2-2a(b+c)+(b+c)^2$.

阅读与欣赏

巧用因式分解

1729 年 12 月 1 日，22 岁的数学家欧拉(L. Euler)收到另一位数学家哥德巴赫(C. Goldbach)寄来的一封信，信中有这么一

段话：

“你知道费马(P. Fermat)在一本书注中提出的一个素数表达式吗？这就是‘一切形如 $2^{2^{n-1}}+1$ (n 是正整数)的数都是素数’.据我所知，他过世已半个世纪了，迄今还没有人能证明它，你是否相信这个结论？”

图 8-9　欧拉

原来，费马在作出上述结论前，曾作过如下验算：

当 $n=1$ 时，

$$2^{2^{n-1}}+1=2^{2^0}+1=2+1=3;$$

当 $n=2$ 时，

$$2^{2^{n-1}}+1=2^2+1=5;$$

当 $n=3$ 时，

$$2^{2^{n-1}}+1=2^{2^2}+1=2^4+1=17;$$

当 $n=4$ 时，

$$2^{2^{n-1}}+1=2^{2^3}+1=2^8+1=257;$$

当 $n=5$ 时，

$$2^{2^{n-1}}+1=2^{2^4}+1=2^{16}+1=65\,537.$$

其结果都是素数，但是 n 取任何正整数时情况又会怎样呢？费马猜想，可能也是素数.

欧拉收到哥德巴赫的来信后，进行了认真思考. 由于当时没有计算机，大于 5 的任一自然数代入验算都是很繁琐的，欧拉对 $n=6$ 时的计算可谓“巧夺天工”. 请看：

当 $n=6$ 时，

$$\begin{aligned}&2^{2^{n-1}}+1\\=&2^{2^5}+1\\=&2^{32}+1\\=&(2\times2^7)^4+1\\=&2^4\times128^4+1\\=&(1+15)\times128^4+1\\=&[1+5\times(128-125)]\times128^4+1\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1+5\times128)\times128^4+1-5^4\times128^4 \\
&= (1+5\times128)\times128^4+(1+5^2\times128^2)(1+ \\
&\quad 5\times128)(1-5\times128) \\
&= (1+5\times128)[128^4+(1+5^2\times128^2)(1-5\times128)] \\
&= 641\times6\ 700\ 417.
\end{aligned}
$$

这里,欧拉用因式分解解决了一个历史悬案——形如 $2^{2^{n-1}}+1$ (n 为正整数)的数不一定是素数,从而推翻了费马的猜想.此后,人们把一切形如 $2^{2^{n-1}}+1$ (n 为正整数)的数称为"费马数",数学家们随后又发现了 45 个费马数是合数.除了费马算出的前 5 个之外,目前还没有一个费马数被证明是素数;这些费马数的因子分解是当今数论的热门研究问题,因此在保密通信中有应用.但这种形式的费马数中究竟有几个素数、几个合数,至今仍是一个诱人的谜.

费马猜想是根据几个特殊值计算归纳得出的,这种归纳推理方法是科学研究中常用的思想方法,这个方法对于发现规律、猜想未知十分重要.但是由它得到的结论不一定正确,还须进一步得到证明.

8.5 综合与实践

纳米材料的奇异特性

前面，我们已经学过长度单位——纳米（1 nm = 10^{-9} m），下面我们对纳米材料的一些特性做简单的介绍.

纳米材料是用结构尺寸在 1 ~ 100 nm 范围内的纳米颗粒制成的，它有许多奇异的特性. 例如，常规银块熔点约 900℃，而银纳米颗粒在 100℃时即熔化，纳米颗粒结合成常规材料时的烧结温度也明显降低. 一些高温陶瓷的制造，因烧结温度显著降低，大大降低了制造工艺难度和制造成本. 由纳米颗粒烧结的陶瓷，还具有很好的韧性，纳米二氧化钛陶瓷在室温下可以弯曲，塑性形变高达 100%，纳米陶瓷是不容易摔碎的.

形成纳米材料这些奇异特性的原因是纳米材料颗粒的表面积之和与同体积的常规材料相比成倍增长，从而使得位于颗粒表面的活性很强的原子数占总原子数的比例也随之成倍上升. 下面我们对一个正方体进行 $n \times n \times n$ 细分，探究细分后表面积的变化情况.

问题1 在图 8－10 中，分别将边长为 1 cm 的正方体，切割成 $2 \times 2 \times 2$ 个边长为 0.5 cm 和 $5 \times 5 \times 5$ 个边长为 0.2 cm的小正方体，在图中画出切割线. 对这两种分割，分别求各小正方体的表面积之和与原正方体的表面积之比.

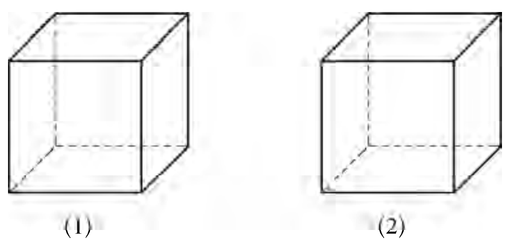


图 8－10

问题② 将一个边长为 1 cm 的正方体，切割成 $n \times n \times n$ 个边长为 $\frac{1}{n}$ cm 的小正方体，求各小正方体的表面积之和与原正方体的表面积之比.

问题③ 说出当 $n = 10^7$（即小正方体边长为 1 nm）时，各小正方体的表面积之和与原正方体的表面积之比.

请估计，随着 n 值的增大，小正方体边长的缩小，各小正方体的表面积之和与原正方体的表面积之比的变化趋势.

问题④ 将问题 2 中的正方体边长改为 a cm，结果如何？

纳米材料具有的独特性质，带来了奇妙的应用前景，工程技术人员已经制成了直径只有 1 ~ 2 nm 的纳米发动机，只有米粒大小却能运转的汽车，只有黄蜂大小却能升空的直升机，质量在 0.1 kg 以下的纳米卫星……纳米技术的研究和开发将引发一场新的工业革命.

数学史话

杨 辉 三 角

1261年，我国宋代数学家杨辉写了一本书——《详解九章算法》，书中记载了一个用数字排成的三角形，如图 8－11. 这个数字三角形原名“开方作法本源图”，是1050 ~ 1100年间北宋人贾宪做的. 后来，我们就把这种数字三角形叫做贾宪三角或杨辉三角.

图 8-11

杨辉三角实际是二项式乘方展开式的系数表，如图 8－12.

观察图 8－12 右侧的系数表，你发现了什么规律？你能写出 $(a+b)^7$，$(a+b)^8$，…展开式的各项系数吗？

在世界各地，继贾宪之后有不少人都发现了这个三角表，其中，法国数学家帕斯卡（B. Pascal）发现这个表后，把它应用于数学的许多方面，并取得了成果，国外把这个三角表叫做帕斯卡三角.

$(a+b)^0=$ 1 -- 1

$(a+b)^1=$ $a+b$ -- 1 1

$(a+b)^2=$ $a^2+2ab+b^2$ --------------------------------------- 1 2 1

$(a+b)^3=$ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ -------------------------------- 1 3 3 1

$(a+b)^4=$ $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ ---------------------------- 1 4 6 4 1

$(a+b)^5=$ $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$ ------------------ 1 5 10 10 5 1

$(a+b)^6=$ $a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$ ----------- 1 6 15 20 15 6 1

图 8-12

小结·评价

一、内容整理

二、主要知识回顾

1. 幂的运算性质：

(1) $a^m\cdot a^n=$ ________ (m,n 都是正整数)；

(2) $(a^m)^n=$ ________ (m,n 都是正整数)；

(3) $(ab)^n=$ ________ (n 是正整数)；

(4) $a^m\div a^n=$ ________ ($a\neq 0$, m,n 都是正整数).

2. 学习整式的乘法，掌握单项式乘法的法则是关键，而单项式乘法是以同底数幂的乘法的性质为依据的.

3. 乘法公式：

(1) $(a \pm b)^2 =$ ________；

(2) $(a+b)(a-b) =$ ________.

4. 在 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0$，m, n 都是正整数)中，当 $m = n$ 时，规定 $a^0 =$ ________；当 $m < n$ 时，如 $m - n = -p$ (p 是正整数)，则规定 $a^{-p} =$ ________.

5. 因式分解最基本方法是提公因式法和公式法.

三、自评与互评

1. 整式乘法与因式分解有什么关系？怎样检验因式分解是否正确？

2. 总结一下因式分解的方法与步骤，并与同伴交流.

3. 科学记数法，分别在七年级上册“有理数”一章和本章学习，为什么分这两次学习？

4. 两个正数相乘，常可看作某种图形的面积，结合本章学习举出一些用图形表示某些等式的例子.

A组 复习题

1. 填空：

(1) $(-3abc)(-8abd) =$ ________；

(2) $(-2m^2n^3)^3 =$ ________；

(3) $\left(-\frac{1}{5}ab\right)(-10a+5b) =$ ________；

(4) $2x\left(x^2 - \frac{1}{2}x + 4\right) =$ ________；

(5) $(x+1)(x+3) =$ ________.

2. 计算：

(1) $(2a-1)(a-4) - (a+3)(a-1)$；

(2) $t^2 - (t+1)(t-5)$；

(3) $(x+1)(x^2+x+1)$;

(4) $(2x+3)(x^2-x+1)$.

3. 计算：

(1) $\left(\frac{1}{3}x-y\right)^2+\left(\frac{1}{3}x+y\right)^2$;

(2) $\left(x+2y-\frac{1}{2}\right)\left(x-2y+\frac{1}{2}\right)$;

(3) $(a+1)^2(a-1)^2-(a+2)^2(a-2)^2$;

(4) $\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x^2+\frac{1}{9}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$.

4. 计算：

(1) $8x^2y^2z\div(-4xy^2z)$;

(2) $(2xy)^3\div(4x^2y)\left(\frac{1}{4}xy\right)$;

(3) $(4x^2-xy)\div\left(-\frac{1}{2}x\right)$;

(4) $[y(x-y)+x(x+y)-x^2]\div(-y)$.

5. 先化简，再求值：

(1) $2x(x^2-x+1)-x(2x^2+2x-3)$，其中 $x=-\frac{1}{2}$;

(2) $\left(2x-\frac{1}{2}y\right)\left(2x+\frac{1}{2}y\right)-\left(2x-\frac{1}{2}y\right)^2$，其中 $x=\frac{1}{4}$，$y=-1$.

6. 解方程（组）：

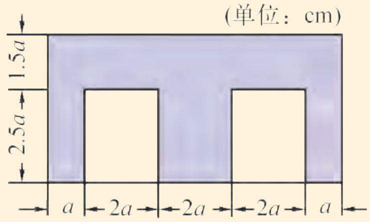
(1) $3x(x+2)+(x+1)(x-1)=4(x^2+8)$;

(2) $\begin{cases}x(y-5)-y(x-2)=12,\\2x(6y-1)+4y(2-2x)=4(xy+3).\end{cases}$

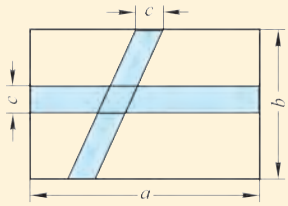
7. 求不等式 $(3x+4)(3x-4)>9(x-2)(x+3)$ 的正整数解.

8. 1 t 镭完全蜕变后，释放出的热量相当于 3.75×10^5 t 煤燃烧的热量，据估计地壳里含 1×10^7 t 镭，试求这些镭完全蜕变后释放出的热量相当于多少吨煤燃烧的热量.

9. 如图是一个机器零件的截面，写出它的面积表达式，并计算当 $a=10$ cm 时的面积.



（第 9 题）



（第 10 题）

10. 如图，有一长方形空地，其长为 a，宽为 b，现要在该空地种植两条防风带（图中阴影部分），其中横向防风带为长方形，纵向防风带为平行四边形，用代数式表示剩余空地的面积.

11. 填空：

（1）$9a^4b^2-$________ $=(3a^2b+5c)(3a^2b-$________$)$；

（2）$\frac{1}{4}m^2+\frac{1}{3}mn+$________ $=\left(\frac{1}{2}m+\text{\_\_\_\_\_\_\_\_}\right)^2$.

12. 把下列各式分解因式：

（1）$x^2+6ax+9a^2$；　　（2）$(x-2a)^2-a(2a-x)$.

13. 如果二次三项式 $4x^2+mx+36$ 是一个完全平方式，求 m 的值.

B组 复习题

1. 填空：

（1）已知 $(2x-a)^2=b+4x^2-12x$，则 $a=$________，$b=$________；

（2）如果 x^2+ax-6 可分解为 $(x+b)(x+2)$，则 $a=$________，$b=$________；

（3）如果 $x^2-ax+15$ 在整数范围内可分解因式，则整数 $a=$________；

（4）如果 $a^m=6$，$a^n=3$，那么 $a^{m+n}=$__________，$a^{m-n}=$________；

（5）已知 $(x+y)^2=7$，$(x-y)^2=5$，则 $x^2+y^2=$________，$xy=$________；

（6）$2\,000^2-2\,001\times1\,999=$________.

2. 为参加“爱我校园”摄影比赛，小明同学将参与植树活动的照片放大为长a cm，宽$\frac{3}{4}a$ cm 的长方形，又在四周加上宽为 2 cm 的相框，用代数式表示这幅摄影作品（带相框）的面积.

3. 比较 2^{100} 与 3^{75} 的大小.

4. 已知 $x+y=3$，$xy=1$，求 x^2+y^2 的值.

5. 计算：

(1) $(2-3y)(9y^2+6y+4)$；　　(2) $(x+2)^3-(x-2)^3$.

C组 复习题

1. 分解因式：

(1) $\frac{1}{2}x^4-8$；　　(2) x^4+7x^2-8.

2. 分解因式：

(1) $a^4-a^3+a^2-a$；　　(2) $4a^2-9b^2+c^2-4ac$；

(3) $(ax+by)^2+(bx-ay)^2$.

3. 计算：

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

4. 试说明 $(n+7)^2-(n-5)^2$（n 是整数）能被 24 整除.

5. (1) 计算：

$(a-1)(a+1)=$________；

$(a-1)(a^2+a+1)=$________；

$(a-1)(a^3+a^2+a+1)=$________；

(2) 由此，猜想：$(a-1)(a^{99}+a^{98}+a^{97}+\cdots+a^2+a+1)=$________.

(3) 请你利用上式的结论，求 $2^{199}+2^{198}+\cdots+2^2+2+1$ 的值.

第 9 章 分式

为了满足经济高速发展的需求，我国铁路部门不断进行技术革新，提高列车运行速度.

在相距 1 600 km 的两地之间运行一列车，速度提高 25％后，运行时间缩短了 4 h，你能求出列车提速前的速度吗？

本章我们将学习分式的性质与运算、分式方程以及如何应用它们解决一些实际问题.

9.1 分式及其基本性质

问题① 有两块稻田，第一块是 4 hm^2，每公顷收水稻 10 500 kg，第二块是 3 hm^2，每公顷收水稻 9 000 kg，这两块稻田平均每公顷收水稻________kg.

如果第一块是 m hm^2，每公顷收水稻 a kg，第二块是 n hm^2，每公顷收水稻 b kg，则这两块稻田平均每公顷收水稻________kg.

图 9-1

问题② 一个长方形的面积为 S m^2，如果它的长为 a m，那么它的宽为________m.

上面问题中出现了代数式 $\frac{am+bn}{m+n}$ 和 $\frac{S}{a}$，它们有什么共同特征？与整式有什么不同？

一般地，如果 a，b 表示两个整式，并且 b 中含有字母，那么式子 $\frac{a}{b}$ 叫做**分式**(fraction). 其中 a 叫做分式的**分子**(numerator)，b 叫做分式的**分母**(denominator).

分式是两个整式相除的商，正如分数可看成两个整数相除的商一样.

整式和分式统称为**有理式**(rational expression)，即

$$有理式\begin{cases}整式\\分式\end{cases}$$

例 1 (1) 当 x 取何值时，分式 $\frac{4}{x-2}$ 有意义？

(2) 当 x 是什么数时，分式 $\frac{x+4}{2x-3}$ 的值为零？

解 (1) 当分母的值等于零时，分式没有意义，除此以

如无特别说明，本章出现的分式都有意义.

外，分式都有意义.

由 $$x-2=0,$$
解得
$$x=2.$$

因而，当 $x\neq2$ 时，分式 $\dfrac{4}{x-2}$ 有意义.

（2）由 $$x+4=0,$$
解得
$$x=-4.$$

当 $x=-4$ 时，分母 $2x-3=-8-3=-11\neq0.$

因而，当 $x=-4$ 时，分式 $\dfrac{x+4}{2x-3}$ 的值为零.

练习

1. 下列代数式中，哪些是分式？哪些是整式？

$$\frac{1}{2},\ \frac{a}{3},\ \frac{1}{x+y},\ -\frac{x}{2},\ \frac{a+b}{ab},\ \frac{x+2}{x-2},\ \frac{3}{\pi}.$$

2. x 为何值时，分式 $\dfrac{x+2}{x-3}$ 有意义？

3. 解下列问题：

（1）一箱苹果售价 a 元，箱子与苹果总质量为 m kg，箱子质量为 n kg. 每千克苹果的售价为多少元？


［第 3（1）题］


［第 3（2）题］

（2）已知轮船在静水中的速度为 a km/h，水流速度为 b km/h（$a>b$），甲、乙两地的航程为 s km，船从甲地顺江而下到乙地需多少时间？从乙地返回甲地需多少时间？

完成下面等式的填空，并说出从左到右变化的依据：

(1) $\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{(\quad)}=\dfrac{(\quad)}{12}$；　（　　　　　　　　　　）

(2) $\dfrac{6}{18}=\dfrac{3}{(\quad)}=\dfrac{(\quad)}{3}$.　（　　　　　　　　　　）

与分数类似，分式有如下的基本性质：

分式的分子与分母都乘以(或除以)同一个不等于零的整式，分式的值不变. 即

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{m}}=\frac{\boldsymbol{a}\div\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{b}\div\boldsymbol{m}}\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{m}\text{ 都是整式，且 }\boldsymbol{m}\neq 0).$$

例 2　根据分式的基本性质填空：

(1) $\dfrac{x^2}{2xy}=\dfrac{(\quad)}{2y}$；　(2) $\dfrac{-a}{-5b}=\dfrac{a}{(\quad)}$；

(3) $\dfrac{a+b}{a^2b+ab^2}=\dfrac{1}{(\quad)}$；(4) $\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{2a}{(\quad)}$.

解　(1) $\dfrac{x^2}{2xy}=\dfrac{x}{2y}$.

(2) $\dfrac{-a}{-5b}=\dfrac{a}{5b}$.

(3) $\dfrac{a+b}{a^2b+ab^2}=\dfrac{1}{ab}$.

(4) $\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{2a}{2a+2b}$.

练习

1. 填空：

(1) $\dfrac{a-b}{ab}=\dfrac{(\quad)}{a^2b}$；　(2) $\dfrac{(a-1)(a+2)}{(a+3)(1-a)}=-\dfrac{a+2}{(\quad)}$；

(3) $\dfrac{5m^2n^2}{m^2n+n^2m}=\dfrac{(\quad)}{m+n}$;　　(4) $\dfrac{x-1}{x^2-2x+1}=\dfrac{1}{(\quad)}$.

2. 下列等式从左边到右边是怎样得到的?

(1) $\dfrac{a}{3b}=\dfrac{ac}{3bc}\ (c\neq 0)$;　　(2) $\dfrac{x(x-y)}{x^2-y^2}=\dfrac{x}{x+y}$.

分式的基本性质是分式化简和运算的依据.

根据分式的基本性质,把一个分式的分子和分母的公因式约去叫做分式的**约分**(reduction of a fraction).

前面例 2 中的第(1)(2)(3)小题就是约分.

当分式的分子和分母是多项式时,要先分解因式,再约分.

例 3　约分:

(1) $\dfrac{8xy^2}{12x^2y}$;　　(2) $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$;

(3) $\dfrac{a^2-2a}{4-a^2}$;　　(4) $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$.

解　(1) $\dfrac{8xy^2}{12x^2y}=\dfrac{4xy\cdot 2y}{4xy\cdot 3x}=\dfrac{2y}{3x}$.

(2) $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}=\dfrac{(a+b)(a-b)}{a+b}=a-b$.

(3) $\dfrac{a^2-2a}{4-a^2}=\dfrac{a(a-2)}{-(a+2)(a-2)}=\dfrac{a}{-(a+2)}=-\dfrac{a}{a+2}$.

(4) $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}=\dfrac{x+1}{x-1}$.

像$\dfrac{2y}{3x}$, $-\dfrac{a}{a+2}$, $\dfrac{x+1}{x-1}$这样,分子与分母只有公因式 1 的分式,叫做**最简分式**(fraction in lowest terms). 约分通常是把分式化成最简分式或者整式.

练习

1. 约分：

(1) $\frac{5xy}{20x^2}$；　(2) $\frac{-3mn}{6mn^2}$；　(3) $\frac{(a-b)^2}{(b-a)^3}$；　(4) $\frac{6a(b-1)}{8ac(1-b)}$.

2. 约分：

(1) $\frac{x^2-9}{(x-3)^2}$；　(2) $\frac{x^2y+xy^2}{x^2-y^2}$.

3. 下面的约分对不对？如果不对，应怎样改正？

(1) $\frac{-a+b}{a-b}=1$；　(2) $\frac{(a-b)^2}{b-a}=b-a$；　(3) $\frac{m^2-n^2}{m-n}=m-n$.

习题 9.1

1. 解下列问题：

(1) 三角形的面积为 S m^2，如果它的一边长为 a m，那么该边上的高为多少米？

(2) 若将一棱长为 a m 的正方体钢坯锻造成底面半径为 r m 的圆柱，则这个圆柱的高为多少米？

(3) 某种地砖一箱能铺 a m^2，客厅的面积为 b m^2，现给客厅铺这种地砖，应买多少箱？

(4) 一台插秧机的插秧速度相当于 a 个熟练农民的插秧速度，若一个熟练农民每时能插 m hm^2，则一台插秧机插完 n hm^2 的水稻需要多少时间？

[第 1(4) 题]

2. 当 x 取什么值时，下列分式无意义？

(1) $\frac{x}{2x-3}$；　(2) $\frac{x-1}{5x+10}$.

3. 填空：

(1) $\frac{y}{x}=\frac{(\quad)}{xy}\ (y\neq 0)$；　(2) $\frac{x-2}{x^2-4}=\frac{1}{(\quad)}$；

(3) $\dfrac{y^3}{4ax}=\dfrac{ay^3}{(\quad)}$;　　(4) $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{a^2-b^2}{(\quad)}\ (a\neq -b)$.

4. 不改变分式的值,将下列分式的分子与分母中各项的系数都化为整数:

(1) $\dfrac{0.1x-0.2y}{0.5x+0.3y}$;　　(2) $\dfrac{\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{4}b+\dfrac{1}{3}}$.

5. 不改变分式的值,将下列分式的分子与分母的最高次项的系数化为正数,并将分子与分母按降幂排列:

(1) $\dfrac{3a^2-1}{1-a}$;　　(2) $\dfrac{x-x^2}{1+2x^2}$;

(3) $\dfrac{-1+2x-x^2}{-2x+1}$;　　(4) $\dfrac{-a^2+a-1}{1-a-a^2}$.

6. 约分:

(1) $\dfrac{-15x}{20x^2}$;　　(2) $\dfrac{-2ac^2}{-14a^2bc}$;　　(3) $\dfrac{x-y}{(y-x)^3}$;

(4) $\dfrac{x^2-9}{6-2x}$;　　(5) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$;　　(6) $\dfrac{x^2-1}{x-x^2}$.

7. 先化简,再求值:

(1) $\dfrac{x^2-5x}{x^2-10x+25}$,其中 $x=2.5$;

(2) $\dfrac{a^2-9b^2}{ab+3b^2}$,其中 $a=-4$, $b=2$.

阅读与思考

类 比 推 理

在学习一元一次不等式的解法时,是与解一元一次方程对比进行的.由于两者标准形式类似 $\left(ax+b\begin{matrix}<c\\=c\\>c\end{matrix}\right)$,解的依据也是类

似的基本性质. 因此,在学过一元一次方程解法后,很容易通过类比,去研究一元一次不等式的解法.

分式与分数分别是整式与整式、整数与整数相除的表述形式,当分式中分子与分母以数值代替字母时,它就是分数. 这样可以通过与分数类比,来学习分式的性质与运算.

两类事物具有相同的结构、特征,当我们已了解其中一类事物的某些属性后,往往可去认识、猜测另一类事物是否也有类似的属性,这种思考问题的方法,称作类比.

类比和归纳一样,也是科学研究中常用的方法,比如在人类对太空的探求中,发射探测器登陆火星,任务之一是了解火星上是否曾经有水的存在. 因为火星与地球同是太阳系中行星,地球上有生物,火星上是否也有呢? 而从地球上知道水是生命之源,如果火星上有过水,可推测它可能存在过生物.

类比可启发我们去猜想、去思考,因此,我们要学会用类比的思想方法去发现新问题、探求新规律.

思考 1 整数与整式也有类似的属性,请你类比整数中公因数和最大公因数的概念,给出几个整式的公因式和最大公因式的概念.

思考 2 类比求两个整数的最大公因数的方法,求下列各组整式的最大公因式:

(1) x^3y, x^2y^2;

(2) $(x-1)^2(x-3)$, $(x-1)(x-2)(x-3)^2$.

思考 3 像$\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $-\frac{8}{9}$这样的分子和分母只有公因数 1 的分数叫做最简分数. 求最简分数时只要约去分子和分母的最大公因数,类似地,把分式 $\frac{3(x-1)(x+2)(x-5)}{(x-1)(x-3)(x-5)}$ 化成最简分式时,你要约去的是什么公因式?

9.2 分式的运算

1. 分式的乘除

思考

1. 你还记得分数的乘除运算吗?

(1) $\frac{2}{3}\times\frac{6}{5}=$____; (2) $\left(-\frac{5}{7}\right)\times\left(-\frac{2}{5}\right)=$____;

(3) $\frac{3}{6}\div\left(-\frac{3}{4}\right)=$____; (4) $\left(-\frac{4}{21}\right)\div\frac{2}{7}=$____.

2. 任给下面式子中 a, b, c, d 一组数值,如 $a=2$, $b=3$, $c=-2$, $d=-3$,求下面两式子的值,再任选一组 a, b, c, d 的值进行计算,从中你能得出什么结论?

(1) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=$____, $\frac{ac}{bd}=$____; (2) $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=$____, $\frac{ad}{bc}=$____.

与分数乘除类似,分式乘除的法则为:

两个分式相乘,用分子的积作积的分子,用分母的积作积的分母.

两个分式相除,将除式的分子、分母颠倒位置后,与被除式相乘.

分式运算的结果要尽量约简.

例 1 计算:

(1) $\frac{6x}{5y}\cdot\frac{-10y^2}{3x^3}$; (2) $\frac{9a^2b^2}{2c}\div\frac{3ab^3}{8c^2}$.

解 (1) $\frac{6x}{5y}\cdot\frac{-10y^2}{3x^3}$

$$=\frac{6x\cdot(-10y^2)}{5y\cdot 3x^3}$$

$$=-\frac{4y}{x^2}.$$

(2) $$\frac{9a^2b^2}{2c}\div\frac{3ab^3}{8c^2}$$

$$=\frac{9a^2b^2}{2c}\cdot\frac{8c^2}{3ab^3}$$

$$=\frac{12ac}{b}.$$

例 2 计算：$\dfrac{x-1}{x^2-4x+4}\div\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$.

解 $$\frac{x-1}{x^2-4x+4}\div\frac{x^2-1}{x^2-4}$$

$$=\frac{x-1}{x^2-4x+4}\cdot\frac{x^2-4}{x^2-1}$$

$$=\frac{(x-1)(x^2-4)}{(x^2-4x+4)(x^2-1)}$$

$$=\frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{(x-2)^2(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{x+2}{(x-2)(x+1)}.$$

原式 $=\dfrac{x-1}{(x-2)^2}\cdot\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{x+2}{(x-2)(x+1)}$.

先约分后相乘可使运算简化！

思考

怎样计算 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2$，$\left(\dfrac{a}{b}\right)^3$，$\left(\dfrac{a}{b}\right)^4$？

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3=\underline{\qquad\qquad\qquad}=\underline{\qquad\qquad};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4=\underline{\qquad\qquad\qquad}=\underline{\qquad\qquad}.$$

一般地，$\left(\frac{a}{b}\right)^n$ = ________ = ________（n 是正整数）.

即 $\left(\boldsymbol{\frac{a}{b}}\right)^{\boldsymbol{n}}$ = ____________.

分式乘方的法则为：

分式乘方就是把分子、分母分别乘方.

根据负整数次幂的意义，可知：

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=(ab^{-1})^n=a^nb^{-n}=\frac{a^n}{b^n}.$$

这就是说，分式的乘方 $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ 可以转化为积的乘方 $(ab^{-1})^n$.

练习

1. 计算：

（1）$\frac{-a^2}{5b^3}\cdot\frac{10b^2}{7ac}$；　（2）$\frac{3ab}{4xy}\div\frac{21a^2b}{10x^2y}$；

（3）$-3xy^2\cdot\frac{2x}{(3y)^2}$；　（4）$\frac{12xy}{5}\div4(xy)^2$.

2. 计算：

（1）$\frac{2x+2}{x-2}\cdot\frac{x^2-4}{x+1}$；　（2）$\frac{x-y}{x+y}\div(x^2-2xy+y^2)$.

3. 计算：

（1）$\left(\frac{b^2}{ac}\right)^3\div(-b^6c)$；　（2）$\left(-\frac{x}{y}\right)^2\cdot\left(\frac{y^2}{x}\right)^3\div(xy)^4$.

4. 体育课上，李明和王亮进行单人定位投篮练习. 李明投 a 次中 b 次，王亮投 m 次中 n 次，问李明投篮的命中率是王亮的几倍？

（第 4 题）

2. 分式的加减

思考

1. 下面再来复习分数的加减运算：

(1) $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=$ ______；　　(2) $\left(-\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{4}=$ ______；

(3) $\left(-\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)=$ ______；　　(4) $\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{1}{3}\right)=$ ______.

2. 类比分数的加减运算，下面分式的加减运算如何进行？

(1) $\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$；　　(2) $\frac{b}{a}-\frac{c}{a}$；

(3) $\frac{b}{3a}+\frac{a}{2b}$；　　(4) $\frac{b}{3a}-\frac{a}{2b}$.

与分数类似，在计算异分母分式的加减时，要利用分式的基本性质，先把分母不相同的分式化成分母相同的分式，再进行加减. 化异分母分式为同分母分式的过程，叫做分式的**通分**(reduction of fractions to a common denominator).

例3　通分：

(1) $\frac{1}{3a^2b}, \frac{1}{4ab^2}, \frac{1}{12ab}$；

(2) $\frac{1}{x^2-y^2}, \frac{1}{x^2+2xy+y^2}, \frac{1}{x^2+xy}$.

解　(1) $3a^2b$, $4ab^2$, $12ab$ 中系数的最小公倍数为 12，字母 a 的最高次幂为 a^2，字母 b 的最高次幂为 b^2，故公分母为 $12a^2b^2$.

通分后分别为：$\frac{1}{3a^2b}=\frac{4b}{12a^2b^2}$，

$$\frac{1}{4ab^2}=\frac{3a}{12a^2b^2},$$

$$\frac{1}{12ab}=\frac{ab}{12a^2b^2}.$$

(2) $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$,

$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$,

$x^2+xy=x(x+y)$,

故公分母为 $x(x+y)^2(x-y)$.

通分后分别为：$\dfrac{1}{x^2-y^2}=\dfrac{x(x+y)}{x(x-y)(x+y)^2}$,

$$\frac{1}{x^2+2xy+y^2}=\frac{x(x-y)}{x(x-y)(x+y)^2},$$

$$\frac{1}{x^2+xy}=\frac{(x-y)(x+y)}{x(x-y)(x+y)^2}.$$

异分母分式通分时，关键是确定公分母. 通常取各分母所有因式的最高次幂的积作为公分母，这样的公分母叫做**最简公分母**.

在求最简公分母时应注意：

(1) 如果各分母的系数都是整数时，通常取它们系数的最小公倍数作为最简公分母的系数；

(2) 当分母是多项式时，一般应先分解因式.

练习

1. 通分：

(1) $\dfrac{a}{2b}$, $\dfrac{b}{3a}$, $\dfrac{c}{4ab}$;　　(2) $\dfrac{3}{2x^2y}$, $\dfrac{5}{3xy^2}$.

2. 通分：

(1) $\dfrac{1}{x+1}$, $\dfrac{x-1}{x^2+2x+1}$, $\dfrac{1}{x-1}$;　　(2) $\dfrac{1}{x-1}$, $\dfrac{1}{x^2-1}$, $\dfrac{1}{x^2+x}$.

与分数加减类似，分式加减的法则为：

同分母的分式相加减，分母不变，分子相加减.

异分母的分式相加减，先通分，变为同分母的分式后再加减.

例 4 计算：

(1) $\frac{b}{2a}-\frac{a+b}{2a}$；　　　　(2) $\frac{a}{a-1}+\frac{a-3}{1-a}$.

解 (1)
$$\begin{aligned}&\frac{b}{2a}-\frac{a+b}{2a}\\=&\frac{b-(a+b)}{2a}\\=&\frac{b-a-b}{2a}\\=&-\frac{a}{2a}\\=&-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&\frac{a}{a-1}+\frac{a-3}{1-a}\\=&\frac{a}{a-1}-\frac{a-3}{a-1}\\=&\frac{a-(a-3)}{a-1}\\=&\frac{3}{a-1}.\end{aligned}$$

注意：$1-a=-(a-1)$.

例 5 计算：

(1) $\frac{3}{2x^2}+\frac{4}{5x}$；　　　　(2) $\frac{m-15}{m^2-9}-\frac{2}{3-m}$.

解 (1)
$$\begin{aligned}&\frac{3}{2x^2}+\frac{4}{5x}\\=&\frac{15}{10x^2}+\frac{8x}{10x^2}\end{aligned}$$

$$=\frac{8x+15}{10x^2}.$$

(2) $$\frac{m-15}{m^2-9}-\frac{2}{3-m}$$

$$=\frac{m-15}{(m+3)(m-3)}+\frac{2(m+3)}{(m+3)(m-3)}$$

$$=\frac{m-15+2m+6}{(m+3)(m-3)}$$

$$=\frac{3m-9}{(m+3)(m-3)}$$

$$=\frac{3(m-3)}{(m+3)(m-3)}$$

$$=\frac{3}{m+3}.$$

练习

1. 计算：

(1) $\frac{3}{x}-\frac{1}{2x}$；　　(2) $\frac{2y}{1-x}-\frac{y}{x-1}$.

2. 计算：

(1) $\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$；　　(2) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}$；

(3) $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}-\frac{a^2+b^2}{ab}$；　　(4) $\frac{1}{3x}+\frac{1}{2y}-\frac{x+2y}{6xy}$.

3. 计算：

(1) $\frac{2}{3x^2}-\frac{5}{6x}$；　　(2) $\frac{2a}{a^2-4b^2}-\frac{1}{a-2b}$.

4. 学校有一块面积为 m 的操场，七年级(2)班的 a 位同学承担了清除操场杂草的任务. 若平均每位同学每时能清除面积为 n 的杂草，则全班清除全部杂草需要多少时间？七年级(1)班有 b 位同学，若平均每位同学每时能清除面积为 k 的杂草，则两班合作要比七年级(2)班单独完成提前多少时间？

分式的加、减、乘、除、乘方混合运算也是先乘方，再乘除，后加减. 如果有括号，先进行括号里的运算.

例 6 $\left(\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{x}{x+1}\right)-\dfrac{x}{x^2-1}\div\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2$.

解
$$\begin{aligned}&\left(\frac{x-1}{x}-\frac{x}{x+1}\right)-\frac{x}{x^2-1}\div\left(\frac{x}{x-1}\right)^2\\
=&\frac{x^2-1-x^2}{x(x+1)}-\frac{x}{x^2-1}\cdot\frac{(x-1)^2}{x^2}\\
=&\frac{-1}{x(x+1)}-\frac{x-1}{x(x+1)}\\
=&\frac{-x}{x(x+1)}\\
=&-\frac{1}{x+1}.\end{aligned}$$

练习

计算：

(1) $(a+b)\cdot\dfrac{a^2}{a^2-b^2}+\dfrac{b^2}{b-a}$;

(2) $\left(\dfrac{1}{m-1}-\dfrac{1}{m+1}-1\right)\div\dfrac{1}{m^2-1}$;

(3) $a-1+\dfrac{1}{1-a}$;

(4) $\dfrac{4}{x^2-4}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{2-x}$.

习题 9.2

1. 计算：

(1) $\dfrac{3a}{4b}\cdot\dfrac{8b}{9a^2}$;

(2) $\dfrac{xy^3}{8c^2d}\div\dfrac{xy}{2cd^2}$;

（3）$\dfrac{a-b}{b}\cdot\dfrac{ab}{2a-2b}$；　　（4）$\dfrac{xy}{2x-3y}\cdot\dfrac{6x-9y}{2x^2y^2}$.

2. 计算：

（1）$\dfrac{x^2-1}{x-x^2}\cdot\dfrac{xy-x}{1-y}$；　　（2）$\dfrac{1}{(y-x)^2}\cdot\dfrac{x-y}{x+y}$；

（3）$(xy-x^2)\div\dfrac{x-y}{xy}$；　　（4）$\dfrac{x-3}{x^2+x}\div(x^2-6x+9)$.

3. 计算：

（1）$\left(-\dfrac{xy}{a}\right)\div\left(-\dfrac{x}{a}\right)^2$；　　（2）$\dfrac{(3x^{-1}y^{-2})^2\cdot(x^2y^2)^3}{(3xy^3)^{-2}}$；

（3）$(-a^2)\cdot\left(-\dfrac{a}{b}\right)^3\div\left(-\dfrac{a}{b}\right)^4$.

4. 计算：

（1）$\left(\dfrac{b}{2a^2}\right)^3\div\left(\dfrac{2b^2}{3a}\right)^0\times\left(-\dfrac{b}{a}\right)^{-3}$；　　（2）$(xy-x^2)\div\dfrac{x^2-2xy+y^2}{xy}\cdot\dfrac{x-y}{x^2}$.

5. 计算：

（1）$\dfrac{2x+7}{3x+1}-\dfrac{x+3}{3x+1}$；　　（2）$\dfrac{3c}{c-d}-\dfrac{3d+c}{d-c}$.

6. 计算：

（1）$\dfrac{3x+1}{3x}-\dfrac{2y-1}{2y}$；　　（2）$a+b+\dfrac{2b^2}{a-b}$；

（3）$\dfrac{a-1}{a^2-1}+\dfrac{a}{a+1}$；　　（4）$\dfrac{1}{m^2-m}+\dfrac{m-3}{m^2-1}$.

7. 计算：

（1）$\left(x-\dfrac{1}{1-x}\right)\cdot\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{1}{x}$；　　（2）$\dfrac{3-a}{2a-4}\div\left(a+2-\dfrac{5}{a-2}\right)$.

8. （1）若 $a=\dfrac{1}{2}$，求$\left(\dfrac{a^2-4}{a^2-4a+4}-\dfrac{1}{a-2}\right)\div\dfrac{a+1}{a+2}$的值；

（2）若 $x=100$，$y=99$，求$\left(x-y+\dfrac{4xy}{x-y}\right)\left(x+y-\dfrac{4xy}{x+y}\right)$的值.

9. 两地之间的空中航线全程 s km，飞行时间需用 a h，两地之间的铁路线全长是空中航线全程的 m 倍，火车运行的时间为 b h，求飞机速度是火车速度的多少倍.

9.3 分式方程

如何解决本章引言中提出的问题呢?

设某列车提速前的速度为 x km/h,那么提速后的速度应为 $(1+25\%)x$ km/h.

列车提速前后走完 1 600 km 所需时间分别为 $\frac{1\,600}{x}$ h 和 $\frac{1\,600}{(1+25\%)x}$ h,根据题意,得

$$\frac{1\,600}{x}-\frac{1\,600}{(1+25\%)x}=4.$$

图 9-2

像这样,分母中含有未知数的方程叫做**分式方程**(fractional equation).

思考

如何解分式方程 $\frac{1\,600}{x}-\frac{1\,600}{\frac{5}{4}x}=4$?

方程两边同乘以最简公分母 $\frac{5}{4}x$,得

$$2\,000-1\,600=5x,$$

解这个整式方程,得

$$x=80.$$

把 $x=80$ 代入上述分式方程检验:

去分母后,分式方程就转化为整式方程了!

$$\text{左边}=\frac{1\,600}{80}-\frac{1\,600}{\frac{5}{4}\times 80}=4=\text{右边}.$$

所以 $x=80$ 是该分式方程的解.

因而,列车提速前的速度为 80 km/h.

探究

解方程 $\frac{2-x}{x-3}=\frac{1}{3-x}-2$,把解得的根代入原方程中检验,你发现了什么?

解方程 $$\frac{2-x}{x-3}=\frac{1}{3-x}-2,$$

可得 $$x=3.$$

把 $x=3$ 代入检验时,方程中分式的分母为零,分式无意义,所以 $x=3$ 不是原方程的根,原方程无解.

$x=3$ 是原方程两边同乘以最简公分母变形后的整式方程的根,但不是原方程的根,像 $x=3$ 这样的根,称为**增根**(extraneous root). 解分式方程时可能产生增根,所以必须验根.

想一想为什么会产生增根?

例 1 解方程:$\frac{x-1}{x+3}-2=\frac{x}{3-x}$.

解 方程两边同乘以最简公分母 $(x+3)(x-3)$,得

$(x-1)(x-3)-2(x+3)(x-3)=-x(x+3)$.

展开,得

$$x^2-4x+3-2x^2+18=-x^2-3x.$$

解方程,得

$$x=21.$$

检验:当 $x=21$ 时,$(x+3)(x-3)\neq 0$.

因而,原方程的根是 $x=21$.

解分式方程时,通常要在方程两边同乘以最简公分母,验根时,只要把求得的根代入最简公分母,看它的值是否为零,使它不为零的根才是原方程的根,使它为零的根即为增根,应舍去.

交流

由以上解方程的过程,你能总结出解分式方程的步骤吗?把你的结论与同伴交流.

练习

1. 解方程:

(1) $\dfrac{5}{x}=\dfrac{3}{x-2}$;　　(2) $1-\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{3-x}{x-4}$.

2. 防汛期间,县指挥部组织人力到 30 km 远的堤上抢修堤坝,2 人骑摩托车先走,15 min 后,大部队乘汽车装载着所需材料出发,结果他们同时到达. 已知汽车速度是摩托车速度的 1.5 倍,求这两种车的速度.

例 2　有一并联电路,如图 9-3,两电阻阻值分别为 R_1,R_2,总电阻阻值为 R,三者关系为:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}.$$

若已知 R_1, R_2,求 R.

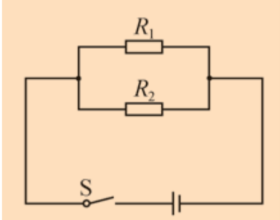


图　9-3

解　方程两边同乘以 RR_1R_2,得

$$R_1R_2=RR_2+RR_1,$$

即

$$R_1R_2=R(R_1+R_2).$$

因为 R_1，R_2 都是正数，所以 $R_1 + R_2 \neq 0$.

两边同除以 $(R_1 + R_2)$，得

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

例 3 七年级甲、乙两班师生前往郊区参加义务植树活动，已知甲班每天比乙班多种 10 棵树，如果分配给甲、乙两班的植树任务分别是 150 棵和 120 棵，问两个班每天各植树多少棵，才能同时完成任务？

解 设乙班每天植树 x 棵，那么甲班每天植树 $(x+10)$ 棵，甲班完成任务需 $\frac{150}{x+10}$ 天，乙班完成任务需 $\frac{120}{x}$ 天.

要求同时完成任务，即 x 应满足下列等式：

$$\frac{150}{x+10} = \frac{120}{x}.$$

解方程，得

$$x = 40.$$

检验：$x = 40$ 是原方程的根.

此时 $x + 10 = 50$.

因而，当乙班每天植树 40 棵，甲班每天植树 50 棵时，两个班能同时完成任务.

练习

1. 在公式 $\frac{p_1}{V_2} = \frac{p_2}{V_1}$ 中，$p_2 \neq 0$，用 p_1，p_2，V_1 表示出 V_2.
2. 小华和姐姐都用计算机输入 1 500 个汉字，姐姐的输入速度是小华的 3 倍，结果姐姐比小华少用 20 min 完成，求他们各自的打字速度.
3. 甲、乙两名工人生产同一种零件，甲每时比乙多生产 8 个，甲生产 168 个零件与乙生产 144 个零件所用的时间相同，问甲、乙两人每时各生产多少个零件？

习题 9.3

1. 某地修建一条轻轨铁路,要使工程提前 3 个月完成,需将原定的工作效率提高 12%. 如果设原计划完成这项工程用 x 个月,那么 x 应满足怎样的方程?
2. 已知水流的速度是 3 km/h,轮船顺流航行 66 km 与逆流航行 48 km 所需时间相等,设轮船在静水中的速度为 x km/h,那么 x 应满足怎样的方程?
3. 解下列方程:

(1) $\frac{6}{x+4}-\frac{3}{x-1}=0$;　　(2) $\frac{x}{2x-5}-\frac{5}{5-2x}=1$;

(3) $\frac{x+1}{x-2}=\frac{x-3}{x-4}$;　　(4) $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}=\frac{6}{x^2-1}$.

4. (1) 已知 $R+\frac{r}{n}=s\ (s\neq R)$, 求 n;

(2) 已知 $e=\frac{m-a}{m+a}\ (e\neq -1)$, 求 a.

5. 车间加工 1 200 个零件后,采用了新工艺,工效是原来的 1.5 倍,这样,加工同样个数的零件就少用了 10 h,问采用新工艺前后每时各加工多少个零件?
6. 在争创全国卫生城市的活动中,某市“青年突击队”决定义务清除重达 100 t 的垃圾. 开工后,附近居民主动参加到义务劳动中,使清除垃圾的速度比原计划提高了 1 倍,提前 4 h 完成了任务,“青年突击队”原计划每时清除多少吨垃圾?

阅读与思考

两个等式的研究

前面我们学过很多等式,例如完全平方公式和平方差公式,通过观察我们会发现很多等式具有非常有趣的规律. 下面给出两个例子,请你通过观察,总结规律并解答问题:

1. 我们知道,$(k+1)^2=k^2+2k+1$,改变公式写法,得

$$(k+1)^2-k^2=2k+1.$$

对上面的等式，依次令 $k=1,2,3,\cdots,n$，得

$$2^2-1^2=3=2\times1+1,$$
$$3^2-2^2=5=2\times2+1,$$
$$4^2-3^2=7=2\times3+1,$$
$$5^2-4^2=9=2\times4+1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$(n+1)^2-n^2=2n+1.$$

(1) 把这 n 个式子左右两边分别相加，能得到怎样的结果？

(2) 记 $S_1=1+2+3+\cdots+n$. 根据上述结果，你能求出 S_1 的公式吗？

(3) 上面我们从公式 $(k+1)^2=k^2+2k+1$ 入手，从一般到具体，根据 n 的不同取值，得到一系列等式，从而求出 S_1（前 n 个自然数的和）的公式. 仿上，记 $S_2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$，请构建一个等式，然后利用它求出 S_2.

2. 上题是利用一系列等式相加消去项达到求和，这种方法不仅限于整数求和. 如

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{1\times2}, \qquad ①$$
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2\times3}, \qquad ②$$
$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3\times4}, \qquad ③$$
$$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{4\times5}, \qquad ④$$
$$\cdots\cdots$$

(1) 继续写出上述第 n 个算式，并把这些算式两边分别相加，会得到什么结果？你能写出下面的求和公式吗？

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

(2) 根据上面的算式，在小于 100 的正整数中，求出 10 个数，使得它们的倒数和等于 1.

小结·评价

一、内容整理

二、主要知识回顾

1. 形如$\dfrac{a}{b}$(a,b为整式,且b中含有字母)的式子叫做分式. 整式和分式统称为有理式.

2. 分式的基本性质:

$\dfrac{a\cdot m}{b\cdot m}=\underline{\qquad\qquad}$,$\dfrac{a\div m}{b\div m}=\underline{\qquad\qquad}$ (a, b是整式,且$m\neq0$).

3. 分式的运算法则:

(1) 分式的乘除:$\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\underline{\qquad\quad}$,$\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\underline{\qquad\quad}$.

(2) 分式的加减:$\dfrac{a}{b}\pm\dfrac{c}{b}=\underline{\qquad\quad}$,$\dfrac{b}{a}\pm\dfrac{d}{c}=\underline{\qquad\quad}$.

4. 解分式方程的基本思想是把它转化为________方程,在分式方程求解过程中有可能产生________,所以解分式方程必须________.

三、自评与互评

1. 本章的知识,从分式的概念、性质到运算法则,都是通过和分数的有关知识类比得到的. 类比是一种重要的数学思想方法,你能举例说明前面哪些知识的学习也是运用这种思想方法得到的吗? 与同学进行交流.

2. 解分式方程与解一元一次方程有何联系和区别?

3. 联系生活实际,提出一个可通过建立分式方程解决的问题,请你的同学去解决,并对他的解答作出评价.

A组 复习题

1. 填空:

(1) 某家庭每天需用大米 m kg,家中存有 x 天的用米量,如果每天少用 n kg 的大米,那么存有的大米能用________天;

(2) 当 x ________时,分式 $\frac{4x}{x+1}$ 有意义;

(3) 当 x ________时,分式 $\frac{2x}{2-x}$ 的值为零;

(4) 当 x ________时,分式 $\frac{1}{3+x}$ 的值为负.

2. 计算:

(1) $\frac{a^2b+ab^2}{a^2-2ab+b^2}\cdot\frac{a-b}{ab+b^2}$; (2) $\frac{1}{x-2}\div\frac{4}{4-x^2}$;

(3) $\left(1-\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{x^2}-1\right)$.

3. 计算:

(1) $\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}$; (2) $\frac{a-b}{ab}+\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ca}$;

(3) $\frac{2x}{x+3}-x+1$; (4) $\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}-\frac{x-1}{6+2x}$.

4. 先化简,再求值:

$\frac{2x+6}{x^2-4x+4}\div(x+3)\cdot\frac{x-2}{x+3}$,其中 $x=3$.

5. 解方程:

(1) $\frac{3x-1}{x+2}=\frac{2}{3}$; (2) $\frac{x-6}{x-3}+\frac{x-4}{x-5}=2$.

6. (1) 已知 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1\ (b\neq y)$,求 x;

(2) 已知 $k=\frac{y-n}{x-m}\ (k\neq 0)$,求 x.

7. 甲、乙两人同时在计算机上输入一份书稿,4 h 后,甲因另有任务,由乙又单独输入 5 h 完成. 已知甲输入 4 h 的稿件,乙需输入 6 h. 问甲、乙单独输入完这份书稿各需多少时间?

8. 五一期间,班主任王老师带领全班同学去距离学校 25 km 的市科技馆参观,男生在班长的带领下骑自行车提前 80 min 出发,女生在王老师的带领下乘客车前往,结果两队同时到达. 若客车速度是自行车速度的 3 倍,求各队的速度.

9. 高湾村准备用 80 hm^2 的河滩地发展大棚蔬菜,负责承建大棚的工程队为了不耽误农时,工作效率比原计划提高了 1.5 倍,结果提前 20 天完工. 求工程队原计划每天建多少公顷大棚.

B组 复习题

1. 填空:

(1) 如果 $x^2-4xy+4y^2=0$,那么$\frac{x-y}{x+y}=$ ________;

(2) 如果 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$,那么$\frac{7x^2-y^2}{x^2-2xy+3y^2}=$ ________.

2. 计算:

(1) $\frac{(2ab^2)^{-2}(a^2b)^2}{(3a^3b)^2(ab^3)^{-2}}$; (2) $\frac{x^2+y^2-z^2+2xy}{x^2-y^2+z^2-2xz}$.

3. 计算:

(1) $\left(\frac{1}{x^2-2x+1}-\frac{1}{x^2+2x+1}\right)\div\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)$;

(2) $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$;

(3) $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}$.

4. 某单位将沿街的店面房出租，第一年租给一家公司获租金 6 万元，第二年租给一些个体经营户获租金 7.2 万元. 已知第一年每间店面房的租金比第二年少1 000 元，问这两年每间店面房的租金各是多少元？

（第 4 题）

5. 某市自来水公司计费方法如下：若每户每月用水不超过 5 m^3，则每立方米收费 1.50 元；若每户每月用水超过 5 m^3，则超出部分需加收一定费用. 9 月份小华妈妈缴了 17.50 元的水费，而小莉妈妈缴了 27.50 元的水费，小华家的用水量恰好是小莉家的$\frac{2}{3}$，你能求出超过 5 m^3 的部分每立方米加收多少元吗？

6. 某建工集团下有甲、乙两个工程队，现中标承建一段公路. 若让两队合做，24 天可以完工，需费用 120 万元；若让两队合做 20 天后，剩下的工程由乙队做，还需 20 天才能完成，这样只需费用 110 万元. 问：
（1）甲、乙两队单独完成此项工程各需多少天？
（2）甲、乙两队单独完成此项工程各需费用多少万元？

C组 复习题

解下列方程组：

（1）$\begin{cases} \dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}=10, \\ \dfrac{9}{x}-\dfrac{7}{y}=-5; \end{cases}$ （2）$\begin{cases} \dfrac{4}{x+y}+\dfrac{6}{x-y}=3, \\ \dfrac{9}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}=1. \end{cases}$

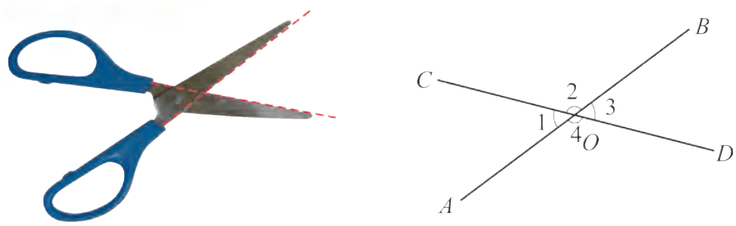
第10章 # 相交线、平行线与平移

我们周围见到的许多图形中，纵横交错的直线条都给我们相交直线与平行直线的形象.

本章将学习相交线、平行线和平移的概念和性质，并解决一些简单的实际问题.

10.1 相 交 线

观察



(1)　　　　(2)

图　10-1

观察剪刀剪东西的过程，可以将剪刀的两片刀刃边沿看作是两条相交直线，如图 10-1(1)中虚线所示. 把这两条相交直线用图 10-1(2)表示，在剪东西的过程中，$\angle AOC$ 与 $\angle BOD$ 这两个角的位置和大小始终保持怎样的关系?

在图 10-1(2)中，直线 AB 与 CD 相交于点 O，$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 有公共顶点 O，并且它们的两边分别互为反向延长线，这样的两个角叫做**对顶角**(opposite angles).

在图 10-1(2)中，还有其他角能构成对顶角吗?

探究

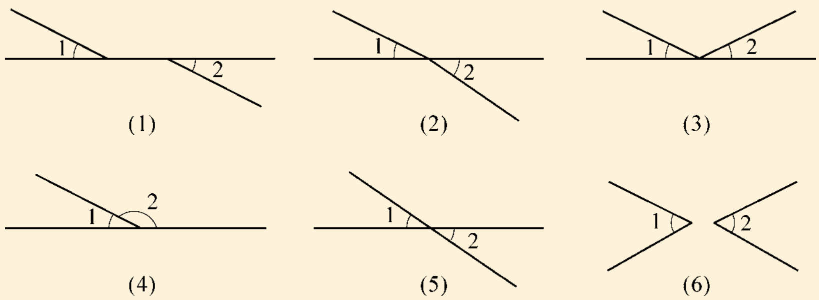
在图 10-1(2)中，$\angle 1$ 与 $\angle 3$ 的大小有什么关系? 你能说明具有这种关系的道理吗?

由 $\angle 1 + \angle 2 = 180°$，$\angle 3 + \angle 2 = 180°$，得 $\angle 1 = \angle 3$.（为什么？）

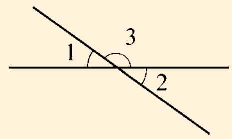
由此可得：**对顶角相等**.

练习

1. 判断下列各图中 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是否为对顶角，并说明理由.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，两条直线相交，$\angle 1 = 35°$，求 $\angle 2$ 和 $\angle 3$ 的度数.

思考

将十字街口的两条道路看作两条直线，如图 10－2(2) 中的 AB 和 CD，它们相交于点 O，形成 4 个角. 如果 $\angle AOC = 90°$，那么其他 3 个角的度数各是多少？为什么？

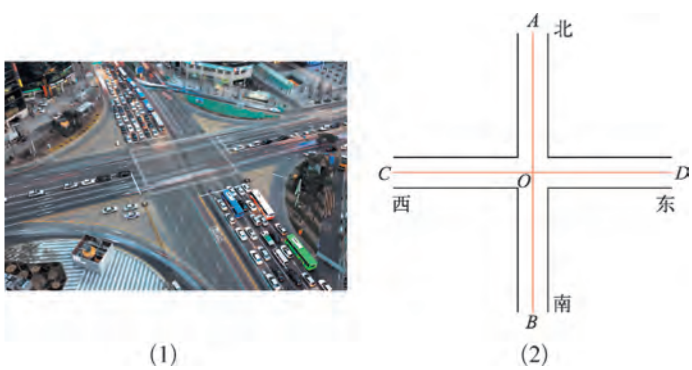


图　10－2

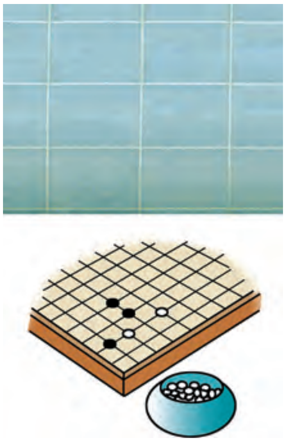


图　10-3

在两条直线 AB 和 CD 相交所成的 4 个角中，如果有一个角是直角，就说这两条直线互相垂直，记作"$AB \perp CD$"，读作"AB 垂直于 CD"，其中一条直线叫做另一条直线的**垂线**(perpendicular line)，它们的交点 O 叫做**垂足**(foot of a perpendicular).

两条直线垂直的例子很多，如图 10-3 所示的地砖间的缝隙，围棋盘上的方格线等.

你能再举出一些两条直线互相垂直的例子吗?

操作

1. 用三角尺画垂线.

仿照下面图 10-4 的画图办法，过已知直线 l 上(或外)的一点 P 画直线，使它与直线 l 垂直.

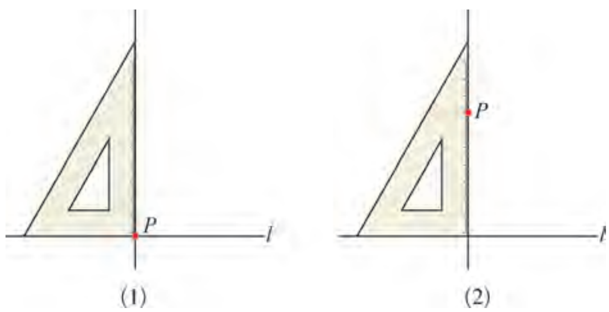


图　10-4

2. 用折纸方法画垂线.

仿照图 10-5 所示的方法，折出经过点 P 与直线 l 垂直的折痕，用直尺沿折痕画出直线.

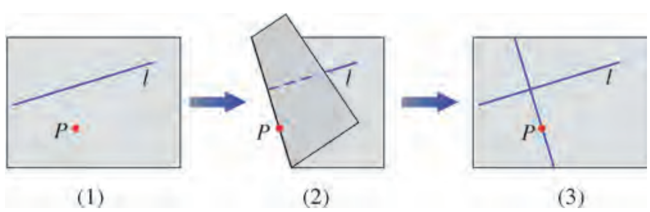


图　10-5

通过上面的操作，你知道过一点画已知直线的垂线，能画几条吗？

关于直线的垂线，有如下**基本事实**：

过一点有且只有一条直线垂直于已知直线.

有时，我们说线段、射线与某一条直线互相垂直，是指线段所在直线、射线所在直线与该直线互相垂直.

画一条线段或射线的垂线，就是画它们所在直线的垂线.

观察

1. 如图 10－6，点 P 在直线 l 外，在直线 l 上任意取一些点 A，B，C，O，把这些点分别与点 P 连接，得到线段 PA，PB，PC，PO，其中 $PO \perp l$.

观察这些线段，比较它们的长短，其中哪一条线段最短？

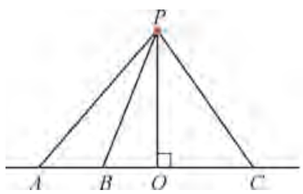


图 10－6

2. 点 P 在直线 l 外，把一根细绳的一端用图钉固定在点 P 处，拉紧细绳，按图 10－7 所示步骤进行操作.

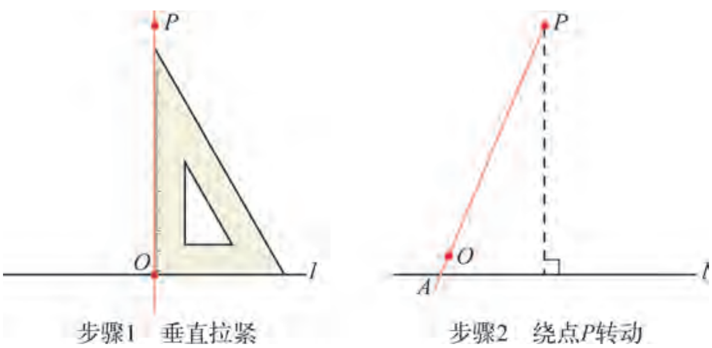


图 10－7

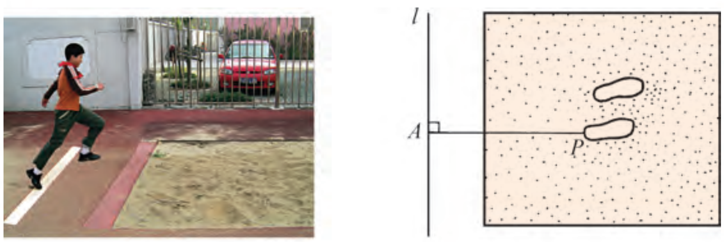
观察细绳上的标记点 O（垂直拉紧时的垂足）位置的变化，你有什么发现？

在连接直线外一点与直线上各点的线段中，垂线段(连接直线外一点与垂足形成的线段)**最短.**

直线外一点到这条直线的垂线段的长度叫做**点到直线的距离.**

交流

如图 10－8，沙坑中留下一位同学跳远的足印，如何测量这位同学的跳远成绩？为什么这样量？

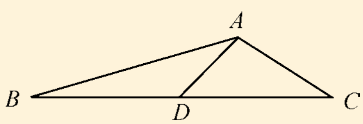


(1)　　(2)

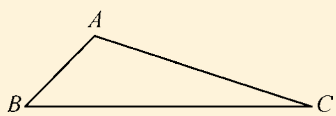
图　10－8

练习

1. 如图，在三角形 ABC 中，D 是 BC 中点，连接 AD，请分别画出自点 B，C 向 AD 所作的垂线(垂足为 E，F).



(第 1 题)



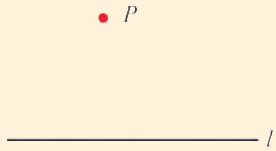
(第 2 题)

2. (1) 如图，用三角尺画出点 A 到直线 BC 的垂线段；

   (2) 画出点 B 到直线 AC 的垂线段.

3. 如图，直线 l 表示一条公路，点 P 是一所学校所在的位置，要修一条从学校到公路的道路，如何修才能使道路最短？画出所修道路的示意图.

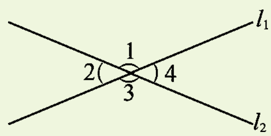
(1)



(2)

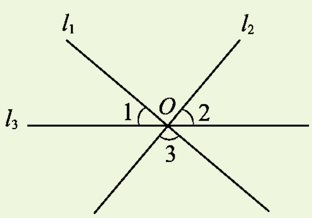
（第 3 题）

习题 10.1

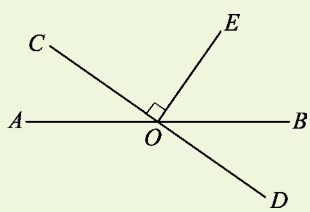


（第 1 题）

1. 如图，直线 l_1 与 l_2 相交形成 4 个角，其中 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 有怎样的位置关系？$\angle 1$ 与 $\angle 3$ 又有怎样的位置关系？图中哪些角的大小相等？为什么？
2. 如图，直线 l_1，l_2，l_3 相交于点 O，$\angle 1 = 40°$，$\angle 2 = 50°$，求 $\angle 3$ 的度数.



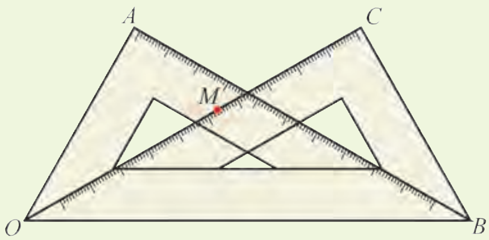
（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，直线 AB，CD 相交于点 O，$\angle AOC = 35°$，$EO \perp CD$，垂足为 O，求 $\angle DOB$，$\angle BOE$ 的度数.

4. 两把完全一样的三角尺如图放置，其中 $\angle AOB = 60°$，$\angle COB = 30°$，在边 OC 所在直线上任取一点 M，分别测量点 M 到边 OA，OB 所在直线的距离，你能得到什么结论？



（第 4 题）

数学园地

如图 10－9，AB 是一条灌溉渠，要铺设管道将渠水引到 C，D 两个用水点.

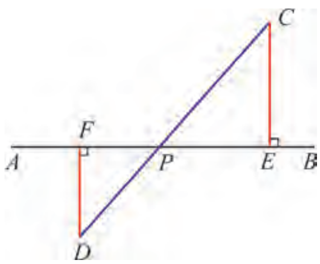


图　10－9

现有两种方法：

（1）分别从点 C，D 向 AB 作垂线，E，F 分别为垂足，沿 EC，FD 铺设管道.

（2）连接 CD 交 AB 于点 P，沿 PC，PD 铺设管道.

问这两种铺设管道的方法，哪一种节省材料，为什么？

10.2 平行线的判定

如图 10－10，双杠上的两条木杠，黑板的上下两边，把它们看作直线时，都给我们平行直线的形象.

(1)　　　　(2)

图　10－10

在同一平面内不相交的两条直线叫做**平行线**(parallel lines). 如图 10 － 11，两条直线 AB 和 CD 平行，记作“$AB \parallel CD$”，读作“AB 平行于 CD”.

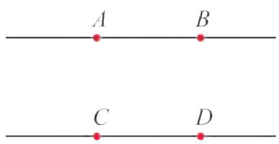


图　10－11

操作

如图 10－12，点 P 在直线 l 外，按照图示的方法过点 P 画直线 l 的平行线，你能画几条？

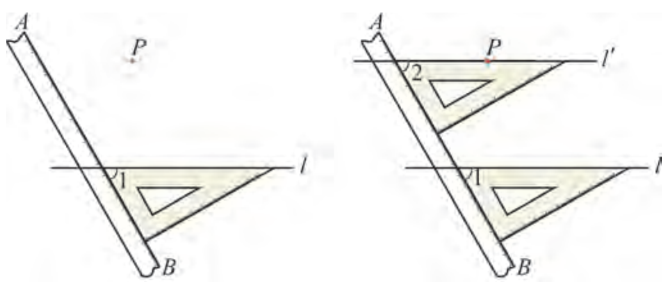


图　10－12

关于平行线,有如下的**基本事实**:

经过直线外一点,有且只有一条直线平行于这条直线.

观察

如图 10-13,如果直线 $a /\!/ c$, $b /\!/ c$,想一想直线 a 与 b 有怎样的位置关系?

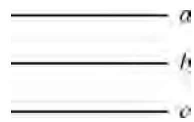


图 10-13

通过上面观察有:

如果两条直线和第三条直线平行,那么这两条直线平行. 即

如果直线 $a /\!/ c$, $b /\!/ c$,那么直线 $a /\!/ b$.

画平行线时,在三角尺移动的过程中(图 10-12),直尺边 AB 起着"基准线"的作用,它将保持直线 l 与直尺边 AB 的夹角 $\angle 1$ 和直线 l' 与直尺边 AB 的夹角 $\angle 2$ 相等,使得所画直线 l' 与直线 l 平行.

现在要研究在同一平面内的两条直线 a 和 b 是否平行,同样也需要一条"基准线",通过它与直线 a 和 b 的夹角来进行讨论.

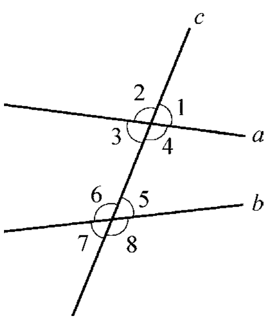


图 10-14

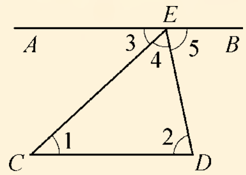
如图 10-14,两条直线 a 和 b 被第三条直线 c(相当于"基准线")所截,其中 $\angle 1$ 和 $\angle 5$,分别在直线 a 和 b 相同的一侧,并且位于直线 c 的同旁,具有这样位置关系的一对角叫做**同位角**(corresponding angles).

同样,$\angle 3$ 与 $\angle 5$ 都在直线 a 和 b 之间,并且位于直线 c 的两旁,具有这样位置关系的一对角叫做**内错角**(alternate interior angles);$\angle 4$ 与 $\angle 5$ 都在直线 a 和 b 之间,并且位于直线 c 的同旁,具有这样位置关系的一对角叫做**同旁内角**

(interior angles on the same side).

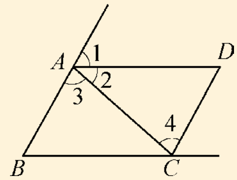
练习

1. 在图 10－14 中，还有哪几对同位角、内错角、同旁内角？
2. 如图，直线 AB，CD 被直线 CE 所截，与 $\angle 1$ 成内错角的是________；与 $\angle 1$ 成同旁内角的是________；直线 AB，CD 被直线 DE 所截，与 $\angle 2$ 成内错角的是________；与 $\angle 2$ 成同旁内角的是________.



(第 2 题)

3. 如图，$\angle 1$ 与 $\angle D$，$\angle 1$ 与 $\angle B$，$\angle 3$ 与 $\angle 4$，$\angle B$ 与 $\angle BCD$，$\angle 2$ 与 $\angle 4$ 分别是哪两条直线被哪一条直线所截得到的？它们中的每一对角分别叫做什么角？



(第 3 题)

观察

如图 10－12，在用三角尺和直尺画平行线时，三角尺紧靠着直尺移动，所画直线 l' 与 l 平行，这时 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 相等.

如图 10－15，在画平行线时，如三角尺移动过程中没紧靠直尺（这时 $\angle 2 > \angle 1$），所画直线 l' 与 l 平行吗？

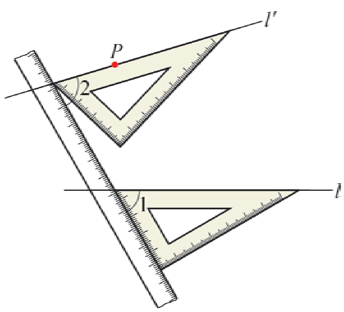


图 10－15

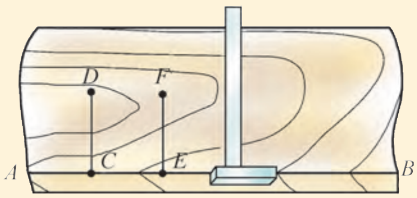
可以看到，同位角 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是否相等，决定了直线 l 与 l' 是否平行. 由此我们得到如下**基本事实**：

两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行. 简单地说，**同位角相等，两直线平行.**

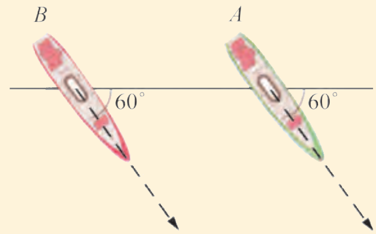
这是判定两条直线平行的第 1 种方法.

练习

1. 木工师傅在画线时，用一种叫做角尺的工具画榫(sǔn)眼线. 如图，把角尺的一边紧靠木料的边 AB，滑动角尺画出的两条直线 CD 和 EF 就是平行线. 你能说出这样做的依据吗?



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，如果油轮 A 和油轮 B 继续沿着这两条航线航行，它们会有相撞的危险吗? 为什么?
3. 读语句，画图形：

（1）点 P 是直线 AB 外一点，直线 CD 经过点 P，与直线 AB 平行；

（2）直线 AB，CD 相交于点 O，点 P 是直线 AB，CD 外一点，直线 EF 经过点 P，且与直线 AB 平行，交直线 CD 于点 E.

思考

如图 10－16，直线 a，b 被直线 c 所截，如果内错角 $\angle 2$ 和 $\angle 4$ 相等，你能根据上面的基本事实，说明直线 $a \parallel b$ 吗?

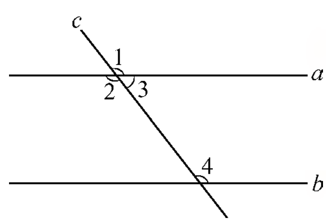


图　10－16

由于 $\angle 2=\angle 4$，又 $\angle 2=\angle 1$（为什么？），故 $\angle 1=\angle 4$，即同位角相等，根据上面的基本事实，得直线 $a \parallel b$. 这样，我们可以得到判定两条直线平行的第 2 种方法：

两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两条直线平行. 简单地说，**内错角相等，两直线平行.**

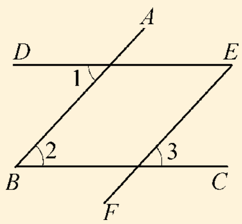
你能说明道理吗？与同伴交流一下.

类似地，利用同旁内角（$\angle 3$ 与 $\angle 4$）之间的关系，根据上面的基本事实，我们可以得到判定两条直线平行的第 3 种方法：

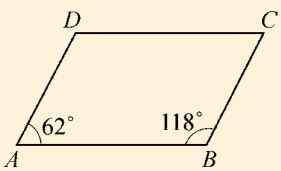
两条直线被第三条直线所截，如果同旁内角互补，那么这两条直线平行. 简单地说，**同旁内角互补，两直线平行.**

练习

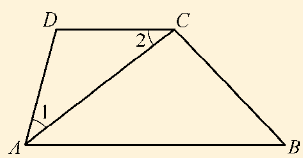
1. 如图，如果 $\angle 1=47^\circ$，$\angle 2=47^\circ$，$\angle 3=47^\circ$，可以判定哪些直线平行？判定的依据分别是什么？



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

2. 如图，若 $\angle A=62^\circ$，$\angle B=118^\circ$，可以判定哪两条直线平行？判定的依据是什么？

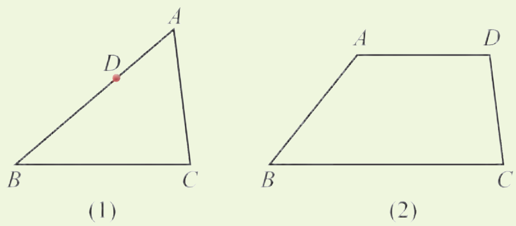
3. 如图，已知 AC 平分 $\angle DAB$，$\angle 1=\angle 2$. 由 AC 平分 $\angle DAB$，得 $\angle 1=$________，又因为 $\angle 1=\angle 2$，所以 $\angle 2=$________. 所以 $AB\parallel$________.

习题 10.2

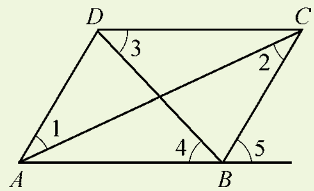
1. 读语句、画图形：

(1) 在图(1)中，画 $DE \parallel BC$ 交 AC 于点 E，画 $DF \parallel AC$ 交 BC 于点 F；

(2) 在图(2)中，画 $AE \parallel DC$ 交 BC 于点 E.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 看图填空：

(1) 由 $\angle 1 = \angle 2$，可以得到________$\parallel$________，依据是________________；

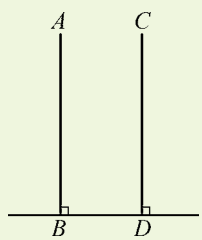
(2) 由 $\angle 3 = \angle 4$，可以得到________$\parallel$________，依据是________________；

(3) 由 $\angle 5 = \angle DAB$，可以得到________$\parallel$________，依据是________________；

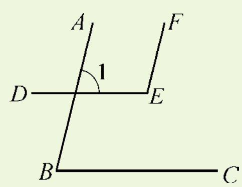
(4) 要得到 $AD \parallel BC$，需 $\angle DAB +$________ $=180°$，依据是________________；

(5) 要得到 $AB \parallel DC$，需________ $+$________ $=180°$，依据是________________.

3. 如图，如果直线 $AB \perp BD$，$CD \perp BD$，B，D 分别为垂足，那么直线 AB 和 CD 平行吗？为什么？由此你能得到什么结论？



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 如图，已知 $\angle 1$ 与 $\angle E$ 互补，$\angle 1 = \angle B$，试指出图中哪几组直线互相平行，并说明理由.

10.3 平行线的性质

观察

如图 10－17，练习本上的横线都是相互平行的，从中任选两条分别记为 AB，CD；画一条直线 EF 分别与 AB，CD 相交得 8 个角.

（1）任选一对同位角（如 $\angle 1$ 与 $\angle 5$），量一量它们的度数，它们的大小有什么关系？

（2）再任选一对同位角（如 $\angle 2$ 与 $\angle 6$），量一量它们的度数，它们的大小有什么关系？

由此你能得到什么结论？

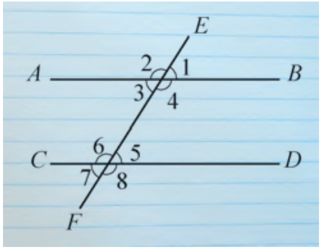


图 10－17

平行线有如下性质：

性质 1　两条平行线被第三条直线所截，同位角相等. 简单地说，**两直线平行，同位角相等.**

本性质在后面学习时将给出证明.

思考

在图 10－17 中，当 $AB // CD$ 时，你还会发现内错角 $\angle 3$ 和 $\angle 5$ 的大小有什么关系？同旁内角 $\angle 4$ 和 $\angle 5$ 之间又有什么关系？能说明理由吗？

由平行线的性质 1,可以推得平行线的另外两个性质:

性质 2 **两条平行线被第三条直线所截,内错角相等.简单地说,两直线平行,内错角相等.**

性质 3 **两条平行线被第三条直线所截,同旁内角互补.简单地说,两直线平行,同旁内角互补.**

例 如图 10－18,已知点 D, E, F 分别在三角形 ABC 的边 AB, AC, BC 上,且 $DE \parallel BC$, $\angle B = 48°$.

(1) 试求 $\angle ADE$ 的度数;

(2) 如果 $\angle DEF = 48°$, 那么 EF 与 AB 平行吗?

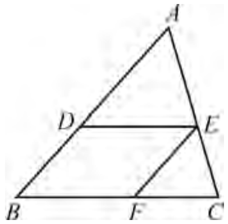


图 10－18

解 (1) 因为 $DE \parallel BC$,所以 $\angle ADE = \angle B = 48°$.

(2) 由(1),得 $\angle ADE = 48°$, 而 $\angle DEF = 48°$, 所以 $\angle ADE = \angle DEF$. 根据"内错角相等,两直线平行",可以得到 $EF \parallel AB$.

练习

1. 看图填空:

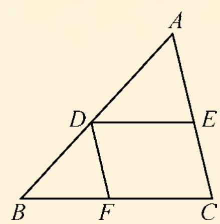
(1) 由 $DE \parallel BC$, 可以得到 $\angle ADE =$________,依据是________;

(2) 由 $DE \parallel BC$, 可以得到 $\angle DFB =$________,依据是________;

(3) 由 $DE \parallel BC$, 可以得到 $\angle C +$________$=180°$,依据是________;

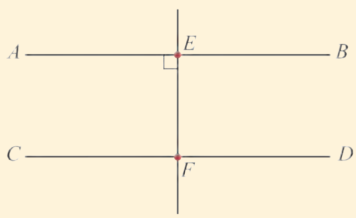
(4) 由 $DF \parallel AC$, 可以得到 $\angle AED =$________,依据是________;

(5) 由 $DF \parallel AC$, 可以得到 $\angle C =$________,依据是________.

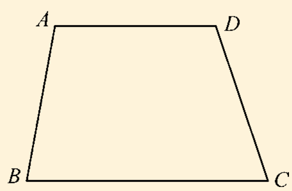


(第 1 题)

2. 如图, 直线 $AB \parallel CD$,直线 EF 分别交 AB 于点 E、交 CD 于点 F,且 $\angle AEF = 90°$,求 $\angle DFE$ 的度数. 由此你能得到直线 EF 与直线 CD 有怎样的位置关系?



(第 2 题)



(第 3 题)

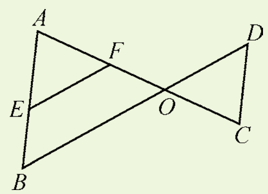
3. 如图,在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle C = 71°$,试求 $\angle D$ 的度数.

习题 10.3

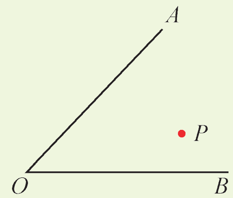
1. 看图填空：

（1）由 $\angle A = \angle C$，可以得到________ $/\!/$ ________，依据是________，再由________ $/\!/$ ________，可以得到 $\angle B = \angle D$，依据是________________；

（2）由 $EF /\!/ BO$，可以得到 $\angle EFO =$ ________，依据是________________.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，$\angle AOB$ 内有一点 P：

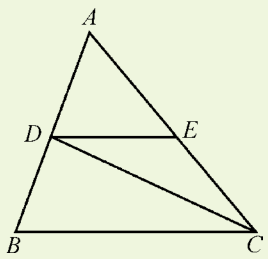
（1）过点 P 画直线 $PC /\!/ OB$ 交 OA 于点 C；

（2）过点 P 画直线 $PD /\!/ OA$ 交 OB 于点 D；

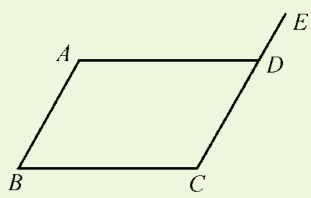
（3）写出图中互补的角；

（4）写出图中相等的角.

3. 如图，已知 $DE /\!/ BC$，CD 是 $\angle ACB$ 的平分线，$\angle B = 70°$，$\angle ACB = 50°$，求 $\angle EDC$ 与 $\angle BDC$ 的度数.



（第 3 题）



（第 4 题）

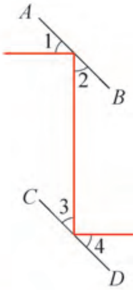
4. 如图，$AD /\!/ BC$，$AB /\!/ EC$，$\angle B = 60°$，求 $\angle ADE$ 的度数.

数学园地

潜望镜是潜水艇中用来从水下观察水面上事物的一种仪器，它通过两个平行的平面镜反射来实现观察. 如图 10－19，$AB\parallel CD$，根据光的反射原理，可以得到 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$. 假如某人在观察时，$\angle 4=45°$，试求 $\angle 1$ 的度数.

(1)

(2)



(3)

图　10－19

10.4 平　移

如图 10－20，传送带上的货物，随着传送带的运动，从一处被移动到另一处；吊车上的物体，随着吊车的运动被上下(或左右)移动，这些都反映了日常生活中，物体沿着某一方向平行移动的现象.

(1)　　(2)

图　10－20

在用直尺和三角尺画平行线时(图 10－21)，三角尺的位置变化，反映了在平面内一个图形(三角形)沿着一条直线平行移动的情况.

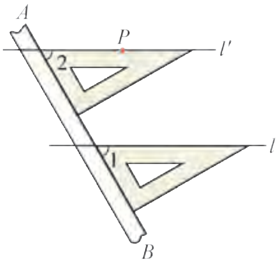
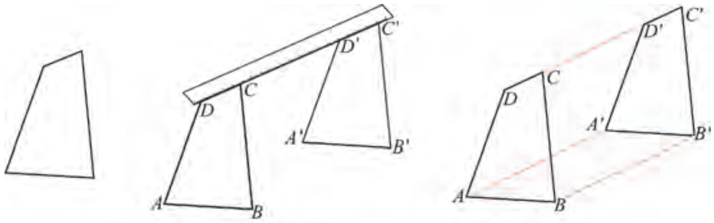


图　10－21

操作

1. 如图 10－22(1)，在一张硬纸上剪下一个四边形.



(1)　　(2)　　(3)

图　10－22

2. 如图 10－22(2)，用剪得的四边形纸片，先在纸上画出四边形 $ABCD$，再把直尺靠紧边 DC，将四边形纸片沿着直尺移动到另一位置，画出纸片移动后的四边形$A'B'C'D'$.

思考

如图 10－22(3)，连接 AA'，BB'，CC'，DD'，这些线段的位置、大小分别有怎样的关系？

在平面内，一个图形沿某个方向移动一定的距离，这种图形的变换叫做**平移**(translation). 平移时，原图形上的所有点都沿同一个方向移动相同的距离. 原图形上一点 A 平移后成为点 A'，这样的两点叫做**对应点**.

一个图形和它经过平移后所得的图形中，连接各组对应点的线段互相平行(或在同一条直线上)且相等.

平移只改变图形的位置，不改变图形的形状和大小.

平移在建筑、印染、雕刻等领域有着广泛的应用. 图 10－23 中的图案都可以看作是由一个基本图形经过平移得到的.

(1) 敦煌图案中二方连续边饰纹样

(2) 蓝印花布图案

图　10－23

信息技术应用

用“几何画板”软件作图形的平移

1. 打开“几何画板”软件，任意画出一个图形并选中，选择“变换”菜单中的“平移”命令（图 10－24），在弹出的“平移”对话框的“平移变换”选项中选择“直角坐标”选项，再在“水平方向”和“垂直方向”的“固定距离”中分别输入 9 和 5（图 10－25），点击“平移”按钮，得到平移后的新图形.

图 10-24

图 10-25

2. 选中平移前后相对应的两个点 A，A'，选择“构造”菜单中的“线段”命令（图 10－26），得到线段 AA'. 同理，可得线段 BB'，CC'.

3. 选中线段 AA'，BB'，CC'，选择“度量”菜单中的“长度”命令（图 10－27），得到这些线段的长度（图 10－28）.

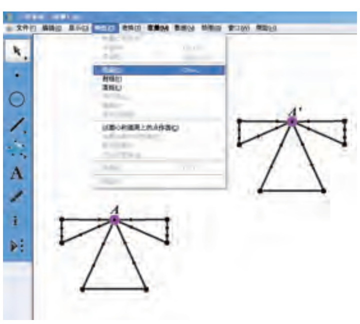


图 10-26

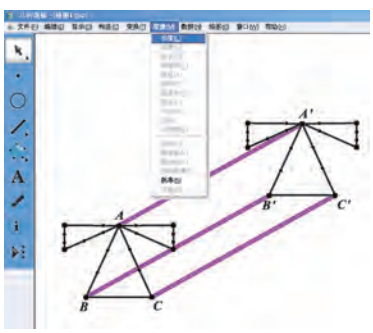


图 10-27

4. 选中点 B 和线段 CC'，选择“构造”菜单中的“平行线”命令(图 10－29)，得到过点 B 平行于线段 CC'的直线(图 10－30).

观察度量的结果和线段 AA'，BB'，CC' 的位置关系，你发现了什么？

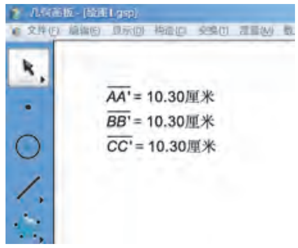


图　10－28

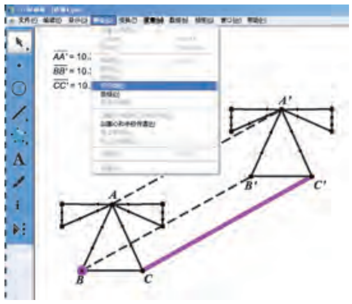


图　10－29

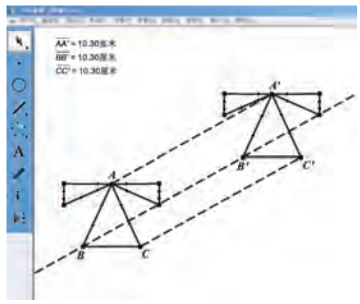
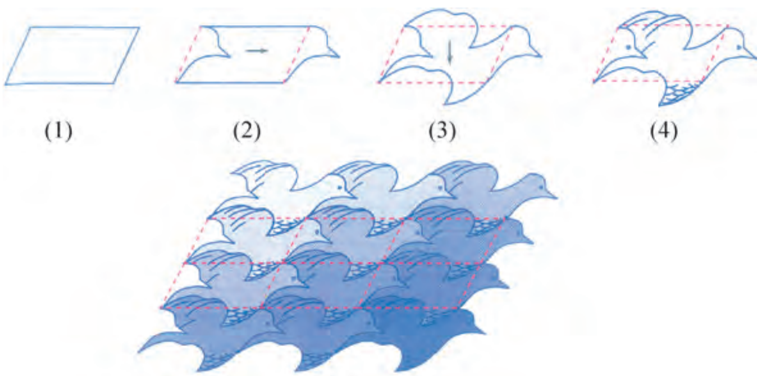


图　10－30

数学园地

类比图 10－31 制作小鸟图案(有条件的同学可用计算机来完成)，自行制作一个图案：



(1)　(2)　(3)　(4)

(5)

图　10－31

数学活动

钥匙复制原理

1. 观察钥匙复制机(图 10－32)复制钥匙的过程,你能说出复制的原理吗?

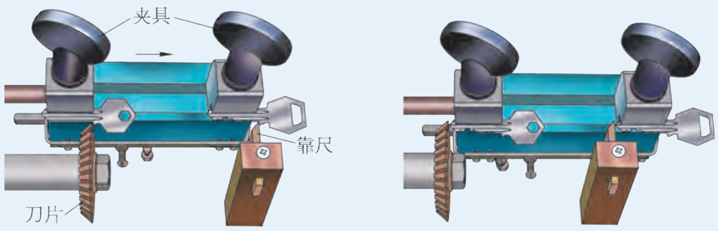


图 10－32

2. 根据你所发现的复制钥匙的原理,在图10－33的左边画出与右边钥匙的形状和大小相同的图形.

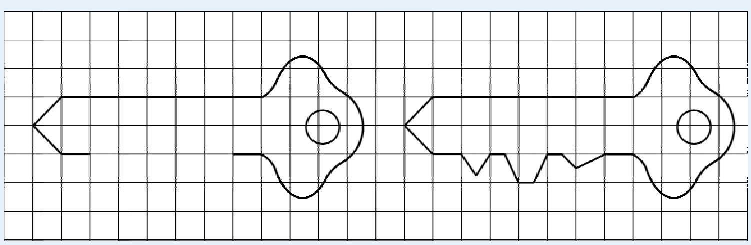
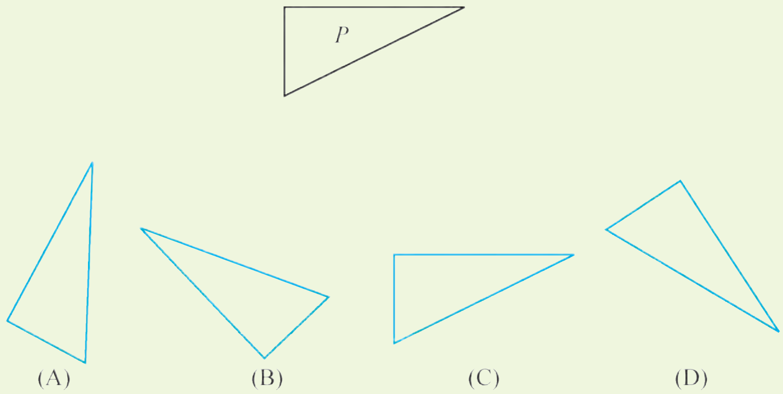


图 10－33

在工厂里,靠模车床加工特殊形状的工件时,也是根据上述原理来完成的.

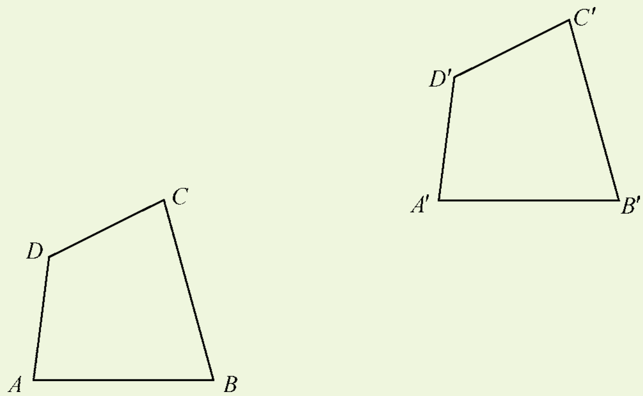
习题 10.4

1. 如图,由图形 P 经过平移得到的图形是(　　).



(第 1 题)

2. 将图形 $ABCD$ 平移至新位置,得到图形 $A'B'C'D'$,请用量角器和直尺测量移动方向与水平方向所成的角度以及平移距离.



(第 2 题)

3. 搜集应用平移制作的图案,带到班上进行交流.

小结·评价

一、内容整理

二、主要知识回顾

1. 对顶角的性质：________________________________.

2. 垂线的相关基本事实和性质：

（1）过一点有且只有________条直线垂直于已知直线；

（2）在连接直线外一点与直线上各点的线段中，________最短.

3. 平行线的判定方法：

（1）两条直线被第三条直线所截，如果________，那么这两条直线平行；

（2）两条直线被第三条直线所截，如果________，那么这两条直线平行；

（3）两条直线被第三条直线所截，如果________，那么这两条直线平行.

4. 平行线的相关基本事实和性质：

（1）经过直线外一点，有且只有________条直线平行于这条直线；

（2）如果两直线平行，那么同位角________，内错角________，同旁内角________.

5. 确定平移的要素是：（1）方向；（2）距离.

经过平移得到图形的形状和大小________，一个图形和它经过平移后所得的图形中，连接各组对应点的线段________________________.

三、自评与互评

1. 结合“内容整理”和“主要知识回顾”，检查自己是否掌握了本章所学的知识.

2. 寻找日常生活中的相交线、平行线的例子或图片，并与同伴进行交流.

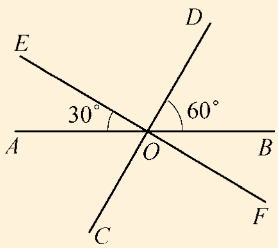
3. 把本章内容与小学已学过的内容比较，有些什么新认识？与同伴交流.

A组 复习题

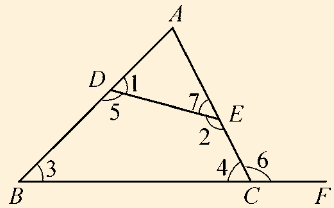
1. 如图，直线 AB，CD，EF 相交于点 O：

（1）写出 $\angle EOD$，$\angle EOC$ 的对顶角；

（2）如果 $\angle AOE = 30°$，$\angle BOD = 60°$，求 $\angle COF$ 和 $\angle COB$ 的度数.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 观察图形，回答下列问题：

（1）$\angle 1$ 的同位角是哪些角？

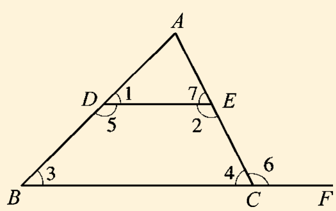
（2）$\angle 2$ 的内错角是哪些角？

（3）$\angle 3$ 的同旁内角是哪些角？

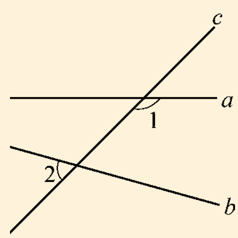
3. 如图：

（1）已知 $DE \parallel BF$，写出图中相等的角与互补的角；

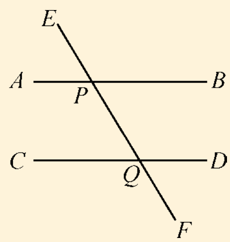
（2）写出使 $DE \parallel BF$ 成立的条件，你能写出多少个？



（第 3 题）



（第 4 题）



（第 5 题）

4. 如图，$\angle 1 = 135°$，$\angle 2 = 60°$，直线 a 与 b 平行吗？为什么？

5. 如图，直线 AB，CD 与直线 EF 相交于点 P，Q，$\angle APE = \angle CQE$，$\angle APQ = 2\angle CQE$，求 $\angle APQ$、$\angle CQE$、$\angle BPF$ 的度数.

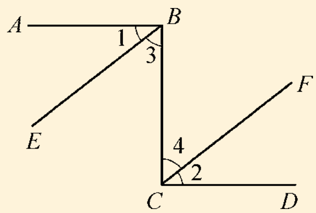
6. 下列判断两条直线垂直的方法是否正确？

(1) 若两条直线相交所成的 4 个角相等,则这两条直线互相垂直. (　　)

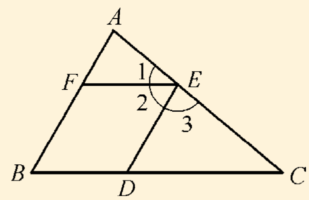
(2) 若一条直线垂直于两条平行直线中的一条,则该直线也垂直于平行直线中的另一条. (　　)

(3) 两条直线相交,若有一组对顶角互补,则这两条直线互相垂直. (　　)

7. 如图,$AB \perp BC$, $CD \perp BC$,且 $\angle 1 = \angle 2$,指出图中的平行线.



(第 7 题)



(第 8 题)

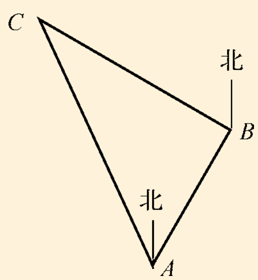
8. 如图,已知 $\angle 1 : \angle 2 : \angle 3 = 2 : 3 : 4$, $\angle AFE = 60°$, $\angle BDE = 120°$, 试写出图中互相平行的直线,并给出判定的依据.

B组 复习题

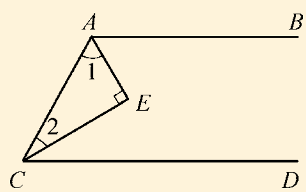
1. 如图,点 C 在点 B 的北偏西 60°的方向上,点 C 在点 A 的北偏西 30°的方向上.

(1) 试求 $\angle C$ 的度数;

(2) 若 $AB \perp BC$,则点 A 在点 B 的什么方向上?



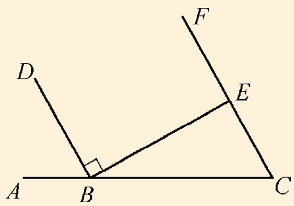
(第 1 题)



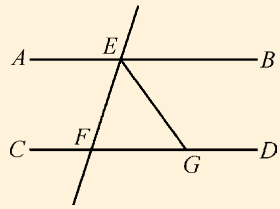
(第 2 题)

2. 如图,AE 平分 $\angle CAB$,CE 平分 $\angle ACD$, 且 $\angle 1 + \angle 2 = 90°$, 请说明 AB 与 CD 的位置关系.

3. 如图，点 B 在 AC 上，$BD \perp BE$，$\angle EBC + \angle C = 90°$，那么 CF 与 BD 平行吗？请说明理由.



（第 3 题）

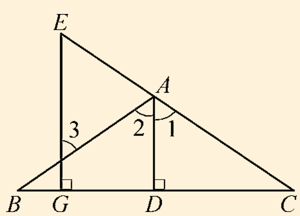


（第 4 题）

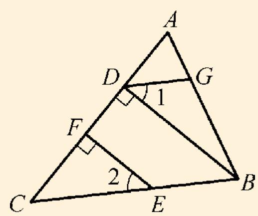
4. 如图，直线 $AB \parallel CD$，直线 EF 分别交 AB，CD 于点 E，F，EG 平分 $\angle BEF$，交 CD 于点 G，已知 $\angle EFG = 72°$，求 $\angle EGF$ 的度数.

C组 复习题

1. 如图，已知 $AD \perp BC$，$EG \perp BC$，D，G 分别是垂足，又 $\angle GEC = \angle 3$，那么 AD 平分 $\angle BAC$ 吗？为什么？



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知 $BD \perp AC$，$EF \perp AC$，垂足分别为 D，F，且 $\angle 1 = \angle 2$，那么 $\angle ADG$ 与 $\angle C$ 相等吗？请说明理由.

附录　部分中英文词汇索引

（续表）

中　文	英　文	页　码
增根	extraneous root	106
对顶角	opposite angles	116
垂线	perpendicular line	118
垂足	foot of a perpendicular	118
平行线	parallel lines	123
同位角	corresponding angles	124
内错角	alternate interior angles	124
同旁内角	interior angles on the same side	124
平移	translation	134

后记

1999年，我们根据《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲(试用修订版)》，编写了一套华东版初中数学教材，经三年实验后，于2002年报教育部经全国中小学教材审定委员会审查通过.

2001年，国家颁布了《基础教育课程改革纲要(试行)》及《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》，正式启动了新一轮中小学课程、教材改革. 本套教科书就是根据课程标准，在吸取了华东版教材实验过程中的经验后重新编写的，并于2004年经全国中小学教材审定委员会初审通过. 现教育部决定全面启动义务教育课程标准实验教材的修订工作，我们已切实把《义务教育数学课程标准(2011年版)》的要求落实到新修订的教材中，使教材的质量进一步得到提升，特色更加鲜明.

本套教材在送审和实验过程中，得到了许多专家、学者、教研人员与广大师生的关爱，特别是人民教育出版社张孝达先生与陈宏伯先生直接参与教材的整体设计和章节审稿，他们以实际行动给予我们很大的支持与鼓舞，我们衷心地感谢他们.

为了做好这次的修订工作，我们调整并充实了编写队伍，本套教科书编写组主要人员有：

吴之季　苏　淳　杜先能　徐子华　郭要红　胡　涛　陈先荣　王南林　胡茂侠　邱广东

本册主要编写人员有：

曹太飞　宋延钧　许晓天　陈先荣　江兴代　吴中才　查建敏　刘德华　马　林　白　莽　苏明强　李庆社　徐　勇　曾令鹏

此外，参与本册修改工作的还有：

蒋　振　司擎天　王应楼　许胜发　马太平　田　杰　胡根保　周学普　张文著　丁遵标　李国凯

教材建设是一项长期任务，需要通过实验、修改，反复锤炼. 这不仅需要全体编写人员的努力，还要有广大师生的积极支持与参与，恳请使用本套教材的师生批评指正.

新时代数学编写组

2013年9月

说　明

本书下列图片由东方 IC 提供：P1 章头图、图 6－3 张侃、P8 第 10 题图 天鹰、图 7－5、图 7－10、图 7－13、图 7－14、P44 章头图、图 8－2、图 8－4、P58 第 4 题图 NASA、P88 章头图 严大明、P115 章头图 茹伟珍、图 10－2(1)、图 10－20(1).

绿色印刷产品

审批编号：皖费核（2022年春季）第0156号
举报电话：12315

ISBN 978-7-5478-1332-4

定价：9.71元