



义务教育教科书
(五·四学制)

七年级 上册

数学



$$\frac{x}{60} - \frac{x}{70} = 1$$

$$\text{时间} = \frac{\text{路程}}{\text{速度}}$$

人民教育出版社

义务教育教科书
(五·四学制)

数学

七年级
上册

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 | 编著 |

人教版®

人民教育出版社

· 北京 ·

主 编：林 群
副 主 编：田载今 薛 彬 李海东
本册主编：薛 彬

主要编写人员：田载今 李海东 李龙才 薛 彬 刘金英 吴晓燕 雷晓莉
责任编辑：宋莉莉
美术编辑：王俊宏

插 图：王俊宏 文鲁工作室（封面）

义务教育教科书（五·四学制） 数学 七年级 上册

人民教育出版社 课程教材研究所 编著
中学数学课程教材研究开发中心

出 版 人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编：100081）
网 址 <http://www.pep.com.cn>

人 教 版[®]

版权所有·未经许可不得采用任何方式擅自复制或使用本产品任何部分·违者必究
如发现内容质量问题，请登录中小学教材意见反馈平台：jcyifk.pep.com.cn
如发现印、装质量问题，影响阅读，请与当地新华书店或印厂联系调换。
厂址：兰西榆林开发区 电话：0455-7431818 邮编：151500
质量监督电话：0451-84632411

本册导引

亲爱的同学，七年级的学习开始了。

你将要学习的这本书是我们根据《义务教育数学课程标准（2011年版）》编写的教科书，这是你在六～九年级要学习的八册数学教科书中的第三册。

在生活中你会遇到很多实际问题，比如计算路程、选择购物方案、合理分配任务等，“一元一次方程”将给你提供解决这些问题的一种数学工具。通过分析问题中的数量关系，并利用其中的相等关系列出方程，实际问题就转化为数学问题，从而通过数学问题来解决实际问题。这是解决问题的一种常用方法，相信你一定能掌握。

在“相交线与平行线”中，我们将对“相交”“垂直”“平行”等有更深入的了解。你会发现，生活中许多问题都可以用这些知识来分析解决。通过“平移”你会得到美丽的图案，许多好看的动画也是用它实现的。

面积为 2 dm^2 的正方形的边长是多少？体积为 3 dm^3 的正方体的棱长是多少？解决这些问题，会遇到一个新朋友——无理数。它的到来使数扩充到新的领域，“实数”会使我们对数的认识大开眼界。

如果将校园的建筑物用点来表示，在绘制校园的平面图时，你能用什么方法确定各个建筑物的位置？“平面直角坐标系”可以帮助你。平面直角坐标系是一种重要的数学工具，它不仅可以帮助我们确定地理位置，而且能成功地架起数与形之间的桥梁。掌握了它，你会发现许多问题的解决变得直观而简明。

数学伴随着我们成长，数学伴随着我们进步，数学伴随着我们成功。让我们一起随着这本书，畅游神奇、美妙的数学世界吧！

目 录

第十一章 一元一次方程



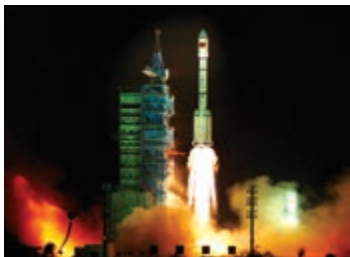
11.1 从算式到方程	2
阅读与思考 “方程”史话	8
11.2 解一元一次方程（一）	
——合并同类项与移项	10
实验与探究 无限循环小数化分数	16
11.3 解一元一次方程（二）	
——去括号与去分母	17
11.4 一元一次方程与实际问题的应用	24
数学活动	33
小结	34
复习题 11	35

第十二章 相交线与平行线



12.1 相交线	38
观察与猜想 看图时的错觉	46
12.2 平行线及其判定	47
12.3 平行线的性质	54
信息技术应用 探索两条直线的位置关系	62
12.4 平移	64
数学活动	68
小结	70
复习题 12	71

第十三章 实数



13.1 平方根	76
13.2 立方根	85
13.3 实数	89
阅读与思考 为什么说 $\sqrt{2}$ 不是有理数	94
数学活动	95
小结	96
复习题 13	97

第十四章 平面直角坐标系



14.1 平面直角坐标系	100
阅读与思考 用经纬度表示地理位置	108
14.2 平面直角坐标系的简单应用	109
数学活动	117
小结	119
复习题 14	120

部分中英文词汇索引

123

第十一章 一元一次方程

在小学，我们已经见过像 $2x = 50$, $3x + 1 = 4$, $5x - 7 = 8$ 这样的简单方程，其中字母 x 表示未知数.

方程是含有未知数的等式，它是应用广泛的数学工具. 研究许多问题时，人们经常用字母表示其中的未知数，通过分析数量关系，列出方程表示相等关系，然后解方程求出未知数.

怎样根据问题中的数量关系列方程？怎样解方程？这是本章研究的主要问题.

通过学习本章中丰富多彩的问题，你将进一步感受到方程的作用，并学习利用一元一次方程解决问题的方法.

$$\text{时间} = \frac{\text{路程}}{\text{速度}} \quad \frac{x}{60} - \frac{x}{70} = 1$$

	路程/km	速度/(km/h)	时间/h
客车	x	70	$\frac{x}{70}$
卡车	x	60	$\frac{x}{60}$



11.1 从算式到方程

11.1.1 一元一次方程

问题 一辆客车和一辆卡车同时从 A 地出发沿同一公路同方向行驶，客车的行驶速度是 70 km/h，卡车的行驶速度是 60 km/h，客车比卡车早 1 h 经过 B 地. A, B 两地间的路程是多少？

你会用算术方法解决这个问题吗？列算式试试.

如果设 A, B 两地相距 x km，你能分别列式表示客车和卡车从 A 地到 B 地的行驶时间吗？

匀速运动中，时间 = $\frac{\text{路程}}{\text{速度}}$. 根据问题的条件，客车和卡车从 A 地到 B 地的行驶时间，可以分别表示为 $\frac{x}{70}$ h 和 $\frac{x}{60}$ h.

因为客车比卡车早 1 h 经过 B 地，所以 $\frac{x}{70}$ 比

$\frac{x}{60}$ 小 1，即

$$\frac{x}{60} - \frac{x}{70} = 1. \quad \textcircled{1}$$

我们已经知道，方程是含有未知数的等式. 等式①中的 x 是未知数，这个等式是一个方程.

通过本章的学习，我们将能够从方程①解出未知数的值 $x=420$ ，从而求出 A, B 两地间的路程为 420 km.

用算术方法解题时，列出的算式表示用算术方法解题的计算过程，其中只含有已知数；而方程是根据问题中的相等关系列出的等式，其中既含有已知数，又含有用字母表示的未知数. 方程

想一想，如何用式子表示两车的行驶时间之间的关系？

通常用 x, y, z 等字母表示未知数，法国数学家笛卡儿是最早这样做的人. 我国古代用“天元、地元、人元、物元”等表示未知数.

为我们解决许多问题带来方便. 通过今后的学习, 你会逐步认识: 从算式到方程是数学的进步.



思考

对于上面的问题, 你还能列出其他方程吗? 如果能, 你依据的是哪个相等关系?

列方程时, 要先设字母表示未知数, 然后根据问题中的相等关系, 写出含有未知数的等式——**方程**(equation).

例 1 根据下列问题, 设未知数并列出方程:

(1) 用一根长 24 cm 的铁丝围成一个正方形, 正方形的边长是多少?

(2) 一台计算机已使用 1 700 h, 预计每月再使用 150 h, 经过多少月这台计算机的使用时间达到规定的检修时间 2 450 h?

(3) 某校女生占全体学生数的 52%, 比男生多 80 人, 这个学校有多少学生?

解: (1) 设正方形的边长为 x cm.

列方程

$$4x = 24.$$

(2) 设 x 月后这台计算机的使用时间达到 2 450 h, 那么在 x 月里这台计算机使用了 $150x$ h.

列方程

$$1\,700 + 150x = 2\,450.$$

(3) 设这个学校的学生数为 x , 那么女生数为 $0.52x$, 男生数为 $(1 - 0.52)x$.

列方程

$$0.52x - (1 - 0.52)x = 80.$$

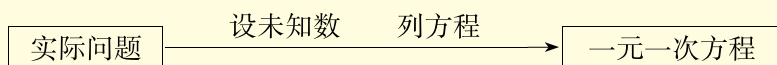
你能解释这些方程中等号两边各表示什么意思吗? 体会列方程所依据的相等关系.

上面各方程都只含有一个未知数 (元), 未知数的次数都是 1, 等号两边都是整式, 这样的方程叫做**一元一次方程** (linear equation in one unknown).



归纳

上面的分析过程可以表示如下：



分析实际问题中的数量关系，利用其中的相等关系列出方程，是用数学解决实际问题的一种方法。

列方程是解决问题的重要方法，利用方程可以求出未知数。

可以发现，当 $x=6$ 时， $4x$ 的值是 24，这时方程 $4x=24$ 等号左右两边相等。 $x=6$ 叫做方程 $4x=24$ 的解。这就是说，方程 $4x=24$ 中未知数 x 的值应是 6。同样地，当 $x=5$ 时， $1\,700+150x$ 的值是 2 450，这时方程

$$1\,700+150x=2\,450$$

等号左右两边相等。 $x=5$ 叫做方程 $1\,700+150x=2\,450$ 的解。这就是说，方程

$$1\,700+150x=2\,450$$

中未知数 x 的值应是 5。

解方程就是求出使方程中等号左右两边相等的未知数的值，这个值就是方程的解(solution)。



思考

$x=1\,000$ 和 $x=2\,000$ 中哪一个是方程 $0.52x-(1-0.52)x=80$ 的解？

练习

根据下列问题，设未知数，列出方程：

1. 环形跑道一周长 400 m，沿跑道跑多少周，可以跑 3 000 m？
2. 甲种铅笔每支 0.3 元，乙种铅笔每支 0.6 元，用 9 元钱买了两种铅笔共 20 支，两种铅笔各买了多少支？
3. 一个梯形的下底比上底多 2 cm，高是 5 cm，面积是 40 cm^2 ，求上底。
4. 用买 10 个大水杯的钱，可以买 15 个小水杯，大水杯比小水杯的单价多 5 元，两种水杯的单价各是多少元？

11.1.2 等式的性质

我们可以直接看出像 $4x=24$, $x+1=3$ 这样的简单方程的解, 但是仅靠观察来解比较复杂的方程是困难的. 因此, 我们还要讨论怎样解方程. 方程是含有未知数的等式, 为了讨论解方程, 我们先来看看等式有什么性质.

像 $m+n=n+m$, $x+2x=3x$, $3\times 3+1=5\times 2$, $3x+1=5y$ 这样的式子, 都是等式. 我们可以用 $a=b$ 表示一般的等式.

请看图 11.1-1, 由它你能发现什么规律?

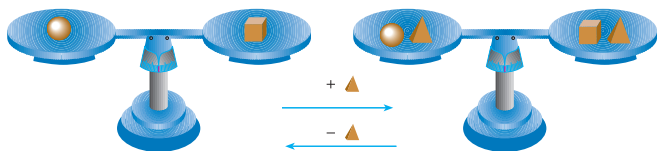


图 11.1-1

我们可以发现, 如果在平衡的天平的两边都加 (或减) 同样的量, 天平还保持平衡.

等式就像平衡的天平, 它具有与上面的事实同样的性质.

等式的性质 1 等式两边加 (或减) 同一个数 (或式子), 结果仍相等.

如果 $a=b$, 那么 $a\pm c=b\pm c$.

请看图 11.1-2, 由它你能发现什么规律?

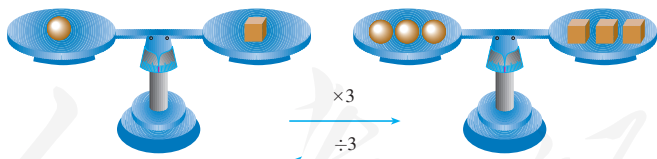


图 11.1-2

等式的性质 2 等式两边乘同一个数, 或除以同一个不为 0 的数, 结果仍相等.

如果 $a=b$, 那么 $ac=bc$;

如果 $a=b$ ($c\neq 0$), 那么 $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$.

例 2 利用等式的性质解下列方程：

$$(1) x+7=26; \quad (2) -5x=20; \quad (3) -\frac{1}{3}x-5=4.$$

分析：要使方程 $x+7=26$ 转化为 $x=a$ （常数）的形式，需去掉方程左边的 7，利用等式的性质 1，方程两边减 7 就得出 x 的值. 你可以类似地考虑另两个方程如何转化为 $x=a$ 的形式.

解：(1) 两边减 7，得

$$x+7-7=26-7.$$

于是

$$x=19.$$

(2) 两边除以 -5 ，得

$$\frac{-5x}{-5} = \frac{20}{-5}.$$

于是

$$x=-4.$$

(3) 两边加 5，得

$$-\frac{1}{3}x-5+5=4+5.$$

化简，得

$$-\frac{1}{3}x=9.$$

两边乘 -3 ，得

$$x=-27.$$

解以 x 为未知数的方程，就是把方程逐步转化为 $x=a$ （常数）的形式，等式的性质是转化的重要依据.

一般地，从方程解出未知数的值以后，可以代入原方程检验，看这个值能否使方程的两边相等. 例如，

将 $x=-27$ 代入方程 $-\frac{1}{3}x-5=4$ 的左边，得

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{3} \times (-27) - 5 \\ & = 9 - 5 = 4. \end{aligned}$$

方程的左右两边相等，所以 $x=-27$ 是方程 $-\frac{1}{3}x-5=4$ 的解.

练习

利用等式的性质解下列方程并检验:

(1) $x-5=6$;

(2) $0.3x=45$;

(3) $5x+4=0$;

(4) $2-\frac{1}{4}x=3$.

习题 11.1

复习巩固

1. 列等式表示:

- (1) 比 a 大 5 的数等于 8;
- (2) b 的三分之一等于 9;
- (3) x 的 2 倍与 10 的和等于 18;
- (4) x 的三分之一减 y 的差等于 6;
- (5) 比 a 的 3 倍大 5 的数等于 a 的 4 倍;
- (6) 比 b 的一半小 7 的数等于 a 与 b 的和.

2. 列等式表示:

- (1) 加法交换律;
- (2) 乘法交换律;
- (3) 分配律;
- (4) 加法结合律.

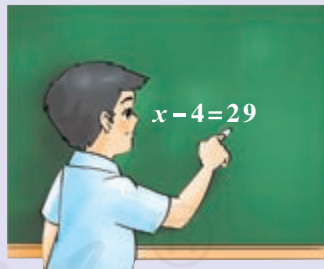
3. $x=3$, $x=0$, $x=-2$, 各是下列哪个方程的解?

- (1) $5x+7=7-2x$;
- (2) $6x-8=8x-4$;
- (3) $3x-2=4+x$.

4. 用等式的性质解下列方程:

- (1) $x-4=29$;
- (2) $\frac{1}{2}x+2=6$;
- (3) $3x+1=4$;
- (4) $4x-2=2$.

第 1 题是把文字语言“翻译”成等式.

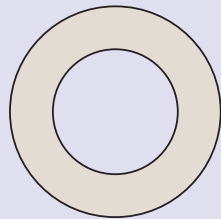


综合运用

列方程(第 5~10 题).

- 5. 某校七年级 1 班共有学生 48 人, 其中女生人数比男生人数的 $\frac{4}{5}$ 多 3 人, 这个班有男生多少人?
- 6. 把 1 400 元奖学金按照两种奖项奖给 22 名学生, 其中一等奖每人 200 元, 二等奖每人 50 元. 获得一等奖的学生有多少人?

7. 今年上半年某镇居民人均可支配收入为 5 109 元, 比去年同期增长了 8.3%, 去年同期这项收入为多少元?
8. 一辆汽车已行驶了 12 000 km, 计划每月再行驶 800 km, 几个月后这辆汽车将行驶 20 800 km?
9. 圆环形状如图所示, 它的面积是 200 cm^2 , 外沿大圆的半径是 10 cm, 内沿小圆的半径是多少?
10. 七年级 1 班全体学生为地震灾区共捐款 428 元, 七年级 2 班每个学生捐款 10 元, 七年级 1 班所捐款数比七年级 2 班少 22 元. 两班学生人数相同, 每班有多少学生?



(第 9 题)

拓广探索

11. 一个两位数个位上的数是 1, 十位上的数是 x . 把 1 与 x 对调, 新两位数比原两位数小 18, x 应是哪个方程的解? 你能想出 x 是几吗?



阅读与思考

“方程”史话

我们研究许多数学问题时, 可以发现其中的未知数不是孤立的, 它们与一些已知数之间有确定的联系, 这种联系常常表现为一定的相等关系, 把这种关系用数学形式写出来就是含有未知数的等式, 这种等式的数学专有名称是方程.

人们对方程的研究可以上溯到很早以前. 公元 820 年左右, 中亚细亚的数学家阿尔-花拉子米曾写过一本名叫《对消与还原》的书, 重点讨论方程的解法, 这本书对后来数学的发展产生了很大影响.

在很长时期内, 方程没有专门的表达形式, 而是使用一般的语言文字来叙述它们. 17 世纪时, 法国数学家笛卡儿最早提出用 x, y, z 这样的字母表示未知数, 把这些字母与普通数字同样看待, 用运算符号和等号将字母与数字连接起来, 就形成含有未知数的等式. 后来经过不断的简化改进, 方程逐渐演变成现在的表达形式, 例如 $5x + 7 = 16$, $x^2 - 4 = 0$, $3x + 4y = 5$ 等.

中国对方程的研究有悠久的历史. 汉语中“方程”一词最初源于讨论含多个未知数的问题, 著名中国古代数学著作《九章算术》大约成书于公元前 200~前 50 年, 其中有专门以“方程”命名的一章, 其中以一些实际应用问题为例, 给出了列由几个方程组成的方程组的解题方法. 中国古代数学家表示方程时, 只用算筹表示各未知数的系数, 而没有

使用专门的记法来表示未知数. 按照这样的表示法, 方程组被排列成长方形的数字阵, 这与现在代数学中的矩阵非常接近. 宋元时期, 中国数学家创立了“天元术”, 用“天元”表示未知数进而建立方程. 这种方法的代表作是数学家李冶写的《测圆海镜》(1248 年), 书中所说的“立天元一”相当于现在的“设未知数 x ”. 1859 年, 中国清代数学家李善兰翻译外国数学著作时, 开始将 equation (指含有未知数的等式) 一词译为“方程”, 即将含有未知数的一个等式称为方程, 而将含有未知数的多个等式的组合称为方程组, 至今一直这样沿用.



李善兰 (1811—1882)

随着数学的研究范围不断扩充, 方程被普遍使用, 它的作用越来越重要. 从初等数学中的简单代数方程, 到高等数学中的微分方程、积分方程, 方程的类型由简单到复杂不断地发展. 但是, 无论方程的类型如何变化, 形形色色的方程都是含有未知数的等式, 都表达涉及未知数的相等关系; 解方程的基本思想都是依据相等关系使未知数逐步化归为用已知数表达的形式. 这正是方程的本质所在.

人教版®

11.2 解一元一次方程（一）

——合并同类项与移项

我们已经知道，直接利用等式的基本性质可以解简单的方程，本节重点讨论如何利用“合并同类项”和“移项”解一元一次方程.

约公元 820 年，中亚细亚数学家阿尔-花拉子米写了一本代数书，重点论述怎样解方程. 这本书的拉丁文译本取名为《对消与还原》. “对消”与“还原”是什么意思呢？我们先讨论下面的内容，然后再回答这个问题.

问题 1 某校三年共购买计算机 140 台，去年购买数量是前年的 2 倍，今年购买数量又是去年的 2 倍. 前年这个学校购买了多少台计算机？

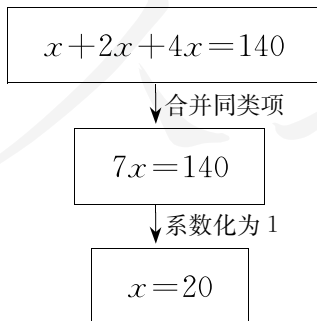
设前年购买计算机 x 台. 可以表示出：去年购买计算机 $2x$ 台，今年购买计算机 $4x$ 台. 根据问题中的相等关系：前年购买量 + 去年购买量 + 今年购买量 = 140 台，列得方程

$$x + 2x + 4x = 140.$$

把含有 x 的项合并同类项，得

$$7x = 140.$$

下面的框图表示了解这个方程的流程：



回顾本题列方程的过程，可以发现：“总量 = 各部分量的和”是一个基本的相等关系.

由上可知，前年这个学校购买了 20 台计算机.



思考

上面解方程中“合并同类项”起了什么作用？

例 1 解下列方程：

$$(1) 2x - \frac{5}{2}x = 6 - 8; \quad (2) 7x - 2.5x + 3x - 1.5x = -15 \times 4 - 6 \times 3.$$

解：(1) 合并同类项，得

$$-\frac{1}{2}x = -2.$$

系数化为 1，得

$$x = 4.$$

(2) 合并同类项，得

$$6x = -78.$$

系数化为 1，得

$$x = -13.$$

例 2 有一列数，按一定规律排列成 1, -3, 9, -27, 81, -243, … 其中某三个相邻数的和是 -1 701，这三个数各是多少？

分析：从符号和绝对值两方面观察，可发现这列数的排列规律：后面的数是它前面的数与 -3 的乘积. 如果三个相邻数中的第 1 个记为 x ，则后两个数分别是 $-3x$, $9x$.

解：设所求三个数分别是 x , $-3x$, $9x$.

由三个数的和是 -1 701，得

$$x - 3x + 9x = -1\,701.$$

合并同类项，得

$$7x = -1\,701.$$

系数化为 1，得

$$x = -243.$$

所以

$$-3x = 729,$$

$$9x = -2\,187.$$

答：这三个数是 -243, 729, -2 187.

知道三个数中的某个，就能知道另两个吗？

练习

1. 解下列方程:

$$(1) 5x - 2x = 9;$$

$$(2) \frac{x}{2} + \frac{3x}{2} = 7;$$

$$(3) -3x + 0.5x = 10;$$

$$(4) 7x - 4.5x = 2.5 \times 3 - 5.$$

2. 某工厂的产值连续增长, 去年是前年的 1.5 倍, 今年是去年的 2 倍, 这三年的总产值为 550 万元. 前年的产值是多少?

问题 2 把一些图书分给某班学生阅读, 如果每人分 3 本, 则剩余 20 本; 如果每人分 4 本, 则还缺 25 本. 这个班有多少学生?

设这个班有 x 名学生.

每人分 3 本, 共分出 $3x$ 本, 加上剩余的 20 本, 这批书共 $(3x + 20)$ 本.

每人分 4 本, 需要 $4x$ 本, 减去缺的 25 本, 这批书共 $(4x - 25)$ 本.

这批书的总数是一个定值, 表示它的两个式子应相等, 根据这一相等关系列得方程

$$3x + 20 = 4x - 25.$$

这批书的总数有几种表示法? 它们之间有什么关系? 本题哪个相等关系可作为列方程的依据呢?



思考

方程 $3x + 20 = 4x - 25$ 的两边都有含 x 的项($3x$ 与 $4x$)和不含字母的常数项(20 与 -25), 怎样才能使它向 $x = a$ (常数) 的形式转化呢?

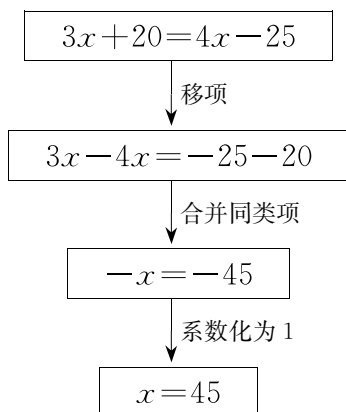
为了使方程的右边没有含 x 的项, 等号两边减 $4x$; 为了使左边没有常数项, 等号两边减 20. 利用等式的性质 1, 得

$$3x - 4x = -25 - 20.$$

上面方程的变形, 相当于把原方程左边的 20 变为 -20 移到右边, 把右边的 $4x$ 变为 $-4x$ 移到左边. 把某项从等式一边移到另一边时有什么变化?

像上面那样把等式一边的某项变号后移到另一边, 叫做**移项**.

下面的框图表示了解这个方程的流程.



回顾本题列方程的过程, 可以发现: “表示同一个量的两个不同的式子相等”是一个基本的相等关系.

由上可知, 这个班有 45 名学生.



思考

上面解方程中“移项”起了什么作用?

解方程时经常要“合并同类项”和“移项”, 前面提到的古老的代数书中的“对消”和“还原”, 指的就是“合并同类项”和“移项”. 早在一千多年前, 数学家阿尔-花拉子米就已经对“合并同类项”和“移项”非常重视了.

例 3 解下列方程:

(1) $3x + 7 = 32 - 2x$; (2) $x - 3 = \frac{3}{2}x + 1$.

解: (1) 移项, 得

$$3x + 2x = 32 - 7.$$

合并同类项, 得

$$5x = 25.$$

系数化为 1, 得

$$x = 5.$$

(2) 移项, 得

$$x - \frac{3}{2}x = 1 + 3.$$

合并同类项, 得

$$-\frac{1}{2}x = 4.$$

系数化为1, 得

$$x = -8.$$

例4 某制药厂制造一批药品, 如用旧工艺, 则废水排量要比环保限制的最大量还多200 t; 如用新工艺, 则废水排量比环保限制的最大量少100 t. 新、旧工艺的废水排量之比为2:5, 两种工艺的废水排量各是多少?

分析: 因为新、旧工艺的废水排量之比为2:5, 所以可设它们分别为 $2x$ t和 $5x$ t, 再根据它们与环保限制的最大量之间的关系列方程.

解: 设新、旧工艺的废水排量分别为 $2x$ t和 $5x$ t.

根据废水排量与环保限制最大量之间的关系, 得

$$5x - 200 = 2x + 100.$$

移项, 得

$$5x - 2x = 100 + 200.$$

合并同类项, 得

$$3x = 300.$$

系数化为1, 得

$$x = 100.$$

所以

$$2x = 200,$$

$$5x = 500.$$

答: 新、旧工艺产生的废水排量分别为200 t和500 t.

等号两边代表哪个数量?

练习

1. 解下列方程:

(1) $6x - 7 = 4x - 5$;

(2) $\frac{1}{2}x - 6 = \frac{3}{4}x$.

2. 王芳和李丽同时采摘樱桃, 王芳平均每小时采摘8 kg, 李丽平均每小时采摘7 kg. 采摘结束后王芳从她采摘的樱桃中取出0.25 kg给了李丽, 这时两人的樱桃一样多. 她们采摘用了多少时间?

习题 11.2

复习巩固

1. 解下列方程:

$$(1) 2x + 3x + 4x = 18;$$

$$(2) 13x - 15x + x = -3;$$

$$(3) 2.5y + 10y - 6y = 15 - 21.5;$$

$$(4) \frac{1}{2}b - \frac{2}{3}b + b = \frac{2}{3} \times 6 - 1.$$

2. 举例说明解方程时怎样“移项”，你知道这样做的根据吗？

3. 解下列方程:

$$(1) x + 3x = -16;$$

$$(2) 16y - 2.5y - 7.5y = 5;$$

$$(3) 3x + 5 = 4x + 1;$$

$$(4) 9 - 3y = 5y + 5.$$

4. 用方程解答下列问题:

(1) x 的 5 倍与 2 的和等于 x 的 3 倍与 4 的差，求 x ；

(2) y 与 -5 的积等于 y 与 5 的和，求 y 。

5. 小新出生时父亲 28 岁，现在父亲的年龄是小新年龄的 3 倍，求现在小新的年龄。

6. 洗衣机厂今年计划生产洗衣机 25 500 台，其中 I 型、II 型、III 型三种洗衣机的数量比为 1:2:14，计划生产这三种洗衣机各多少台？

7. 用一根长 60 m 的绳子围出一个长方形，使它的长是宽的 1.5 倍，长和宽各应是多少？

综合运用

8. 随着农业技术的现代化，节水型灌溉得到逐步推广。喷灌和滴灌是比漫灌节水的灌溉方式。灌溉三块同样大的试验田，第一块用漫灌方式，第二块用喷灌方式，第三块用滴灌方式。后两种方式用水量分别是漫灌的 25% 和 15%。

(1) 设第一块试验田用水 x t，则另两块试验田的用水量各如何表示？

(2) 如果三块试验田共用水 420 t，每块试验田各用水多少吨？

9. 某造纸厂为节约木材，大力扩大再生纸的生产。它去年 10 月生产再生纸 2 050 t，这比它前年 10 月再生纸产量的 2 倍还多 150 t。它前年 10 月生产再生纸多少吨？

10. 把一根长 100 cm 的木棍锯成两段，要使其中一段长比另一段长的 2 倍少 5 cm，应该在木棍的哪个位置锯开？

11. 几个人共同种一批树苗，如果每人种 10 棵，则剩下 6 棵树苗未种；如果每人种 12 棵，则缺 6 棵树苗。求参与种树的人数。

拓广探索

12. 在一张普通的月历中, 相邻三行里同一列的三个日期数之和能否为 30? 如果能, 这三个数分别是多少?
13. 一个两位数的个位上的数的 3 倍加 1 是十位上的数, 个位上的数与十位上的数的和等于 9, 这个两位数是多少?



实验与探究

无限循环小数化分数

我们知道分数 $\frac{1}{3}$ 写为小数形式即 $0.\dot{3}$, 反过来, 无限循环小数 $0.\dot{3}$ 写为分数形式即 $\frac{1}{3}$.

一般地, 任何一个无限循环小数都可以写为分数形式吗? 如果可以, 应怎样写呢?

先以无限循环小数 $0.\dot{7}$ 为例进行讨论.

设 $0.\dot{7}=x$, 由 $0.\dot{7}=0.777\cdots$ 可知, $10x=7.777\cdots$, 所以 $10x-x=7$. 解方程, 得 $x=\frac{7}{9}$. 于是, 得 $0.\dot{7}=\frac{7}{9}$.

想一想: 如何把像 $0.\dot{1}$, $0.\dot{2}$, $\cdots$, $0.\dot{9}$ 这样的无限循环小数化为分数形式? 动手试一试.

再以无限循环小数 $0.\dot{7}\dot{3}$ 为例, 做进一步的讨论.

无限循环小数 $0.\dot{7}\dot{3}=0.737\ 373\cdots$, 它的循环节有两位, 类比上面的讨论可以想到如下的做法.

设 $0.\dot{7}\dot{3}=x$, 由 $0.\dot{7}\dot{3}=0.737\ 373\cdots$ 可知, $100x=73.737\ 3\cdots$, 所以 $100x-x=73$. 解方程, 得 $x=\frac{73}{99}$. 于是, 得 $0.\dot{7}\dot{3}=\frac{73}{99}$.

想一想: 如何把像 $0.\dot{1}\dot{0}$, $0.\dot{1}\dot{2}$, $\cdots$, $0.\dot{9}\dot{8}$ 这样的无限循环小数化为分数形式? 动手试一试.

想一想: 如何把无限循环小数 $0.\dot{7}3\dot{5}$, $0.\dot{8}23\ \dot{1}$ 化为分数形式? 动手试一试, 并总结把无限循环小数化为分数形式的一般规律.

11.3 解一元一次方程（二）

——去括号与去分母

当方程的形式较复杂时，解方程的步骤也相应更多些. 本节重点讨论如何利用“去括号”和“去分母”解一元一次方程.

问题 1 某工厂加强节能措施，去年下半年与上半年相比，月平均用电量减少 2 000 kW·h（千瓦·时），全年用电 15 万 kW·h. 这个工厂去年上半年每月平均用电是多少？

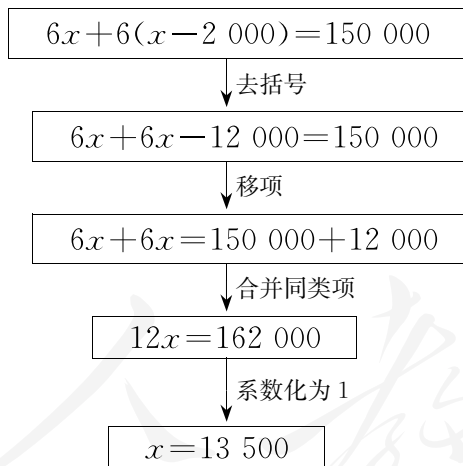
设上半年每月平均用电 x kW·h，则下半年每月平均用电 $(x-2\,000)$ kW·h；上半年共用电 $6x$ kW·h，下半年共用电 $6(x-2\,000)$ kW·h.

根据全年用电 15 万 kW·h，列得方程

$$6x + 6(x - 2\,000) = 150\,000.$$

如果去括号，就能简化方程的形式.

下面的框图表示了解这个方程的流程.



1 kW·h 的电量
即 1 kW 的电器 1 h 的
用电量.

由上可知，这个工厂去年上半年每月平均用电 13 500 kW·h.



思考

本题还有其他列方程的方法吗？用其他方法列出的方程应怎样解？

方程中有带括号的式子时，去括号是常用的化简步骤.

例 1 解下列方程：

$$(1) 2x - (x + 10) = 5x + 2(x - 1);$$

$$(2) 3x - 7(x - 1) = 3 - 2(x + 3).$$

解：(1) 去括号，得

$$2x - x - 10 = 5x + 2x - 2.$$

移项，得

$$2x - x - 5x - 2x = -2 + 10.$$

合并同类项，得

$$-6x = 8.$$

系数化为 1，得

$$x = -\frac{4}{3}.$$

(2) 去括号，得

$$3x - 7x + 7 = 3 - 2x - 6.$$

移项，得

$$3x - 7x + 2x = 3 - 6 - 7.$$

合并同类项，得

$$-2x = -10.$$

系数化为 1，得

$$x = 5.$$

例 2 一艘船从甲码头到乙码头顺流而行，用了 2 h；从乙码头返回甲码头逆流而行，用了 2.5 h. 已知水流的速度是 3 km/h，求船在静水中的平均速度.

分析：一般情况下可以认为这艘船往返的路程相等，由此填空：

顺流速度_____顺流时间_____逆流速度_____逆流时间_____.

解：设船在静水中的平均速度为 x km/h，则顺流速度为 $(x + 3)$ km/h，逆流速度为 $(x - 3)$ km/h.

根据往返路程相等，列得

$$2(x + 3) = 2.5(x - 3).$$

去括号，得

$$2x+6=2.5x-7.5.$$

移项及合并同类项，得

$$0.5x=13.5.$$

系数化为 1，得

$$x=27.$$

答：船在静水中的平均速度为 27 km/h.

练习

解下列方程：

(1) $2(x+3)=5x$;

(2) $4x+3(2x-3)=12-(x+4)$;

(3) $6\left(\frac{1}{2}x-4\right)+2x=7-\left(\frac{1}{3}x-1\right)$;

(4) $2-3(x+1)=1-2(1+0.5x)$.

英国伦敦博物馆保存着一部极其珍贵的文物——纸草书. 这是古代埃及人用象形文字写在一种用纸莎草压制成的草片上的著作，它于公元前 1700 年左右写成. 这部书中记载了许多有关数学的问题，下面的问题 2 就是书中一道著名的求未知数的问题.



问题 2 一个数，它的三分之二，它的一半，它的七分之一，它的全部，加起来总共是 33.

这个问题可以用现在的数学符号表示. 设这个数是 x ，根据题意得方程

$$\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x+x=33.$$

当时的埃及人如果采用了这种形式，它一定是“最早”的方程.

这样的方程中有些系数是分数，如果能化去分母，把系数化成整数，则可以使解方程中的计算更简便些.

我们知道，等式两边乘同一个数，结果仍相等. 这个方程中各分母的最小公倍数是 42，方程两边乘 42，得

$$42\times\frac{2}{3}x+42\times\frac{1}{2}x+42\times\frac{1}{7}x+42x=42\times33,$$

即

$$28x + 21x + 6x + 42x = 1\,386.$$

合并同类项，得

$$97x = 1\,386.$$

系数化为 1，得

$$x = \frac{1\,386}{97}.$$

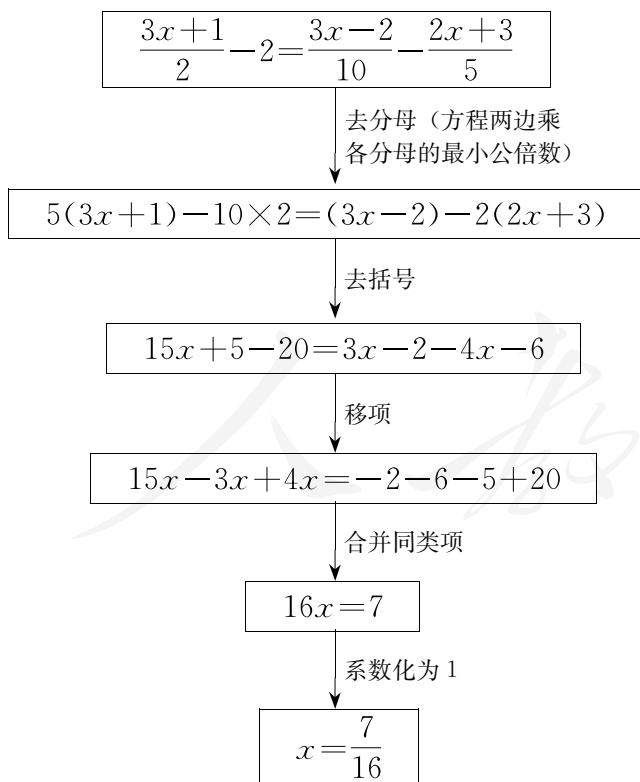
为更全面地讨论问题，我们再以方程 $\frac{3x+1}{2} - 2 = \frac{3x-2}{10} - \frac{2x+3}{5}$ 为例，看看解有分数系数的一元一次方程的步骤.

这个方程中各分母的最小公倍数是 10，方程两边乘 10，于是方程左边变为

$$10 \times \left(\frac{3x+1}{2} - 2 \right) = 10 \times \frac{3x+1}{2} - 10 \times 2 = 5(3x+1) - 10 \times 2,$$

去了分母，方程右边变为什么？你具体算算.

下面的框图表示了解这个方程的流程.



方程两边的每一项都要乘 10.



归纳

解一元一次方程的一般步骤包括：去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为1等. 通过这些步骤可以使以 x 为未知数的方程逐步向着 $x=a$ 的形式转化，这个过程主要依据等式的基本性质和运算律等.

例 3 解下列方程：

$$(1) \frac{x+1}{2} - 1 = 2 + \frac{2-x}{4}; \quad (2) 3x + \frac{x-1}{2} = 3 - \frac{2x-1}{3}.$$

解：(1) 去分母（方程两边乘 4），得

$$2(x+1) - 4 = 8 + (2-x).$$

去括号，得

$$2x + 2 - 4 = 8 + 2 - x.$$

移项，得

$$2x + x = 8 + 2 - 2 + 4.$$

合并同类项，得

$$3x = 12.$$

系数化为 1，得

$$x = 4.$$

(2) 去分母（方程两边乘 6），得

$$18x + 3(x-1) = 18 - 2(2x-1).$$

去括号，得

$$18x + 3x - 3 = 18 - 4x + 2.$$

移项，得

$$18x + 3x + 4x = 18 + 2 + 3.$$

合并同类项，得

$$25x = 23.$$

系数化为 1，得

$$x = \frac{23}{25}.$$

在本章第一个问题中, 我们根据路程、速度和时间三者的关系, 列出方程 $\frac{x}{60} - \frac{x}{70} = 1$. 现在你一定会解它了. 去分母 (方程两边乘 420), 得 $7x - 6x = 420$, $x = 420$. 于是得出两地间的路程为 420 km.

练习

解下列方程:

$$(1) \frac{19}{100}x = \frac{21}{100}(x-2);$$

$$(2) \frac{x+1}{2} - 2 = \frac{x}{4};$$

$$(3) \frac{5x-1}{4} = \frac{3x+1}{2} - \frac{2-x}{3};$$

$$(4) \frac{3x+2}{2} - 1 = \frac{2x-1}{4} - \frac{2x+1}{5}.$$

习题 11.3

复习巩固

1. 解下列方程:

$$(1) 5a + (2-4a) = 0;$$

$$(2) 25b - (b-5) = 29;$$

$$(3) 7x + 2(3x-3) = 20;$$

$$(4) 8y - 3(3y+2) = 6.$$

2. 解下列方程:

$$(1) 2(x+8) = 3(x-1);$$

$$(2) 8x = -2(x+4);$$

$$(3) 2x - \frac{2}{3}(x+3) = -x+3;$$

$$(4) 2(10-0.5y) = -(1.5y+2).$$

3. 解下列方程:

$$(1) \frac{3x+5}{2} = \frac{2x-1}{3};$$

$$(2) \frac{x-3}{-5} = \frac{3x+4}{15};$$

$$(3) \frac{3y-1}{4} - 1 = \frac{5y-7}{6};$$

$$(4) \frac{5y+4}{3} + \frac{y-1}{4} = 2 - \frac{5y-5}{12}.$$

4. 用方程解答下列问题:

(1) x 与 4 之和的 1.2 倍等于 x 与 14 之差的 3.6 倍, 求 x ;

(2) y 的 3 倍与 1.5 之和的二分之一等于 y 与 1 之差的四分之一, 求 y .

综合运用

5. 张华和李明登一座山, 张华每分登高 10 m, 并且先出发 30 min (分), 李明每分登高 15 m, 两人同时登上山顶. 设张华登山用了 x min, 如何用含 x 的式子表示李明登山所用时间? 试用方程求 x 的值, 由 x 的值能求出山高吗? 如果能, 山高多少米?

6. 两辆汽车从相距 84 km 的两地同时出发相向而行, 甲车的速度比乙车的速度快 20 km/h, 半小时后两车相遇, 两车的速度各是多少?
7. 在风速为 24 km/h 的条件下, 一架飞机顺风从 A 机场飞到 B 机场要用 2.8 h, 它逆风飞行同样的航线要用 3 h. 求: (1) 无风时这架飞机在这一航线的平均航速; (2) 两机场之间的航程.
8. 买两种布料共 138 m, 花了 540 元. 其中蓝布料每米 3 元, 黑布料每米 5 元, 两种布料各买了多少米?

拓展探索

9. 有一些相同的房间需要粉刷墙面. 一天 3 名一级技工去粉刷 8 个房间, 结果其中有 50 m^2 墙面未来得及粉刷; 同样时间内 5 名二级技工粉刷了 10 个房间之外, 还多粉刷了另外的 40 m^2 墙面. 每名一级技工比二级技工一天多粉刷 10 m^2 墙面, 求每个房间需要粉刷的墙面面积.
10. 王力骑自行车从 A 地到 B 地, 陈平骑自行车从 B 地到 A 地, 两人都沿同一公路匀速前进, 已知两人在上午 8 时同时出发, 到上午 10 时, 两人还相距 36 km, 到中午 12 时, 两人又相距 36 km. 求 A, B 两地间的路程.
11. 一列火车匀速行驶, 经过一条长 300 m 的隧道需要 20 s 的时间. 隧道的顶上有一盏灯, 垂直向下发光, 灯光照在火车上的时间是 10 s.
- (1) 设火车的长度为 x m, 用含 x 的式子表示: 从车头经过灯下到车尾经过灯下火车所走的路程和这段时间内火车的平均速度.
- (2) 设火车的长度为 x m, 用含 x 的式子表示: 从车头进入隧道到车尾离开隧道火车所走的路程和这段时间内火车的平均速度.
- (3) 上述问题中火车的平均速度发生了变化吗?
- (4) 求这列火车的长度.

人教版®

11.4 一元一次方程与实际问题

从前面的讨论中已经可以看出，方程是分析和解决问题的一种很有用的数学工具. 本节我们重点讨论如何用一元一次方程解决实际问题.

例 1 某车间有 22 名工人，每人每天可以生产 1 200 个螺柱或 2 000 个螺母. 1 个螺柱需要配 2 个螺母，为使每天生产的螺柱和螺母刚好配套，应安排生产螺柱和螺母的工人各多少名？

分析：每天生产的螺母数量是螺柱数量的 2 倍时，它们刚好配套.

解：设应安排 x 名工人生产螺柱， $(22-x)$ 名工人生产螺母.

根据螺母数量应是螺柱数量的 2 倍，列出方程

$$2\,000(22-x)=2\times 1\,200x.$$

解方程，得

$$5(22-x)=6x,$$

$$110-5x=6x,$$

$$11x=110,$$

$$x=10.$$

$$22-x=12.$$

答：应安排 10 名工人生产螺柱，12 名工人生产螺母.

如果设 x 名工人生产螺母，怎样列方程？

这类问题中配套的物品之间具有一定的数量关系，这可以作为列方程的依据.

例 2 整理一批图书，由一个人做要 40 h 完成. 现计划由一部分人先做 4 h，然后增加 2 人与他们一起做 8 h，完成这项工作. 假设这些人的工作效率相同，具体应先安排多少人工作？

分析：如果把总工作量设为 1，则人均效率（一个人 1 h 完成的工作量）为 $\frac{1}{40}$ ， x 人先做 4 h 完成的工作量为 $\frac{4x}{40}$ ，增加 2 人后再做 8 h 完成的工作量为 $\frac{8(x+2)}{40}$ ，这两个工作量之和应等于总工作量.

解：设安排 x 人先做 4 h.

根据先后两个时段的工作量之和应等于总工作量，列出方程

$$\frac{4x}{40} + \frac{8(x+2)}{40} = 1.$$

解方程，得

$$4x + 8(x+2) = 40,$$

$$4x + 8x + 16 = 40,$$

$$12x = 24,$$

$$x = 2.$$

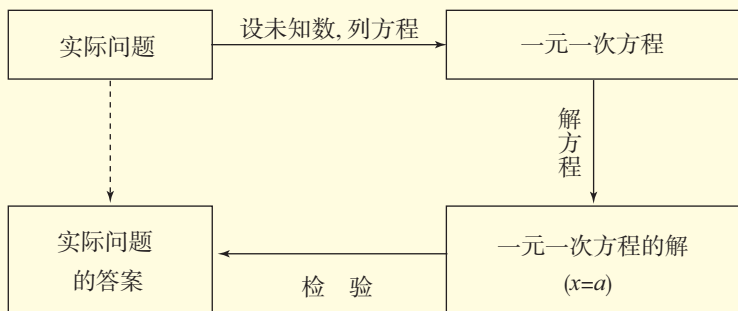
答：应安排 2 人先做 4 h.

这类问题中常常把总工作量看作 1，并利用“工作量 = 人均效率 $\times$ 人数 $\times$ 时间”的关系考虑问题.



归纳

用一元一次方程解决实际问题的基本过程如下：



这一过程一般包括设、列、解、检、答等步骤，即设未知数，列方程，解方程，检验所得结果，确定答案. 正确分析问题中的相等关系是列方程的基础.

练习

- 一套仪器由一个 A 部件和三个 B 部件构成. 用 1 m^3 钢材可做 40 个 A 部件或 240 个 B 部件. 现要用 6 m^3 钢材制作这种仪器，应用多少钢材做 A 部件，多少钢材做 B 部件，恰好配成这种仪器多少套？
- 一条地下管线由甲工程队单独铺设需要 12 天，由乙工程队单独铺设需要 24 天. 如果由这两个工程队从两端同时施工，要多少天可以铺好这条管线？

有些实际问题中，数量关系比较隐蔽，需要仔细分析才能列出方程. 下面我们进一步探究几个这样的问题.



探究1

销售中的盈亏

一商店在某一时间以每件 60 元的价格卖出两件衣服，其中一件盈利 25%，另一件亏损 25%，卖这两件衣服总的是盈利还是亏损，或是不盈不亏？



分析：两件衣服共卖了 $120(=60 \times 2)$ 元，是盈是亏要看这家商店买进这两件衣服时花了多少钱. 如果进价大于售价就亏损，反之就盈利.

假设一件商品的进价是 40 元，如果卖出后盈利 25%，那么商品利润是 $40 \times 25\%$ 元；如果卖出后亏损 25%，商品利润是 $40 \times (-25\%)$ 元.

本问题中，设盈利 25% 的那件衣服的进价是 x 元，它的商品利润就是 $0.25x$ 元. 根据进价与利润的和等于售价，列出方程

$$x + 0.25x = 60.$$

由此得

$$x = 48.$$

类似地，可以设另一件衣服的进价为 y 元，它的商品利润是 $-0.25y$ 元，列出方程

$$y - 0.25y = 60.$$

由此得

$$y = 80.$$

两件衣服的进价是 $x + y = 128$ 元，而两件衣服的售价是 $60 + 60 = 120$ 元，进价大于售价，由此可知卖这两件衣服总共亏损 8 元.

先大体估算盈亏，再通过准确计算检验你的判断.

列、解方程后得出的结论与你先前的估算一致吗？通过对本题的探究，对方程在实际问题中的应用有什么新的认识？



探究2

球赛积分表问题

某次篮球联赛积分榜

队 名	比赛场次	胜场	负场	积分
前进	14	10	4	24
东方	14	10	4	24
光明	14	9	5	23
蓝天	14	9	5	23
雄鹰	14	7	7	21
远大	14	7	7	21
卫星	14	4	10	18
钢铁	14	0	14	14



- (1) 用式子表示总积分与胜、负场数之间的数量关系；
- (2) 某队的胜场总积分能等于它的负场总积分吗？

分析：观察积分榜，从最下面一行数据可以看出：负一场积 1 分.

设胜一场积 x 分，从表中其他任何一行可以列方程，求出 x 的值. 例如，从第一行得方程

$$10x + 1 \times 4 = 24.$$

由此得

$$x = 2.$$

用积分榜中其他行可以验证，得出结论：负一场积 1 分，胜一场积 2 分.

(1) 如果一个队胜 m 场，则负 $(14-m)$ 场，胜场积分为 $2m$ ，负场积分为 $14-m$ ，总积分为

$$2m + (14 - m) = m + 14.$$

(2) 设一个队胜了 x 场，则负了 $(14-x)$ 场. 如果这个队的胜场总积分等于负场总积分，则得方程

$$2x = 14 - x.$$

由此得

$$x = \frac{14}{3}.$$

通过观察积分榜，你能选择出其中哪一行最能说明负一场积几分吗？

想一想, x 表示什么量? 它可以是分数吗? 由此你能得出什么结论?

解决实际问题时, 要考虑得到的结果是不是符合实际. x (所胜的场数) 的值必须是整数, 所以 $x = \frac{14}{3}$ 不符合实际, 由此可以判定没有哪个队的胜场总积分等于负场总积分.

这个问题说明: 利用方程不仅能求具体数值, 而且可以进行推理判断.

上面的问题说明, 用方程解决实际问题时, 不仅要注意解方程的过程是否正确, 还要检验方程的解是否符合问题的实际意义.



探究3

电话计费问题

下表中有两种移动电话计费方式.

	月使用费/元	主叫限定时间/min	主叫超时费/(元/min)	被叫
方式一	58	150	0.25	免费
方式二	88	350	0.19	免费

考虑下列问题:

(1) 设一个月内用移动电话主叫为 t min (t 是正整数). 根据上表, 列表说明: 当 t 在不同时间范围内取值时, 按方式一和方式二如何计费.

(2) 观察你的列表, 你能从中发现如何根据主叫时间选择省钱的计费方式吗? 通过计算验证你的看法.

月使用费固定收; 主叫不超限定时间不再收费, 主叫超时部分加收超时费; 被叫免费.

分析: (1) 由上表可知, 计费与主叫时间相关, 计费时首先要看主叫是否超过限定时间. 因此, 考虑 t 的取值时, 两个主叫限定时间 150 min 和 350 min 是不同时间范围的划分点.

当 t 在不同时间范围内取值时, 方式一和方式二的计费如下页表:

主叫时间 t/min	方式一计费/元	方式二计费/元
t 小于 150	58	88
$t=150$	58	88
t 大于 150 且小于 350	$58+0.25(t-150)$	88
$t=350$	$58+0.25(350-150)=108$	88
t 大于 350	$58+0.25(t-150)$	$88+0.19(t-350)$

(2) 观察 (1) 中的表, 可以发现: 主叫时间超出限定时间越长, 计费越多, 并且随着主叫时间的变化, 按哪种方式的计费少也会变化. 下面比较不同时间范围内方式一和方式二的计费情况.

①当 t 小于或等于 150 时, 按方式一的计费少.

②当 t 从 150 增加到 350 时, 按方式一的计费由 58 元增加到 108 元, 而按方式二的计费一直是 88 元. 因此, 当 t 大于 150 并且小于 350 时, 可能在某主叫时间按方式一和方式二的计费相等. 列方程

$$58+0.25(t-150)=88,$$

解得

$$t=270.$$

因此, 如果主叫时间恰是 270 min, 按两种方式的计费相等, 都是 88 元; 如果主叫时间大于 150 min 且小于 270 min, 按方式一的计费少于按方式二的计费 (88 元); 如果主叫时间大于 270 min 且小于 350 min, 按方式一的计费多于按方式二的计费 (88 元).

③当 $t=350$ 时, 按方式二的计费少.

④当 t 大于 350 时, 可以看出, 按方式一的计费为 108 元加上超过 350 min 部分的超时费 ($0.25(t-350)$), 按方式二的计费为 88 元加上超过 350 min 部分的超时费 ($0.19(t-350)$), 按方式二的计费少.

综合以上的分析, 可以发现:

_____ 时, 选择方案一省钱;

_____ 时, 选择方案二省钱.

选一些具体数字, 通过计算验证你的发现是否正确.

当 t 大于 350 时, 按方式一的计费 $58+0.25(t-150)$ 可变形为 $108+0.25(t-350)$. 对比按方式二的计费, 你能说明此时按哪种方式的计费少吗?

练习

1. 某商店有两种书包, 每个小书包比大书包的进价少 10 元, 而它们的售后利润额相同. 其中, 每个小书包的盈利率为 30%, 每个大书包的盈利率为 20%, 试求两种书包的进价.
2. 用 A4 纸在某誊印社复印文件, 复印页数不超过 20 时, 每页收费 0.12 元; 复印页数超过 20 时, 超过部分每页收费降为 0.09 元. 在某图书馆复印同样的文件, 不论复印多少页, 每页收费 0.1 元. 复印张数为多少时, 两处的收费相同?
3. 下表是某校七~九年级某月课外兴趣小组活动时间统计表, 其中各年级同一兴趣小组每次活动时间相同.

	课外小组活动 总时间/h	文艺小组 活动次数	科技小组 活动次数
七年级	12.5	4	3
八年级	10.5	3	3
九年级	7		

请将九年级课外兴趣小组活动次数填入上表.

习题 11.4

复习巩固

1. 结合本节内容体会例 2 后归纳的框图.
2. 制作一张桌子要用一个桌面和 4 条桌腿, 1 m^3 木材可制作 20 个桌面, 或者制作 400 条桌腿, 现有 12 m^3 木材, 应怎样计划用料才能制作尽可能多的桌子?
3. 某车间每天能制作甲种零件 500 只, 或者制作乙种零件 250 只, 甲、乙两种零件各一只配成一套产品, 现要在 30 天内制作最多的成套产品, 则甲、乙两种零件各应制作多少天?
4. 某中学的学生自己动手整修操场, 如果让七年级学生单独工作, 需要 7.5 h 完成; 如果让八年级学生单独工作, 需要 5 h 完成. 如果让七、八年级学生一起工作 1 h, 再由八年级学生单独完成剩余部分, 共需多少时间完成?
5. 整理一批数据, 由一人做需 80 h 完成. 现在计划先由一些人做 2 h, 再增加 5 人

做 8 h, 完成这项工作的 $\frac{3}{4}$. 怎样安排参与整理数据的具体人数?

综合运用

6. (古代问题)某人工作一年的报酬是年终给他一件衣服和 10 枚银币, 但他干满 7 个月就决定不再继续干了, 结账时, 给了他一件衣服和 2 枚银币. 这件衣服值多少枚银币?
7. 用 A 型和 B 型机器生产同样的产品, 已知 5 台 A 型机器一天的产品装满 8 箱后还剩 4 个, 7 台 B 型机器一天的产品装满 11 箱后还剩 1 个, 每台 A 型机器比 B 型机器一天多生产 1 个产品, 求每箱装多少个产品.
8. 下表中记录了一次试验中时间和温度的数据.

时间/min	0	5	10	15	20	25
温度/°C	10	25	40	55	70	85

- (1) 如果温度的变化是均匀的, 21 min 时的温度是多少?
 - (2) 什么时间的温度是 34 °C?
9. 某糕点厂中秋节前要制作一批盒装月饼, 每盒中装 2 块大月饼和 4 块小月饼. 制作 1 块大月饼要用 0.05 kg 面粉, 1 块小月饼要用 0.02 kg 面粉. 现共有面粉 4 500 kg, 制作两种月饼应各用多少面粉, 才能生产最多的盒装月饼?
 10. 小刚和小强从 A, B 两地同时出发, 小刚骑自行车, 小强步行, 沿同一条路线相向匀速而行. 出发后 2 h 两人相遇. 相遇时小刚比小强多行进 24 km, 相遇后 0.5 h 小刚到达 B 地. 两人的行进速度分别是多少? 相遇后经过多少时间小强到达 A 地?

拓广探索

11. 现对某商品降价 20% 促销, 为了使销售总金额不变, 销售量要比按原价销售时增加百分之几?
12. 甲组的 4 名工人 3 月份完成的总工作量比此月人均定额的 4 倍多 20 件, 乙组的 5 名工人 3 月份完成的总工作量比此月人均定额的 6 倍少 20 件.
 - (1) 如果两组工人实际完成的此月人均工作量相等, 那么此月人均定额是多少件?
 - (2) 如果甲组工人实际完成的此月人均工作量比乙组的多 2 件, 那么此月人均定额是多少件?
 - (3) 如果甲组工人实际完成的此月人均工作量比乙组的少 2 件, 那么此月人均定额是多少件?

13. (古代问题)希腊数学家丢番图的墓碑上记载着:

“他生命的六分之一是幸福的童年;

再活了他生命的十二分之一, 两颊长起了细细的胡须;

他结了婚, 又度过了一生的七分之一;

再过五年, 他有了儿子, 感到很幸福;

可是儿子只活了他父亲全部年龄的一半;

儿子死后, 他在极度悲痛中度过了四年, 也与世长辞了.”

根据以上信息, 请你算出:

- (1) 丢番图的寿命;
- (2) 丢番图开始当爸爸时的年龄;
- (3) 儿子死时丢番图的年龄.



丢番图 (公元 3~4 世纪)

人教版®



数学活动

活动1

统计资料表明, 山水市去年居民的人均可支配收入为 11 664 元, 与前年相比增长 8%, 扣除价格因素, 实际增长 6.5%.

你理解资料中有关数据的含义吗? 如果不明白, 请通过查阅资料或请教他人弄清它们. 根据上面的数据, 你能用一元一次方程解决下面的问题吗?

(1) 山水市前年居民的人均收入为多少元?

(2) 在山水市, 如果去年售价为 1 000 元的商品的价格上涨率与居民消费价格上涨率一致, 那么该商品在前年的售价为多少元?

继续收集一些数据, 利用它们之间的关系再计算出一些新数据.

活动2

用一根质地均匀的木杆和一些等重的小物体, 做下列实验:

(1) 在木杆中间处拴绳, 将木杆吊起并使其左右平衡, 吊绳处为木杆的支点;

(2) 在木杆两端各悬挂一重物, 看看左右是否保持平衡;

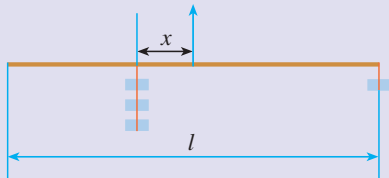
(3) 在木杆左端小物体下加挂一重物, 然后把这两个重物一起向右移动, 直至左右平衡, 记录此时支点到木杆左右两边挂重物处的距离;

(4) 在木杆左端两小物体下再加挂一重物, 然后把这三个重物一起向右移动, 直至左右平衡, 记录此时支点到木杆左右两边挂重物处的距离;

(5) 在木杆左边继续加挂重物, 并重复以上操作和记录.

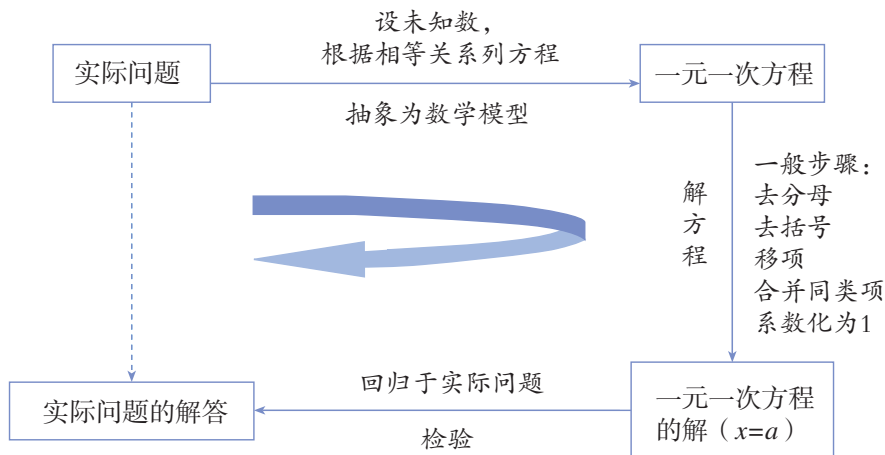
根据记录你能发现什么规律?

如图, 在木杆右端挂一重物, 支点左边挂 n 个重物, 并使左右平衡. 设木杆长为 l cm, 支点在木杆中点处, 支点到木杆左边挂重物处的距离为 x cm, 把 n, l 作为已知数, 列出关于 x 的一元一次方程.



小 结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

方程是一种重要的描述现实世界的数学模型. 本章中, 通过一些实际问题, 我们学习了最基本的方程——一元一次方程, 为进一步学习方程打下了基础.

方程是含有未知数的等式, 解方程就是求出方程中的未知数. 解方程的过程是使方程形式逐步化简, 最终得出未知数的值 (如 $x=a$ (已知数)). 在此过程中, 化归的思想方法起了重要作用, 而等式的性质及运算律是化归的根据.

利用方程解决实际问题, 应认真分析其中的数量关系, 关键是要找出相等关系, 由此设未知数、列方程, 从而把实际问题转化为数学问题; 然后通过解方程获得数学结论; 最后用数学结论解释实际问题. 这是一个“实际问题——数学问题——实际问题”的过程, 今后, 我们将在不断经历这一过程中, 提高应用数学解决实际问题的能力.

请你带着下面的问题, 复习一下全章的内容吧.

1. 举例说明方程与等式的关系以及一元一次方程的特征.
2. 回顾解一元一次方程的一般步骤, 结合例子体会: 解关于 x 的方程, 就是运用等式性质和运算律, 根据方程的具体特点, 通过灵活变形将方程逐步化简, 最后变为 $x=a$ (已知数) 而得解.
3. 你能举例说明用字母表示数、列含字母的算式和列方程的区别和联系吗?

系吗?

4. 用方程解决实际问题,是把实际问题转化为数学问题(方程)的过程,其中要特别关注从实际问题中分析出关键性的相等关系.你能举例对此加以解释吗?

5. 请收集一些重要问题(例如气候、节能、经济等)的有关数据,经过分析后编出可以利用一元一次方程解决的问题,并正确地表述问题及其解决过程.

复习题 11

复习巩固

1. 列方程表示下列语句所表示的相等关系:

- (1) 某地 2011 年 9 月 6 日的温差是 10°C , 这天最高气温是 $t^{\circ}\text{C}$, 最低气温是 $\frac{2}{3}t^{\circ}\text{C}$;
- (2) 七年级学生人数为 n , 其中男生占 45%, 女生有 110 人;
- (3) 一种商品每件的进价为 a 元, 售价为进价的 1.1 倍, 现每件又降价 10 元, 现售价为每件 210 元;
- (4) 在 5 天中, 小华共植树 60 棵, 小明共植树 $x(x < 60)$ 棵, 平均每天小华比小明多种 2 棵树.

2. 解下列方程:

- (1) $\frac{4}{3} - 8x = 3 - \frac{11}{2}x$;
- (2) $0.5x - 0.7 = 6.5 - 1.3x$;
- (3) $\frac{1}{6}(3x - 6) = \frac{2}{5}x - 3$;
- (4) $\frac{1 - 2x}{3} = \frac{3x + 1}{7} - 3$.

3. 当 x 为何值时, 下列各组中两个式子的值相等?

- (1) $x - \frac{x-1}{3}$ 和 $7 - \frac{x+3}{5}$;
- (2) $\frac{2}{5}x + \frac{x-1}{2}$ 和 $\frac{3(x-1)}{2} - \frac{8}{5}x$.

4. 在梯形面积公式 $S = \frac{1}{2}(a+b)h$ 中,

- (1) 已知 $S=30$, $a=6$, $h=4$, 求 b ;
- (2) 已知 $S=60$, $b=4$, $h=12$, 求 a ;
- (3) 已知 $S=50$, $a=6$, $b=\frac{5}{3}a$, 求 h .

综合运用

5. (我国古代问题)①跑得快的马每天走 240 里,跑得慢的马每天走 150 里.慢马先走 12 天,快马几天可以追上慢马?
6. 运动场的跑道一圈长 400 m.小健练习骑自行车,平均每分骑 350 m;小康练习跑步,平均每分跑 250 m.两人从同一处同时反向出发,经过多少时间首次相遇?又经过多少时间再次相遇?
7. 有一群鸽子和一些鸽笼,如果每个鸽笼住 6 只鸽子,则剩余 3 只鸽子无鸽笼可住;如果再飞来 5 只鸽子,连同原来的鸽子,每个鸽笼刚好住 8 只鸽子.原有多少只鸽子和多少个鸽笼?
8. 父亲和女儿的年龄之和是 91,当父亲的年龄是女儿现在年龄的 2 倍的时候,女儿的年龄是父亲现在年龄的 $\frac{1}{3}$,求女儿现在的年龄.

拓广探索

9. 某电视台组织知识竞赛,共设 20 道选择题,各题分值相同,每题必答.右表记录了 5 个参赛者的得分情况.

参赛者	答对题数	答错题数	得分
A	20	0	100
B	19	1	94
C	18	2	88
D	14	6	64
E	10	10	40

- (1) 参赛者 F 得 76 分,他答对了几道题?
- (2) 参赛者 G 说他得 80 分,你认为可能吗?为什么?
10. 一家游泳馆每年 6~8 月出售夏季会员证,每张会员证 80 元,只限本人使用,凭证购入场券每张 1 元,不凭证购入场券每张 3 元.试讨论并回答:
- (1) 什么情况下,购会员证与不购证付一样的钱?
- (2) 什么情况下,购会员证比不购证更合算?
- (3) 什么情况下,不购会员证比购证更合算?
11. “丰收 1 号”油菜籽的平均每公顷产量为 2 400 kg,含油率为 40%.“丰收 2 号”油菜籽比“丰收 1 号”的平均每公顷产量提高了 300 kg,含油率提高了 10 个百分点.某村去年种植“丰收 1 号”油菜,今年改种“丰收 2 号”油菜,虽然种植面积比去年减少 3 hm²,但是所产油菜籽的总产油量比去年提高 3 750 kg.这个村去年和今年种植油菜的面积各是多少公顷?

① 这道题选自我国元朝朱世杰所著的《算学启蒙》(1299 年).原题是:“良马日行二百四十里,驽马日行一百五十里.驽马先行一十二日,问良马几何追及之.答曰:二十日.”题中的“里”是我国市制长度单位,1 里=500 m.

第十二章 相交线与平行线

同学们对两条直线相交、平行一定不陌生吧！纵横交错的道路，棋盘中的横线和竖线，操场上的双杠，教室中的课桌面、黑板面相邻的两条边与相对的两条边……都给我们以相交线或平行线的形象。你能再举出一些相交线和平行线的实例吗？

第九章我们认识了几何图形，并学习了一些基本的平面图形——直线、射线、线段和角。本章将研究平面内不重合的两条直线的位置关系：相交与平行。对于相交，我们要研究两条直线相交所成的角的位置关系和数量关系；对于平行，我们要借助于一条直线与另外两条直线相交所成的角，研究平行线的判定和性质。在此基础上，再学习平移的有关知识。本章我们还将学习通过简单的推理得出数学结论的方法，培养言之有据的思考习惯。



12.1 相交线

12.1.1 相交线

如图 12.1-1, 观察剪刀剪开布片过程中有关角的变化. 可以发现, 握紧剪刀的把手时, 随着两个把手之间的角逐渐变小, 剪刀刃之间的角也相应变小, 直到剪开布片. 如果把剪刀的构造看作两条相交的直线, 这就关系到两条相交直线所成的角的问题.

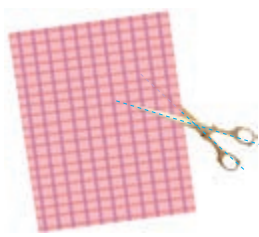


图 12.1-1



探究

任意画两条相交的直线, 形成四个角 (图 12.1-2), $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 有怎样的位置关系? $\angle 1$ 和 $\angle 3$ 呢?

分别量一下各个角的度数, $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 的度数有什么关系? $\angle 1$ 和 $\angle 3$ 呢? 在图 12.1-1 剪刀把手之间的角变化的过程中, 这个关系还保持吗? 为什么?

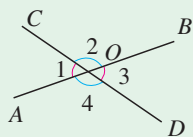


图 12.1-2

$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 有一条公共边 OC , 它们的另一边互为反向延长线 ($\angle 1$ 和 $\angle 2$ 互补), 具有这种关系的两个角, 互为**邻补角** (adjacent angles on a straight line).

$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 有一个公共顶点 O , 并且 $\angle 1$ 的两边分别是 $\angle 3$ 的两边的反向延长线, 具有这种位置关系的两个角, 互为**对顶角** (opposite angles).

在图 12.1-2 中, $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互补, $\angle 3$ 与 $\angle 2$ 互补, 由“同角的补角相等”, 可以得出 $\angle 1 = \angle 3$. 类似地, $\angle 2 = \angle 4$. 这样, 我们得到对顶角的性质:

对顶角相等.

图 12.1-2 中
还有没有其他的
邻补角与对顶角?

上面推出“对顶角相等”这个结论的过程，可以写成下面的形式：
 因为 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互补， $\angle 3$ 与 $\angle 2$ 互补（邻补角的定义），
 所以 $\angle 1 = \angle 3$ （同角的补角相等）。

例 1 如图 12.1-3，直线 a, b 相交， $\angle 1 = 40^\circ$ ，
 求 $\angle 2, \angle 3, \angle 4$ 的度数。

解：由邻补角的定义，得

$$\angle 2 = 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ;$$

由对顶角相等，得

$$\angle 3 = \angle 1 = 40^\circ,$$

$$\angle 4 = \angle 2 = 140^\circ.$$

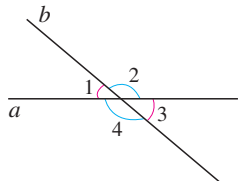
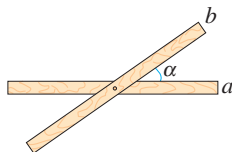


图 12.1-3

练习

如图，取两根木条 a, b ，将它们钉在一起，并把它们想象成两条直线，就得到一个相交线的模型。你能说出其中的一些邻补角与对顶角吗？两根木条所成的角中，如果 $\angle \alpha = 35^\circ$ ，其他三个角各等于多少度？如果 $\angle \alpha$ 等于 $90^\circ, 115^\circ, m^\circ$ 呢？



12.1.2 垂线

在相交线的模型(上面练习插图)中，固定木条 a ，转动木条 b 。当 b 的位置变化时， a, b 所成的 $\angle \alpha$ 也会发生变化。当 $\angle \alpha = 90^\circ$ 时（图 12.1-4），我们说 a 与 b 互相垂直（perpendicular），记作 $a \perp b$ 。

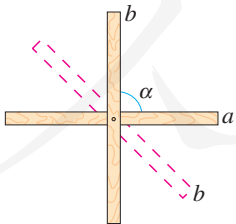


图 12.1-4

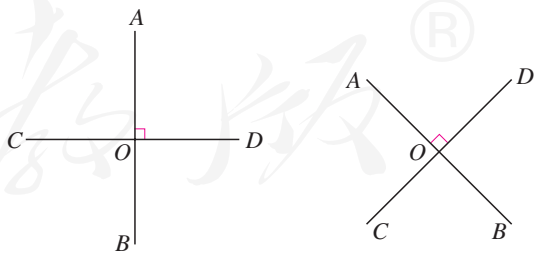


图 12.1-5

垂直是相交的一种特殊情形，两条直线互相垂直，其中的一条直线叫做另一条直线的垂线（perpendicular line），它们的交点叫做垂足（foot of a perpendicular）。在图 12.1-5 中， $AB \perp CD$ ，垂足为 O 。

根据两条直线垂直的定义可知，如果两条直线相交所成的四个角中的任意一个角等于 90° ，那么这两条直线垂直. 图 12.1-5 中，如果直线 AB , CD 相交于点 O ， $\angle AOD = 90^\circ$ ，那么 $AB \perp CD$. 这个推理过程可以写成下面的形式：

因为 $\angle AOD = 90^\circ$ ，

所以 $AB \perp CD$ （垂直的定义）.

日常生活中，两条直线互相垂直的情形很常见，说出图 12.1-6 中的一些互相垂直的木条. 你能再举出其他例子吗？

反过来，如果 $AB \perp CD$ ，那么 $\angle AOD$ 是多少度？



图 12.1-6



探究

如图 12.1-7.

- (1) 用三角尺或量角器画已知直线 l 的垂线，这样的垂线能画出几条？
- (2) 经过直线 l 上一点 A 画 l 的垂线，这样的垂线能画出几条？
- (3) 经过直线 l 外一点 B 画 l 的垂线，这样的垂线能画出几条？

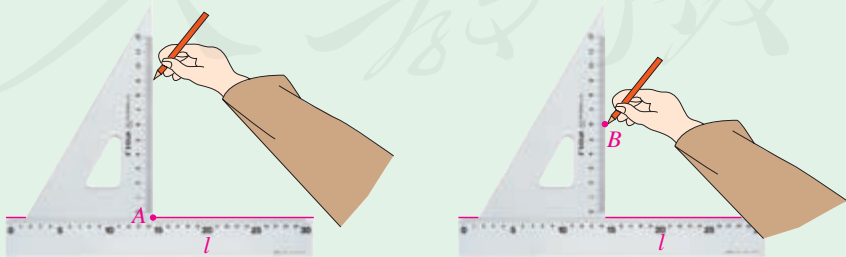


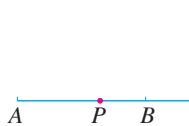
图 12.1-7

经过一点（已知直线上或直线外），能画出已知直线的一条垂线，并且只能画出一条垂线。即

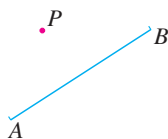
在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直。

练习

1. 当两条直线相交所成的四个角都相等时，这两条直线有什么位置关系？为什么？
2. 画一条线段或射线的垂线，就是画它们所在直线的垂线。如图，请你过点 P 画出射线 AB 或线段 AB 的垂线。



(1)



(2)



(3)

(第 2 题)



思考

如图 12.1-8，在灌溉时，要把河中的水引到农田 P 处，如何挖渠能使渠道最短？

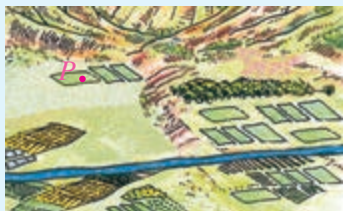


图 12.1-8



探究

如图 12.1-9，连接直线 l 外一点 P 与直线 l 上各点 $O, A_1, A_2, A_3, \dots$ ，其中 $PO \perp l$ （我们称 PO 为点 P 到直线 l 的垂线段）。比较线段 $PO, PA_1, PA_2, PA_3, \dots$ 的长短，这些线段中，哪一条最短？

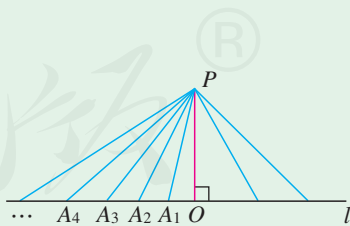


图 12.1-9

连接直线外一点与直线上各点的所有线段中，垂线段最短。

简单说成：垂线段最短。

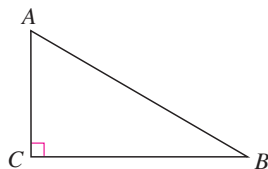
直线外一点到这条直线的垂线段的长度，叫做点到直线的距离。

现在, 你知道水渠该怎么挖了吗? 在图 12.1-8 中画出来. 如果图中比例尺为 $1:100\,000$, 水渠大约要挖多长?

练习

如图, 三角形 ABC 中, $\angle C=90^\circ$.

- (1) 分别指出点 A 到直线 BC , 点 B 到直线 AC 的距离是哪些线段的长;
- (2) 三条边 AB , AC , BC 中哪条边最长? 为什么?



12.1.3 同位角、内错角、同旁内角

前面我们研究了一条直线与另一条直线相交的情形, 接下来, 我们进一步研究一条直线与两条直线分别相交的情形.

如图 12.1-10, 直线 AB , CD 与 EF 相交 (也可以说两条直线 AB , CD 被第三条直线 EF 所截), 构成八个角. 我们看那些没有公共顶点的两个角的关系.

先看图中的 $\angle 1$ 和 $\angle 5$, 这两个角分别在直线 AB , CD 的同方 (上方), 并且都在直线 EF 的同侧 (右侧), 具有这种位置关系的一对角叫做 **同位角** (corresponding angles).

再看 $\angle 3$ 和 $\angle 5$, 这两个角都在直线 AB , CD 之间, 并且分别在直线 EF 两侧 ($\angle 3$ 在直线 EF 左侧, $\angle 5$ 在直线 EF 右侧), 具有这种位置关系的一对角叫做 **内错角** (alternate interior angles). 图中 $\angle 3$ 和 $\angle 6$ 也都在直线 AB , CD 之间, 但它们在直线 EF 的同一旁 (左侧), 具有这种位置关系的一对角叫做 **同旁内角** (interior angles on the same side).

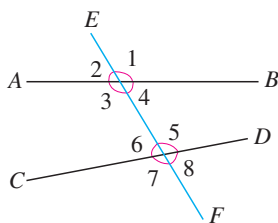


图 12.1-10

$\angle 2$ 和 $\angle 6$ 是同位角吗? 图中还有没有其他的同位角? 若有, 标记出它们.

图中还有没有其他的内错角与同旁内角? 若有, 标记出它们.

例 2 如图 12.1-11, 直线 DE , BC 被直线 AB 所截.

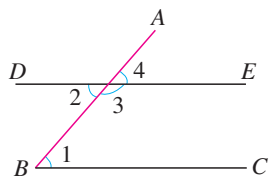


图 12.1-11

(1) $\angle 1$ 和 $\angle 2$, $\angle 1$ 和 $\angle 3$, $\angle 1$ 和 $\angle 4$ 各是什么位置关系的角?

(2) 如果 $\angle 1 = \angle 4$, 那么 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 相等吗? $\angle 1$ 和 $\angle 3$ 互补吗? 为什么?

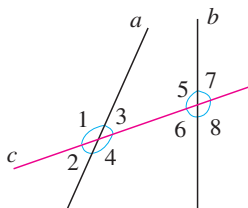
答: (1) $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是内错角, $\angle 1$ 和 $\angle 3$ 是同旁内角, $\angle 1$ 和 $\angle 4$ 是同位角.

(2) 如果 $\angle 1 = \angle 4$, 由对顶角相等, 得 $\angle 2 = \angle 4$, 那么 $\angle 1 = \angle 2$.

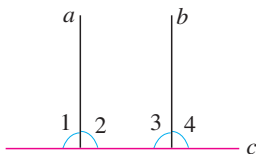
因为 $\angle 4$ 和 $\angle 3$ 互补, 即 $\angle 4 + \angle 3 = 180^\circ$, 又因为 $\angle 1 = \angle 4$, 所以 $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$, 即 $\angle 1$ 和 $\angle 3$ 互补.

练习

1. 分别指出下列图中的同位角、内错角、同旁内角.

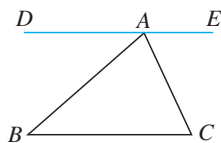


(1)



(2)

(第 1 题)



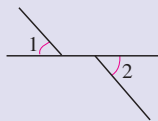
(第 2 题)

2. 如图, $\angle B$ 与哪个角是内错角, 与哪个角是同旁内角? 它们分别是哪两条直线被哪一条直线所截形成的? 对 $\angle C$ 进行同样的讨论.

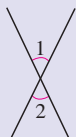
习题 12.1

复习巩固

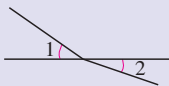
1. 下列各图中, $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是不是对顶角?



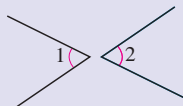
(1)



(2)



(3)

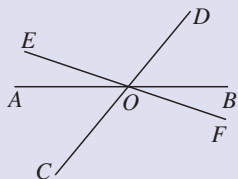


(4)

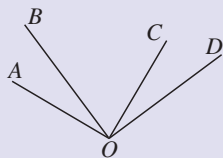
(第 1 题)

2. 如图, 直线 AB , CD , EF 相交于点 O .

- (1) 写出 $\angle AOC$, $\angle BOE$ 的邻补角;
- (2) 写出 $\angle DOA$, $\angle EOC$ 的对顶角;
- (3) 如果 $\angle AOC = 50^\circ$, 求 $\angle BOD$, $\angle COB$ 的度数.



(第 2 题)



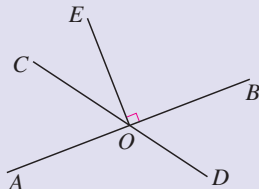
(第 3 题)

3. 找出图中互相垂直的线段, 并用三角尺检验.

4. 如图, 在一张半透明的纸上画一条直线 l , 在 l 上任取一点 P , 在 l 外任取一点 Q , 折出过点 P 且与 l 垂直的直线. 这样的直线能折出几条? 为什么? 过点 Q 呢?



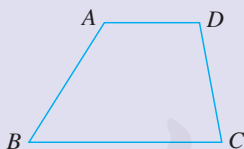
(第 4 题)



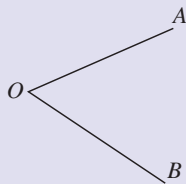
(第 5 题)

5. 如图, 直线 AB , CD 相交于点 O , $EO \perp AB$, 垂足为 O , $\angle EOC = 35^\circ$. 求 $\angle AOD$ 的度数.

6. 如图, 画 $AE \perp BC$, $CF \perp AD$, 垂足分别为 E , F .



(第 6 题)



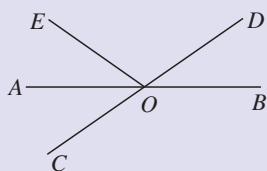
(第 7 题)

7. 如图, 用量角器画 $\angle AOB$ 的平分线 OC , 在 OC 上任取一点 P , 比较点 P 到 OA , OB 的距离的大小.

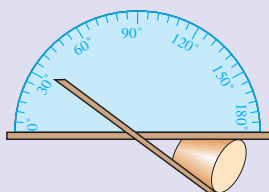
综合运用

8. 如图, 直线 AB , CD 相交于点 O , OA 平分 $\angle EOC$.

- (1) 若 $\angle EOC = 70^\circ$, 求 $\angle BOD$ 的度数;
- (2) 若 $\angle EOC : \angle EOD = 2 : 3$, 求 $\angle BOD$ 的度数.



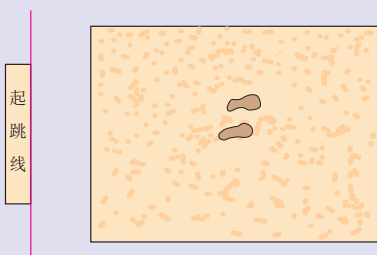
(第 8 题)



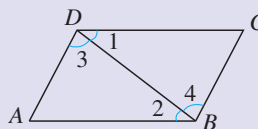
(第 9 题)

9. 图中是对顶角量角器, 你能说出用它测量角的原理吗?

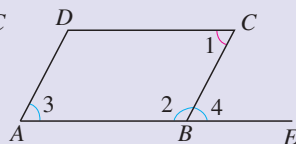
10. 如图, 这是小明同学在体育课上跳远后留下的脚印, 他的跳远成绩是多少 (比例尺为 $1:150$)?



(第 10 题)



(1)



(2)

(第 11 题)

11. 如图, $\angle 1$ 和 $\angle 2$, $\angle 3$ 和 $\angle 4$ 各是哪两条直线被哪一条直线所截形成的? 它们各是什么位置关系的角?

拓广探索

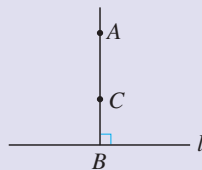
12. 如图, $AB \perp l$, $BC \perp l$, B 为垂足, 那么 A, B, C 三点在同一条直线上吗?

13. 直线 AB, CD 相交于点 O .

(1) OE, OF 分别是 $\angle AOC, \angle BOD$ 的平分线. 画出这个图形.

(2) 射线 OE, OF 在同一条直线上吗?

(3) 画 $\angle AOD$ 的平分线 OG . OE 与 OG 有什么位置关系?



(第 12 题)



看图时的错觉

观察以下图形，并回答所提的问题.

1. 图 1 中的线段 a 与 b 哪一条长?

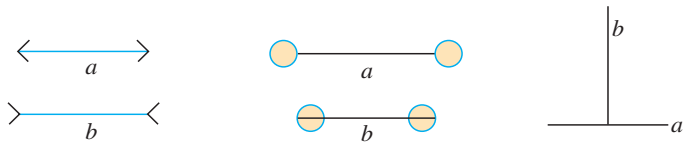


图 1

2. 图 2 中的圆 A 大还是圆 B 大?

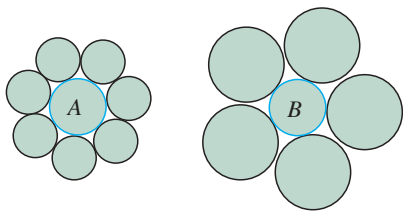


图 2

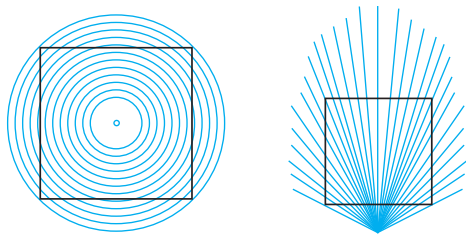


图 3

3. 图 3 中的四边形是正方形吗?

你对自己的结论有把握吗? 利用刻度尺和三角尺量一量、测一测, 这时你的答案是什么?

要对事物作出某种判断, 总是基于对这个事物的观察、实验与思考, 其中观察和实验是作出判断的重要依据. 所以, 观察必须认真、仔细, 不能粗枝大叶、马马虎虎. 有时观察得出的猜想不一定正确, 还要借助于实验进行检验.

图 4 中的线 a 与 b 互相平行吗? 如何检验? 学习了后面的知识后, 你的检验方法会更多.

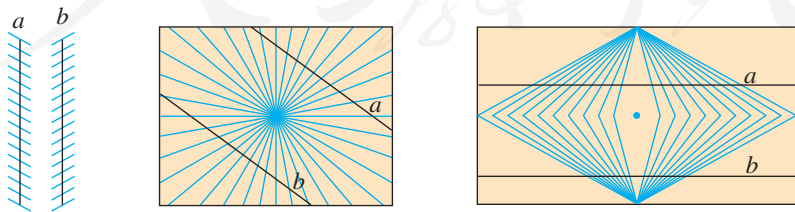


图 4

12.2 平行线及其判定

12.2.1 平行线



思考

如图 12.2-1, 分别将木条 a , b 与木条 c 钉在一起, 并把它们想象成在同一平面内两端可以无限延伸的三条直线. 转动 a , 直线 a 从在 c 的左侧与直线 b 相交逐步变为在 c 的右侧与 b 相交. 想象一下, 在这个过程中, 有没有直线 a 与直线 b 不相交的位置呢?

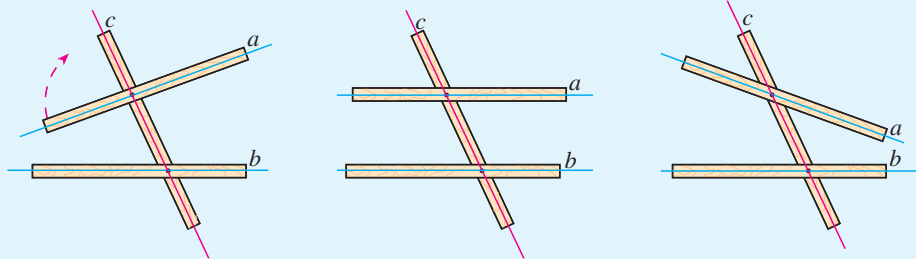


图 12.2-1

可以发现, 在木条转动过程中, 存在直线 a 与 b 不相交的情形, 这时我们说直线 a 与 b 互相**平行** (parallel), 记作 $a \parallel b$.

平行线在生活中是很常见的 (图 12.2-2), 你还能举出其他一些例子吗?

在同一平面内, 不重合的两条直线只有两种位置关系: 相交和平行.

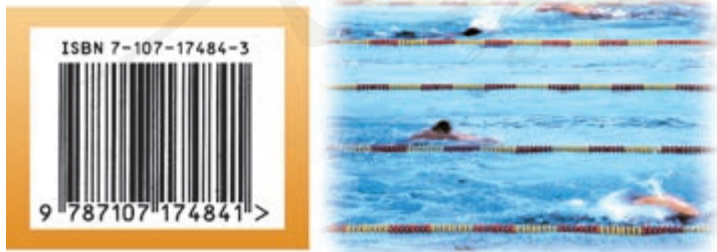


图 12.2-2



思考

在图 12.2-1 转动木条 a 的过程中，有几个位置使得直线 a 与 b 平行？如图 12.2-3，过点 B 画直线 a 的平行线，能画出几条？再过点 C 画直线 a 的平行线，它和前面过点 B 画出的直线平行吗？

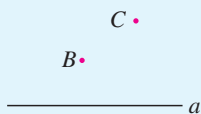


图 12.2-3

通过观察和画图，可以发现一个基本事实（平行公理）：

经过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行。

由平行公理，进一步可以得到如下结论：

如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行。

也就是说：如果 $b \parallel a$ ， $c \parallel a$ ，那么 $b \parallel c$ (图 12.2-4)。

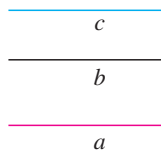


图 12.2-4

练习

读下列语句，并画出图形：

- (1) 点 P 是直线 AB 外一点，直线 CD 经过点 P ，且与直线 AB 平行；
- (2) 直线 AB ， CD 是相交直线，点 P 是直线 AB ， CD 外的一点，直线 EF 经过点 P 且与直线 AB 平行，与直线 CD 相交于点 E 。

12.2.2 平行线的判定

根据平行线的定义，如果平面内的两条直线不相交，就可以判断这两条直线平行。但是，由于直线无限延伸，检验它们是否相交有困难，所以难以直接根据定义来判断两条直线是否平行。那么，有没有其他判定方法呢？



思考

我们以前已学过用直尺和三角尺画平行线(图 12.2-5)。在这一过程中，三角尺起着什么样的作用？

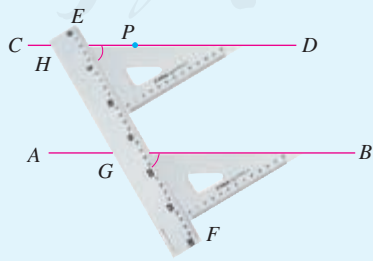


图 12.2-5

简化图 12.2-5 得到图 12.2-6. 可以看出, 画直线 AB 的平行线 CD , 实际上就是过点 P 画与 $\angle 2$ 相等的 $\angle 1$, 而 $\angle 2$ 和 $\angle 1$ 正是直线 AB , CD 被直线 EF 截得的同位角. 这说明, 如果同位角相等, 那么 $AB \parallel CD$.

一般地, 有如下利用同位角判定两条直线平行的方法:

判定方法 1 两条直线被第三条直线所截, 如果同位角相等, 那么这两条直线平行.

简单说成: 同位角相等, 两直线平行.

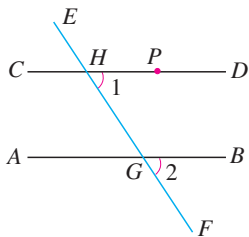


图 12.2-6

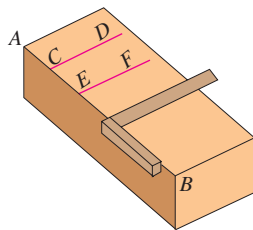


图 12.2-7

如图 12.2-7, 你能说出木工用图中的角尺画平行线的道理吗?



思考

两条直线被第三条直线所截, 同时得到同位角、内错角和同旁内角. 由同位角相等, 可以判定两条直线平行, 那么能否利用内错角, 或同旁内角来判定两条直线平行呢?

如图 12.2-8, 如果 $\angle 2 = \angle 3$, 能得出 $a \parallel b$ 吗?

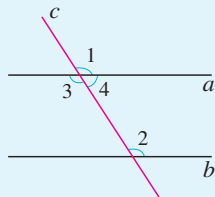


图 12.2-8

因为 $\angle 2 = \angle 3$, 而 $\angle 3 = \angle 1$ (为什么?), 所以 $\angle 1 = \angle 2$, 即同位角相等, 从而 $a \parallel b$. 这样, 由判定方法 1, 可以得出利用内错角判定两条直线平行的方法:

判定方法 2 两条直线被第三条直线所截, 如果内错角相等, 那么这两条直线平行.

简单说成: 内错角相等, 两直线平行.

利用同旁内角, 有判定两条直线平行的第三种方法:

判定方法 3 两条直线被第三条直线所截, 如果同旁内角互补, 那么这两条直线平行.

简单说成：**同旁内角互补，两直线平行**。



探究

遇到一个新问题时，常常把它转化为已知的（或已解决的）问题。这一节中，我们是怎样利用“同位角相等，两直线平行”得到“内错角相等，两直线平行”的？你能利用“同位角相等，两直线平行”或“内错角相等，两直线平行”得到“同旁内角互补，两直线平行”吗？

例 在同一平面内，如果两条直线都垂直于同一条直线，那么这两条直线平行吗？为什么？

分析：垂直总与直角联系在一起，进而用判断两条直线平行的方法进行判定。

答：这两条直线平行.理由如下：

如图 12.2-9.

$$\because b \perp a,$$

$$\therefore \angle 1 = 90^\circ.$$

$$\text{同理 } \angle 2 = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2.$$

$$\because \angle 1 \text{ 和 } \angle 2 \text{ 是同位角,}$$

$$\therefore b \parallel c \text{ (同位角相等, 两直线平行).}$$

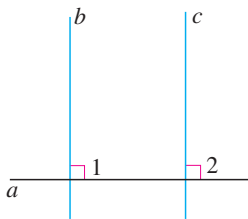


图 12.2-9

此处符号“ $\because$ ”表示“因为”，符号“ $\therefore$ ”表示“所以”。

你还能利用其他方法说明 $b \parallel c$ 吗？

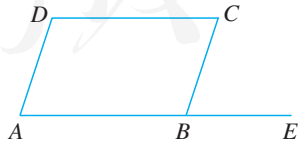
练习

1. 如图， BE 是 AB 的延长线.

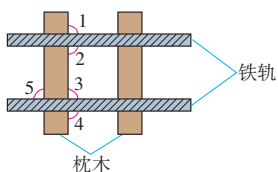
(1) 由 $\angle CBE = \angle A$ 可以判定哪两条直线平行？
根据是什么？

(2) 由 $\angle CBE = \angle C$ 可以判定哪两条直线平行？
根据是什么？

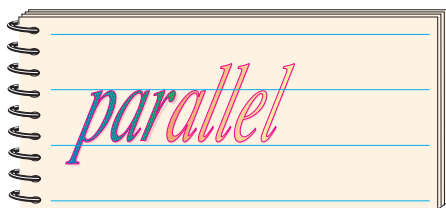
2. 在铺设铁轨时，两条直轨必须是互相平行的. 如图，已经知道 $\angle 2$ 是直角，那么再度量图中已标出的哪个角，就可以判断两条直轨是否平行？为什么？



(第 1 题)



(第 2 题)



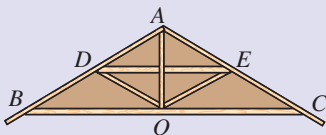
(第 3 题)

3. 如图, 这是小明同学自己制作的英语抄写纸的一部分. 其中的横格线互相平行吗? 你有多少种判别方法?

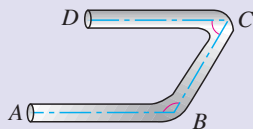
习题 12.2

复习巩固

1. 如图, 为了加固房屋, 要在屋架上加一根横梁 DE , 使 $DE \parallel BC$. 如果 $\angle ABC = 31^\circ$, $\angle ADE$ 应为多少度?



(第 1 题)



(第 2 题)

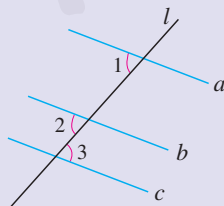
2. 如图, 一个弯形管道 $ABCD$ 的拐角 $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle BCD = 60^\circ$, 这时说管道 $AB \parallel CD$ 对吗? 为什么?
3. 如图, 这是两条道路互相垂直的交叉路口, 你能画出它的平面示意图吗? 类似地, 你能画出两条道路成 75° 角的交叉路口的示意图吗?



(第 3 题)

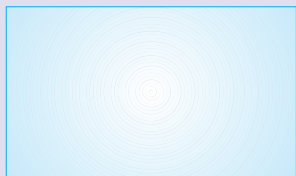
4. 如图, 直线 a, b, c 被直线 l 所截, 量得 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$.

- (1) 从 $\angle 1 = \angle 2$ 可以得出哪两条直线平行? 根据是什么?
- (2) 从 $\angle 1 = \angle 3$ 可以得出哪两条直线平行? 根据是什么?
- (3) 直线 a, b, c 互相平行吗? 根据是什么?

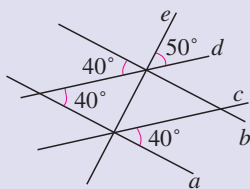


(第 4 题)

5. 如图，有一块方形玻璃，用什么方法可以检验它相对的两条边是否平行？



(第5题)

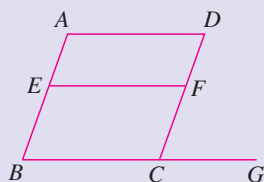


(第6题)

6. 根据图中所给出的条件，找出互相平行的直线和互相垂直的直线。

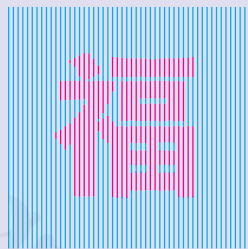
综合运用

7. 如图， E 是 AB 上一点， F 是 DC 上一点， G 是 BC 延长线上一点。



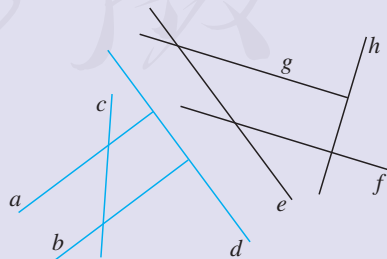
(第7题)

- (1) 如果 $\angle B = \angle DCG$ ，可以判断哪两条直线平行？为什么？
 - (2) 如果 $\angle D = \angle DCG$ ，可以判断哪两条直线平行？为什么？
 - (3) 如果 $\angle D + \angle DFE = 180^\circ$ ，可以判断哪两条直线平行？为什么？
8. 如图，这些图案中有一些平行条纹，请你设计一些类似图案，并把你的设计与同学们交流一下。



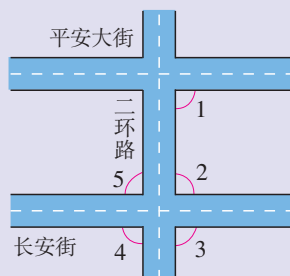
(第8题)

9. 借助直尺、三角尺和量角器，在图中找出互相平行的直线和互相垂直的直线。



(第9题)

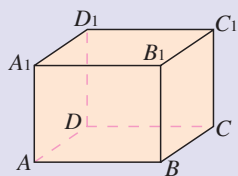
10. 如图, 为了说明示意图中的平安大街与长安街是互相平行的, 在地图上量得 $\angle 1 = 90^\circ$, 你能通过度量图中已标出的其他的角来验证这个结论吗? 说出你的理由.



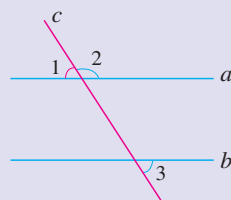
(第 10 题)

拓展探索

11. 观察如图所示的长方体, 用符号表示下列两棱的位置关系: A_1B_1 _____ AB , AA_1 _____ AB , A_1D_1 _____ C_1D_1 , AD _____ BC .
你能在教室里找到这些位置关系的实例吗? 与同学们讨论一下.



(第 11 题)



(第 12 题)

12. 如图, 当 $\angle 1 = \angle 3$ 时, 直线 a, b 平行吗? 当 $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ 时, 直线 a, b 平行吗? 为什么?

人教版®

12.3 平行线的性质

12.3.1 平行线的性质

利用同位角相等，或者内错角相等，或者同旁内角互补，可以判定两条直线平行. 反过来，如果两条直线平行，同位角、内错角、同旁内角又各有什么关系呢？这就是我们下面要学习的平行线的性质.

类似于研究平行线的判定，我们先来研究两条直线平行时，它们被第三条直线截得的同位角的关系.



探究

如图 12.3-1，利用坐标纸上的直线，或者用直尺和三角尺画两条平行线 $a \parallel b$ ，然后，画一条截线 c 与这两条平行线相交，度量所形成的八个角的度数，把结果填入下表：

角	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	$\angle 4$
度数				
角	$\angle 5$	$\angle 6$	$\angle 7$	$\angle 8$
度数				

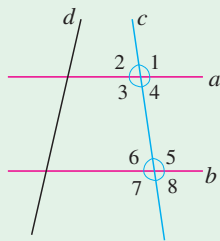


图 12.3-1

$\angle 1, \angle 2, \dots, \angle 8$ 中，哪些是同位角？它们的度数之间有什么关系？由此猜想两条平行线被第三条直线截得的同位角有什么关系.

再任意画一条截线 d ，同样度量并比较各对同位角的度数，你的猜想还成立吗？

一般地，平行线具有性质：

性质 1 两条平行线被第三条直线所截，同位角相等.

简单说成：两直线平行，同位角相等.



思考

上一节，我们利用“同位角相等，两直线平行”推出了“内错角相等，两直线平行”。类似地，你能由性质1，推出两条平行线被第三条直线截得的内错角之间的关系吗？

如图 12.3-2，直线 $a \parallel b$ ， c 是截线. 根据“两直线平行，同位角相等”，可得 $\angle 2 = \angle 3$. 而 $\angle 3$ 和 $\angle 1$ 互为对顶角，所以 $\angle 3 = \angle 1$. 所以 $\angle 1 = \angle 2$. 这样，我们就得到了平行线的另一个性质：

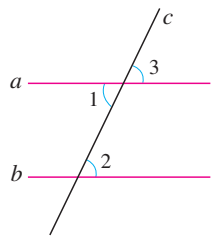


图 12.3-2

性质 2 两条平行线被第三条直线所截，内错角相等.

简单说成：两直线平行，内错角相等.

类似地，由“两直线平行，同位角相等”，我们可以推出平行线关于同旁内角的性质（请你自己完成推理过程）：

性质 3 两条平行线被第三条直线所截，同旁内角互补.

简单说成：两直线平行，同旁内角互补.

例 1 图12.3-3 是一块梯形铁片的残余部分，量得 $\angle A = 100^\circ$ ， $\angle B = 115^\circ$ ，梯形的另外两个角分别是多少度？

解：因为梯形上、下两底 AB 与 DC 互相平行，根据“两直线平行，同旁内角互补”，可得 $\angle A$ 与 $\angle D$ 互补， $\angle B$ 与 $\angle C$ 互补.

于是

$$\angle D = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ,$$

$$\angle C = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ.$$

所以梯形的另外两个角分别是 80° ， 65° .

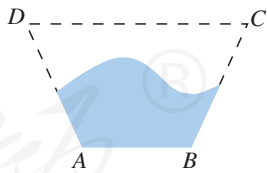
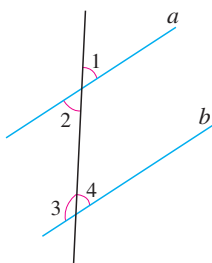


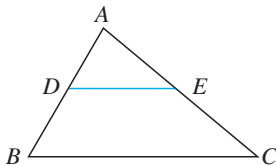
图 12.3-3

练习

1. 如图，直线 $a \parallel b$ ， $\angle 1 = 54^\circ$ ， $\angle 2$ ， $\angle 3$ ， $\angle 4$ 各是多少度？



(第1题)



(第2题)

2. 如图，三角形 ABC 中， D 是 AB 上一点， E 是 AC 上一点， $\angle ADE = 60^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle AED = 40^\circ$ 。

- (1) DE 和 BC 平行吗？为什么？
- (2) $\angle C$ 是多少度？为什么？

12.3.2 命题、定理、证明

前面，我们学过一些对某一件事情作出判断的语句，例如：

- (1) 如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行；
- (2) 两条平行线被第三条直线所截，同旁内角互补；
- (3) 对顶角相等；
- (4) 等式两边加同一个数，结果仍是等式。

像这样判断一件事情的语句，叫做**命题** (proposition)。命题由题设和结论两部分组成。题设是已知事项，结论是由已知事项推出的事项。

数学中的命题常可以写成“如果……那么……”的形式，这时“如果”后接的部分是题设，“那么”后接的部分是结论。例如，上面命题(1)中，“两条直线都与第三条直线平行”是题设，“这两条直线也互相平行”是结论。

有些命题的题设和结论不明显，要经过分析才能找出题设和结论，从而将它们写成“如果……那么……”的形式。例如，命题“对顶角相等”可以写成“如果两个角是对顶角，那么这两个角相等”。

请你将命题(2)
(4)改写成“如果……
那么……”的形式。

上面所举出的命题都是正确的. 就是说, 如果题设成立, 那么结论一定成立, 这样的命题叫做**真命题**. 还有一些命题, 如“如果两个角互补, 那么它们是邻补角”“如果一个数能被 2 整除, 那么它也能被 4 整除”等, 这些命题中, 题设成立时, 不能保证结论一定成立, 这样的命题叫做**假命题**.

练习

1. 指出下列命题的题设和结论:

(1) 如果 $AB \perp CD$, 垂足为 O , 那么 $\angle AOC = 90^\circ$;

(2) 如果 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 = \angle 3$, 那么 $\angle 1 = \angle 3$;

(3) 两直线平行, 同位角相等.

2. 举出学过的 2~3 个真命题.

在前面, 我们学过的一些图形的性质, 都是真命题. 其中有些命题是基本事实, 如“两点确定一条直线”“经过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行”等. 还有一些命题, 如“对顶角相等”“内错角相等, 两直线平行”等, 它们的正确性是经过推理证实的, 这样得到的真命题叫做**定理** (theorem). 定理也可以作为继续推理的依据.

在很多情况下, 一个命题的正确性需要经过推理才能作出判断, 这个推理过程叫做**证明** (proof). 下面, 我们以证明命题“在同一平面内, 如果一条直线垂直于两条平行线中的一条, 那么它也垂直于另一条”为例, 来说明什么是证明.

例 2 如图 12.3-4, 已知直线 $b \parallel c$, $a \perp b$.
求证 $a \perp c$.

证明: $\because a \perp b$ (已知),
 $\therefore \angle 1 = 90^\circ$ (垂直的定义).
 $\because b \parallel c$ (已知),
 $\therefore \angle 1 = \angle 2$ (两直线平行, 同位角相等).
 $\therefore \angle 2 = \angle 1 = 90^\circ$ (等量代换).
 $\therefore a \perp c$ (垂直的定义).

证明中的每一步推理都要有根据, 不能“想当然”. 这些根据, 可以是已知条件, 也可以是学过的定义、基本事实、定理等.

判断一个命题是假命题, 只要举出一个例子 (反例), 它符合命题的题设, 但不满足结论就可以了.

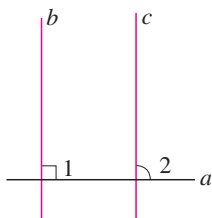


图 12.3-4

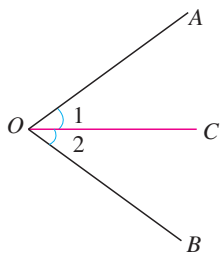


图 12.3-5

例如，要判定命题“相等的角是对顶角”是假命题，可以举出如下反例：图 12.3-5 中， OC 是 $\angle AOB$ 的平分线， $\angle 1 = \angle 2$ ，但它们不是对顶角。

练习

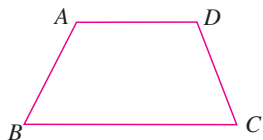
1. 在下面的括号内，填上推理的根据。

如图， $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ，求证 $\angle C + \angle D = 180^\circ$ 。

证明： $\because \angle A + \angle B = 180^\circ$ ，

$\therefore AD \parallel BC$ ()。

$\therefore \angle C + \angle D = 180^\circ$ ()。



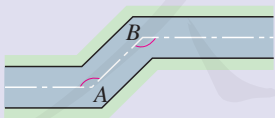
(第 1 题)

2. 命题“同位角相等”是真命题吗？如果是，说出理由；如果不是，请举出反例。

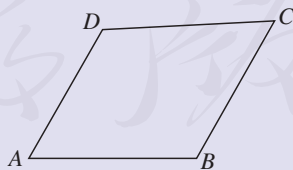
习题 12.3

复习巩固

1. 如图，一条公路两次转弯后，和原来的方向相同。如果第一次的拐角 $\angle A$ 是 135° ，第二次的拐角 $\angle B$ 是多少度？为什么？



(第 1 题)

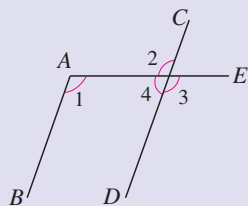


(第 2 题)

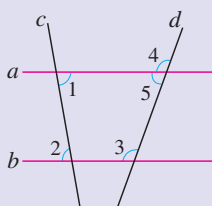
2. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，如果 $AD \parallel BC$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，求 $\angle B$ 的度数。不用度量的方法，能否求得 $\angle D$ 的度数？
3. 如图，平行线 AB ， CD 被直线 AE 所截。
- (1) 从 $\angle 1 = 110^\circ$ 可以知道 $\angle 2$ 是多少度？为什么？

(2) 从 $\angle 1 = 110^\circ$ 可以知道 $\angle 3$ 是多少度? 为什么?

(3) 从 $\angle 1 = 110^\circ$ 可以知道 $\angle 4$ 是多少度? 为什么?



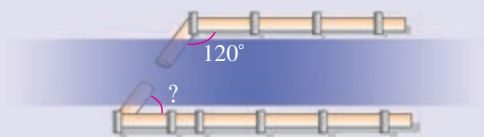
(第3题)



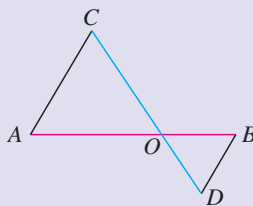
(第4题)

4. 如图, $a \parallel b$, c, d 是截线, $\angle 1 = 80^\circ$, $\angle 5 = 70^\circ$. $\angle 2, \angle 3, \angle 4$ 各是多少度? 为什么?

5. 如图, 一条公路的两侧铺设了两条平行管道, 如果公路一侧铺设的管道与纵向连通管道的角度为 120° , 那么, 为了使管道对接, 另一侧应以什么角度铺设纵向连通管道? 为什么?



(第5题)



(第6题)

6. 在下面的括号内, 填上推理的根据.

如图, AB 和 CD 相交于点 O , $\angle A = \angle B$. 求证 $\angle C = \angle D$.

证明: $\because \angle A = \angle B$,

$\therefore AC \parallel BD$ ().

$\therefore \angle C = \angle D$ ().

综合运用

7. 选择题.

(1) 如图 (1), 由 $AB \parallel CD$, 可以得到 ().

(A) $\angle 1 = \angle 2$

(B) $\angle 2 = \angle 3$

(C) $\angle 1 = \angle 4$

(D) $\angle 3 = \angle 4$

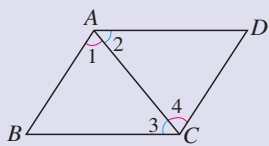
(2) 如图 (2), 如果 $AB \parallel CD \parallel EF$, 那么 $\angle BAC + \angle ACE + \angle CEF =$ ().

(A) 180°

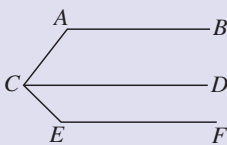
(B) 270°

(C) 360°

(D) 540°



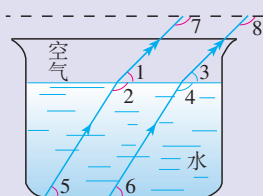
(1)



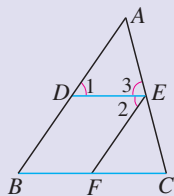
(2)

(第7题)

8. 光线在不同介质中的传播速度是不同的, 因此当光线从水中射向空气时, 要发生折射. 由于折射率相同, 所以在水中平行的光线, 在空气中也是平行的. 如图, $\angle 1 = 45^\circ$, $\angle 2 = 122^\circ$, 求图中其他角的度数.



(第8题)



(第9题)

9. 如图, 用式子表示下列句子:

- (1) 因为 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 相等, 根据“内错角相等, 两直线平行”, 所以 AB 和 EF 平行;
- (2) 因为 DE 和 BC 平行, 根据“两直线平行, 同位角相等”, 所以 $\angle 1 = \angle B$, $\angle 3 = \angle C$.

10. 如图, 这是一个国际象棋棋盘的示意图, 它共有 8 行 8 列, 仿照它做出一张国际象棋的棋盘纸. 类似地, 你还能做出一张中国象棋的棋盘纸吗?



(第10题)

11. 操场中的相交线与平行线.

- (1) 举出操场中一些相交线、垂线、平行线的例子;
- (2) 如果要你画出一个篮球场, 你怎样做才能保证相应的线垂直或平行呢? 不妨在纸上试一试.

12. 判断下列命题是真命题还是假命题, 如果是假命题, 举出一个反例.

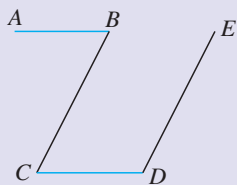
- (1) 两个锐角的和是锐角;
- (2) 邻补角是互补的角;
- (3) 同旁内角互补.

13. 完成下面的证明.

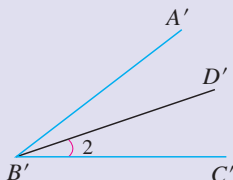
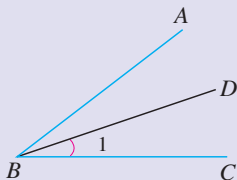
- (1) 如图 (1), $AB \parallel CD$, $CB \parallel DE$. 求证 $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

证明: $\because AB \parallel CD$,

- $\therefore \angle B = \underline{\hspace{2cm}}$ ($\underline{\hspace{2cm}}$).
 $\because CB \parallel DE$,
 $\therefore \angle C + \angle D = 180^\circ$ ($\underline{\hspace{2cm}}$).
 $\therefore \angle B + \angle D = 180^\circ$.



(1)



(2)

(第 13 题)

- (2) 如图 (2), $\angle ABC = \angle A'B'C'$, BD , $B'D'$ 分别是 $\angle ABC$, $\angle A'B'C'$ 的平分线. 求证 $\angle 1 = \angle 2$.

证明: $\because BD$, $B'D'$ 分别是 $\angle ABC$, $\angle A'B'C'$ 的平分线,

$$\therefore \angle 1 = \frac{1}{2} \angle ABC, \angle 2 = \underline{\hspace{2cm}} (\underline{\hspace{2cm}}).$$

$$\text{又 } \angle ABC = \angle A'B'C',$$

$$\therefore \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \angle A'B'C'.$$

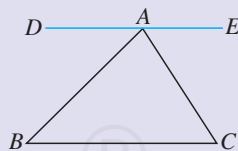
$$\therefore \angle 1 = \angle 2 (\underline{\hspace{2cm}}).$$

拓广探索

14. 如图, 直线 DE 经过点 A , $DE \parallel BC$, $\angle B = 44^\circ$, $\angle C = 57^\circ$.

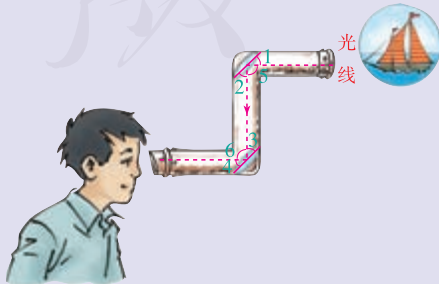
- (1) $\angle DAB$ 等于多少度? 为什么?
- (2) $\angle EAC$ 等于多少度? 为什么?
- (3) $\angle BAC$ 等于多少度?

(通过这道题, 你能说明为什么三角形的内角和是 180° 吗?)



(第 14 题)

15. 如图, 潜望镜中的两面镜子是互相平行放置的, 光线经过镜子反射时, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 2$ 和 $\angle 3$ 有什么关系? 为什么进入潜望镜的光线和离开潜望镜的光线是平行的? (提示: 分析这两条光线被哪条直线所截.)



(第 15 题)



探索两条直线的位置关系

利用图形计算器或计算机等信息技术工具，可以很方便、直观地探索两条直线的位置关系。下面，我们以《几何画板》软件为例说明。

1. 探索邻补角、对顶角的关系

画两条相交直线 AB , CD (图 1)，在它们所成的四个角中，哪些互为邻补角？哪些互为对顶角？度量这四个角的度数，它们的大小有什么关系？拖动点 B 或点 C ，改变角的大小，这个关系还保持吗？

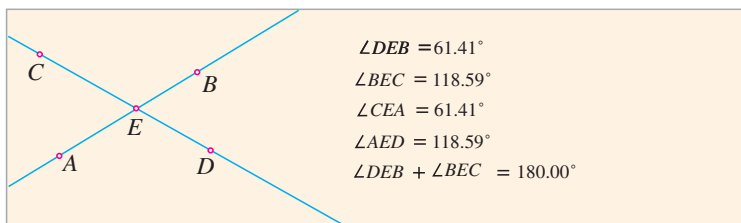


图 1

2. 探索垂线段的性质

如图 2， $PO \perp l$ ，点 A 在直线 l 上运动，度量并观察线段 PO 和 PA 的长度，你能发现什么结论？

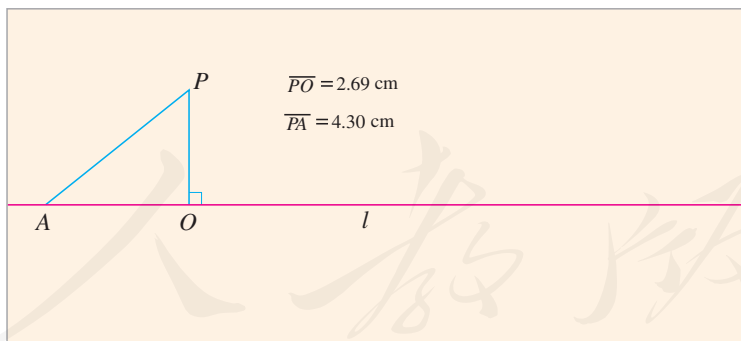


图 2

3. 探索平行线的性质

如图 3，过点 C 画直线 AB 的平行线，度量所形成的八个角的度数，其中的同位角、内错角、同旁内角有什么关系？拖动点 A 、点 B 或直线 CA ，这个关系还成立吗？

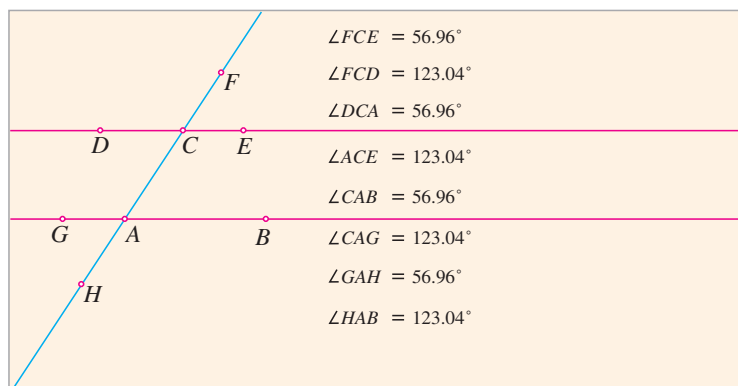


图 3

如图 4，再任意画两条直线以及它们的截线，它们所形成的八个角的度数还存在上述关系吗？拖动点 B 或点 D ，观察这些角的度数，什么时候直线 AB 和 CD 平行？

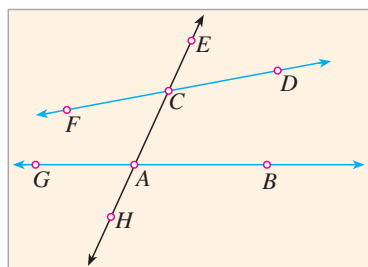


图 4

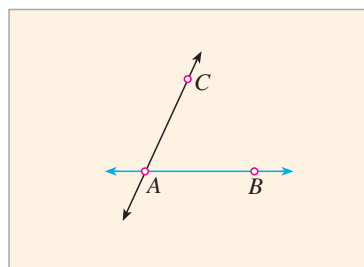


图 5

利用上面的规律，你能过点 C 画直线 AB 的平行线吗（图 5）？你有几种方法？利用软件的画角功能试一试。

人教版®

12.4 平移

仔细观察下面一些美丽的图案（图 12.4-1），它们有什么共同的特点？能否根据其中的一部分绘制出整个图案？



图 12.4-1



探究

如何在一张半透明的纸上，画出一排形状和大小如图 12.4-2 的雪人呢？



图 12.4-2



图 12.4-3

可以把半透明的纸盖在图 12.4-2 上，先描出一个雪人，然后按同一方向陆续移动这张纸，再描出第二个、第三个……（图 12.4-3）。



思考

如图 12.4-4，在所画出的相邻两个雪人

中，找出三组对应点（例如，它们的鼻尖 A 与 A' ，帽顶 B 与 B' ，纽扣 C 与 C' ），连接这些对应点，观察得出的线段，它们的位置、长短有什么关系？

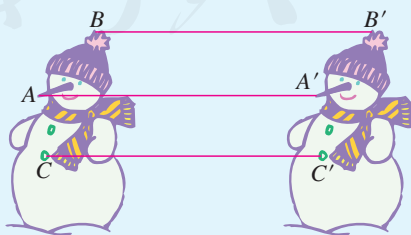


图 12.4-4

可以发现, $AA' \parallel BB' \parallel CC'$, 并且 $AA' = BB' = CC'$.

再画出一些连接其他对应点的线段, 它们是否仍有前面的关系?



归纳

1. 把一个图形整体沿某一直线方向移动, 会得到一个新的图形, 新图形与原图形的形状和大小完全相同.

2. 新图形中的每一点, 都是由原图形中的某一点移动后得到的, 这两个点是对应点. 连接各组对应点的线段平行 (或在同一条直线上) 且相等.

图形的这种移动, 叫做**平移** (translation).

图形平移的方向, 不限于是水平的, 如图 12.4-5.

平移在我们日常生活中是很常见的, 利用平移也可以制作很多美丽的图案. 你能举出生活中一些利用平移的例子吗?

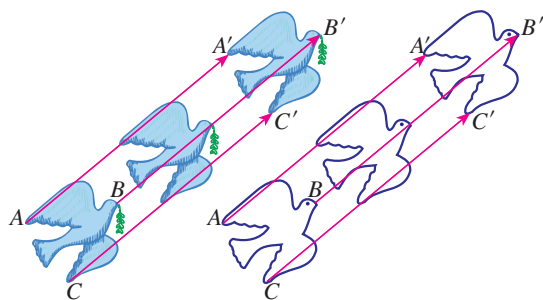


图 12.4-5

例 如图12.4-6 (1), 平移三角形 ABC , 使点 A 移动到点 A' , 画出平移后的三角形 $A'B'C'$.

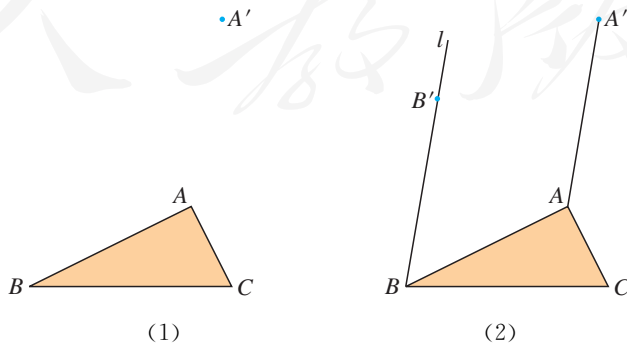


图 12.4-6

分析：图形平移后的对应点有什么特征？作出点 B 和点 C 的对应点 B' , C' ，能确定三角形 $A'B'C'$ 吗？

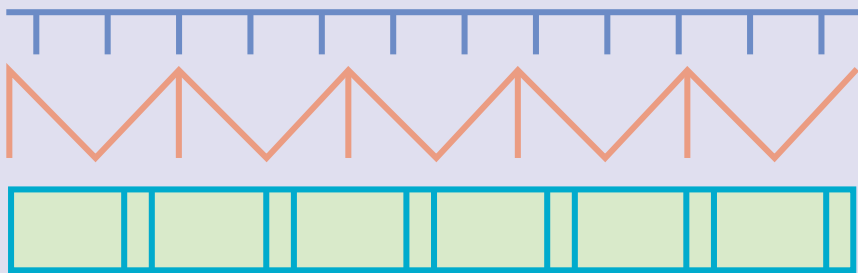
解：如图12.4-6 (2)，连接 AA' ，过点 B 作 AA' 的平行线 l ，在 l 上截取 $BB' = AA'$ ，则点 B' 就是点 B 的对应点.

类似地，你能作出点 C 的对应点 C' ，并进一步得到平移后的三角形 $A'B'C'$ 吗？动手试一试.

习题 12.4

复习巩固

1. 下列图案可以由什么图形平移形成？

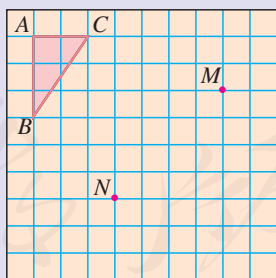


(第 1 题)

2. 如图，有一个由 4 个三角形组成的图形，通过平移，你能用它组成什么图案？试一试，把你的图案与同学们交流一下.



(第 2 题)

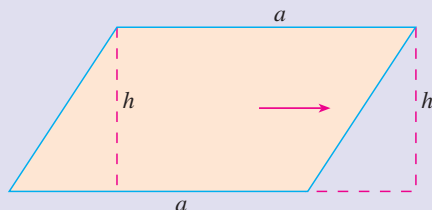


(第 3 题)

3. 如图，在方格纸中平移三角形 ABC ，使点 A 移到点 M ，点 B 和点 C 应移到什么位置？再将点 A 由点 M 移到点 N ，分别画出两次平移后的三角形. 如果直接平移三角形 ABC ，使点 A 移到点 N ，它和我们前面得到的三角形位置相同吗？

综合运用

4. 如图，用平移方法说明怎样得出平行四边形的面积公式 $S=ah$.



(第 4 题)

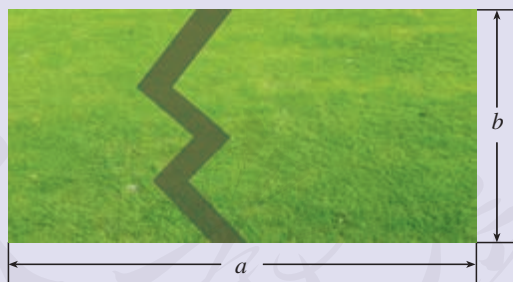
5. 许多美丽的图案都是用平移的方法绘制而成的. 观察下面图案的绘制规律, 你能类似地设计一些图案吗?



(第 5 题)

拓广探索

6. 如图, 在一块长为 a m, 宽为 b m 的长方形草地上, 有一条弯曲的小路, 小路的左边线向右平移 1 m 就是它的右边线. 求这块草地的绿地面积.



(第 6 题)

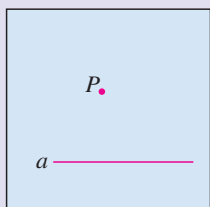


数学活动

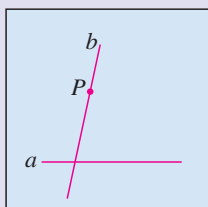
活动1 你有多少种画平行线的方法？

学习了平行线后，李强、张明、王玲三位同学分别想出了过一点画一条直线的平行线的新的方法，他们分别是这样做的：

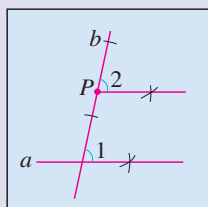
李强



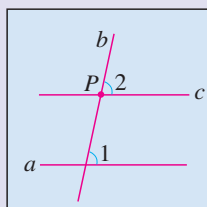
(1)



过点 P 作直线 b
(2)

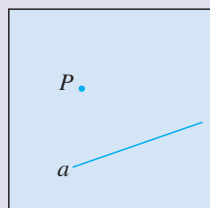


作 $\angle 2 = \angle 1$
(3)

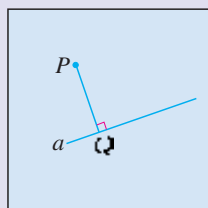


则 $c \parallel a$
(4)

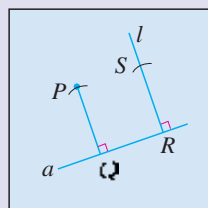
张明



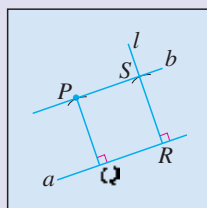
(1)



作 $PC \perp a$
(2)

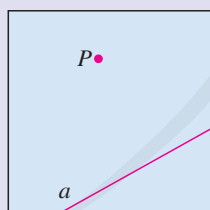


作 $l \perp a$, 取 $RS = PC$
(3)

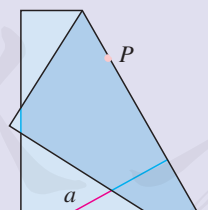


连接 PS , 则 $b \parallel a$
(4)

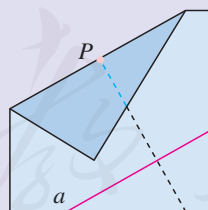
王玲是通过折纸做的



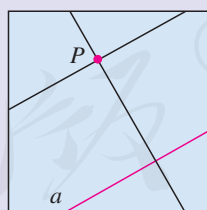
(1)



(2)



(3)



(4)

你还有其他方法吗？动手试一试，与同学们交流一下。

活动2 设计美丽的图案

利用平移，可以设计非常美丽的图案，例如图 1 中每一匹马都可以由正方形上的平移得到，如图 2 所示。



图 1

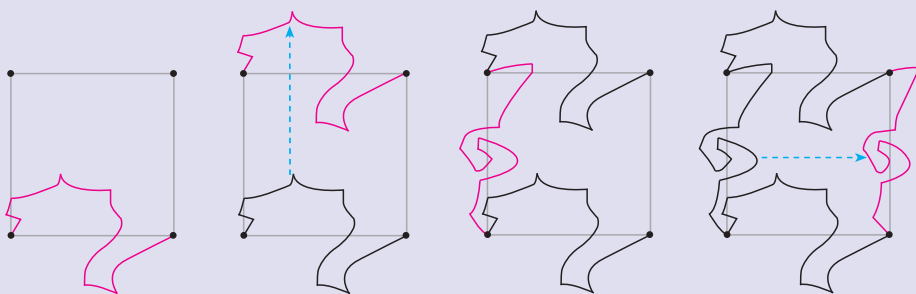
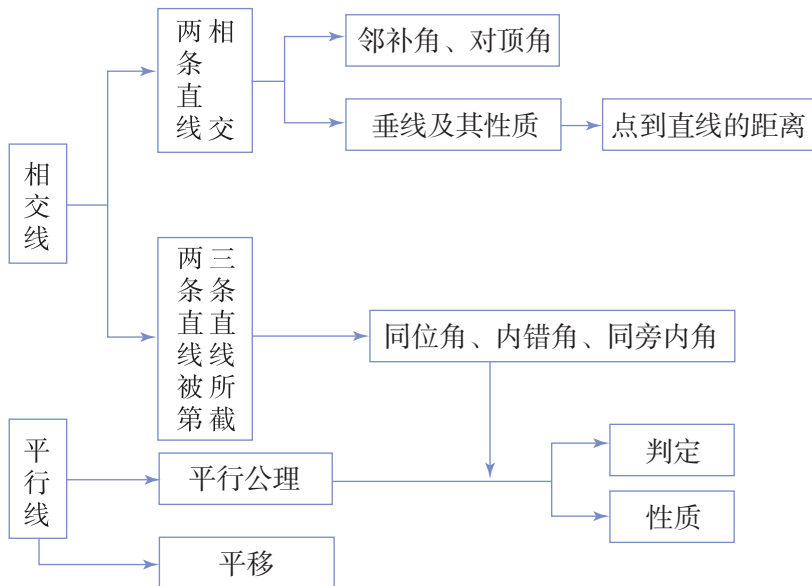


图 2

类似地，你还能用平移设计一些图案吗？

小 结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

本章我们学习了平面内不重合的两条直线的位置关系——相交与平行. 当两条直线只有一个公共点时, 这两条直线相交. 在相交线的学习中, 我们研究了两条直线相交所形成的邻补角和对顶角的位置和数量关系, 这也是相交线的性质. 垂直是相交的特殊情形, 它在实际生产和社会生活中具有广泛的应用. 当两条直线没有公共点时, 这两条直线平行. 借助两条直线被第三条直线所截形成的同位角、内错角和同旁内角, 我们研究了平行线的判定与性质.

“图形的判定”讨论的是确定某种图形需要什么条件. 例如, 两条直线与第三条直线相交, 具备“同位角相等”, 就有“两直线平行”. “图形的性质”讨论的是这类图形有怎样的共同特性. 例如, 两条直线只要平行, 它们被第三条直线所截时, 就一定有同位角相等.

学习本章时, 要注意观察实物、模型和图形, 通过观察、测量、实验、归纳、对比、类比等来寻找图形中的位置关系和数量关系, 从而发现图形的性质. 同时, 还要注意体会通过“推理”获得数学结论的方法, 培养言之有据的习惯和有条理地思考、表达的能力.

请你带着下面的问题, 复习一下全章的内容吧.

1. 下面是本章学到的一些数学名词, 你能用自己的语言描述它们吗? 你能分别画一个图形表示它们吗?

对顶角、邻补角、垂直、平行、同位角、内错角、同旁内角、平移.

2. 两条直线相交形成四个角, 它们具有怎样的位置关系和数量关系?

3. 什么是点到直线的距离? 你会度量吗? 请举例说明.

4. 怎样判定两条直线是否平行? 平行线有什么性质? 对比平行线的性质和直线平行的判定方法, 它们有什么异同?

5. 什么是命题? 如何判断一个命题是真命题还是假命题? 请结合具体例子说明.

6. 图形平移时, 连接各对应点的线段有什么关系? 你能利用平移设计一些图案吗?

复习题 12

复习巩固

1. 判断题 (正确的画 $\checkmark$, 错误的画 $\times$).

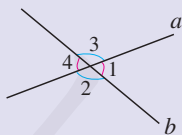
(1) a, b, c 是直线, 若 $a \parallel b, b \parallel c$, 则 $a \parallel c$; ()

(2) a, b, c 是直线, 若 $a \perp b, b \perp c$, 则 $a \perp c$. ()

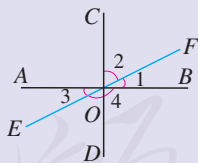
2. 如图, 两条直线 a, b 相交.

(1) 如果 $\angle 1 = 60^\circ$, 求 $\angle 2, \angle 3, \angle 4$ 的度数;

(2) 如果 $2\angle 3 = 3\angle 1$, 求 $\angle 2, \angle 3, \angle 4$ 的度数.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图, 直线 $AB \perp CD$, 垂足为 O , 直线 EF 经过点 O , $\angle 1 = 26^\circ$, 求 $\angle 2, \angle 3, \angle 4$ 的度数.

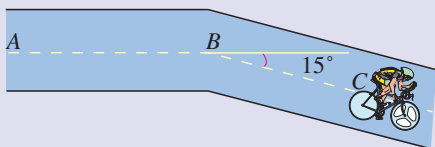
4. 根据下列语句画出图形:

(1) 过线段 AB 的中点 C , 画 $CD \perp AB$;

(2) 点 P 到直线 AB 的距离是 3 cm , 过点 P 画直线 AB 的垂线 PC ;

(3) 过三角形 ABC 内的一点 P , 分别画 AB, BC, CA 的平行线.

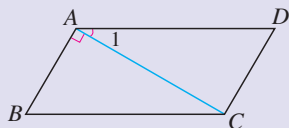
5. 如图, 某人骑自行车自 A 沿正东方向前进, 至 B 处后, 行驶方向改为东偏南 15° , 行驶到 C 处仍按正东方向行驶, 画出继续行驶的路线.



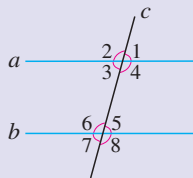
(第 5 题)

6. 如图, $\angle 1 = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $AB \perp AC$.

- (1) $\angle DAB + \angle B$ 等于多少度?
(2) AD 与 BC 平行吗? AB 与 CD 平行吗?



(第 6 题)



(第 7 题)

7. 如图, 平行线 a, b 被直线 c 所截, 知道 $\angle 1 \sim \angle 8$ 中一个角的度数, 能否求出其他角的度数? 如果能, 用其中一个角表示出其他各角.

综合运用

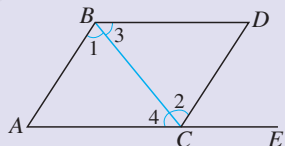
8. 选择题.

- (1) 如图 (1), 点 E 在 AC 的延长线上, 下列条件中能判断 $AB \parallel CD$ 的是 ().

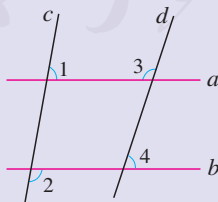
- (A) $\angle 3 = \angle 4$ (B) $\angle 1 = \angle 2$
(C) $\angle D = \angle DCE$ (D) $\angle D + \angle ACD = 180^\circ$

- (2) 如图 (2), $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, $\angle 3 = 108^\circ$, 则 $\angle 4 = ()$.

- (A) 72° (B) 80°
(C) 82° (D) 108°



(1)



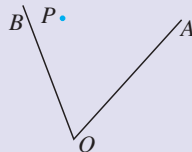
(2)

(第 8 题)

9. 图中所示为一组护网的示意图, 它可看成由两组平行线组成, 你能通过检验一些角的大小来判断其中的线段是否平行吗? 说出你的理由.



(第 9 题)



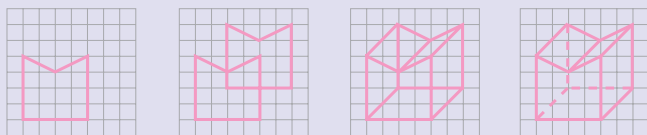
(第 10 题)

10. 如图, $\angle AOB$ 内有一点 P :

- (1) 过点 P 画 $PC \parallel OB$ 交 OA 于点 C , 画 $PD \parallel OA$ 交 OB 于点 D ;
- (2) 写出图中互补的角;
- (3) 写出图中相等的角.

11. 如图, 利用平移可以画出一些立体图形. 在方格纸上写出你的名字或你的校名, 用类似的方法画出它的立体图. 变换不同的长度和方向多试几次, 你认为哪一种更具艺术效果?

MATH



(第 11 题)

12. 指出下列命题的题设和结论, 并判断它们是真命题还是假命题. 如果是假命题, 举出一个反例.

- (1) 两个角的和等于平角时, 这两个角互为补角;
- (2) 内错角相等;
- (3) 两条平行线被第三条直线所截, 内错角相等.

13. 完成下面的证明.

- (1) 如图 (1), 点 D, E, F 分别是三角形 ABC 的边 BC, CA, AB 上的点, $DE \parallel BA, DF \parallel CA$. 求证 $\angle FDE = \angle A$.

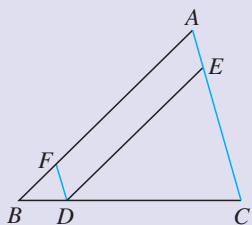
证明: $\because DE \parallel BA,$

$\therefore \angle FDE = \underline{\hspace{2cm}} (\underline{\hspace{2cm}}).$

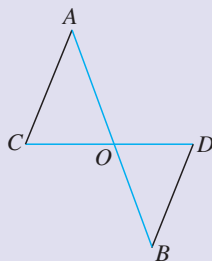
$\because DF \parallel CA,$

$\therefore \angle A = \underline{\hspace{2cm}} (\underline{\hspace{2cm}}).$

$\therefore \angle FDE = \angle A.$



(1)



(2)

(第 13 题)

(2) 如图 (2), AB 和 CD 相交于点 O , $\angle C = \angle COA$, $\angle D = \angle BOD$. 求证 $AC \parallel BD$.

证明: $\because \angle C = \angle COA$, $\angle D = \angle BOD$,

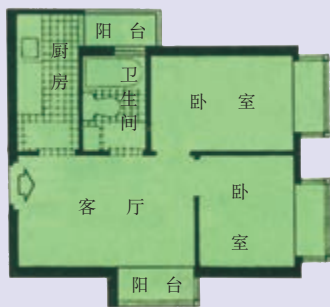
又 $\angle COA = \angle BOD$ (_____),

$\therefore \angle C =$ _____.

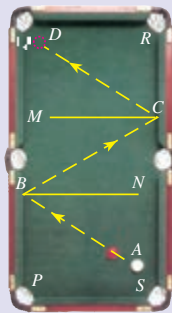
$\therefore AC \parallel BD$ (_____).

拓广探索

14. 如图, 这是一套住房的平面图, 图中有许多相交线和平行线. 量量你家的住房, 选择适当的比例尺, 画出它的平面图. 你能自己设计一个户型吗?



(第 14 题)



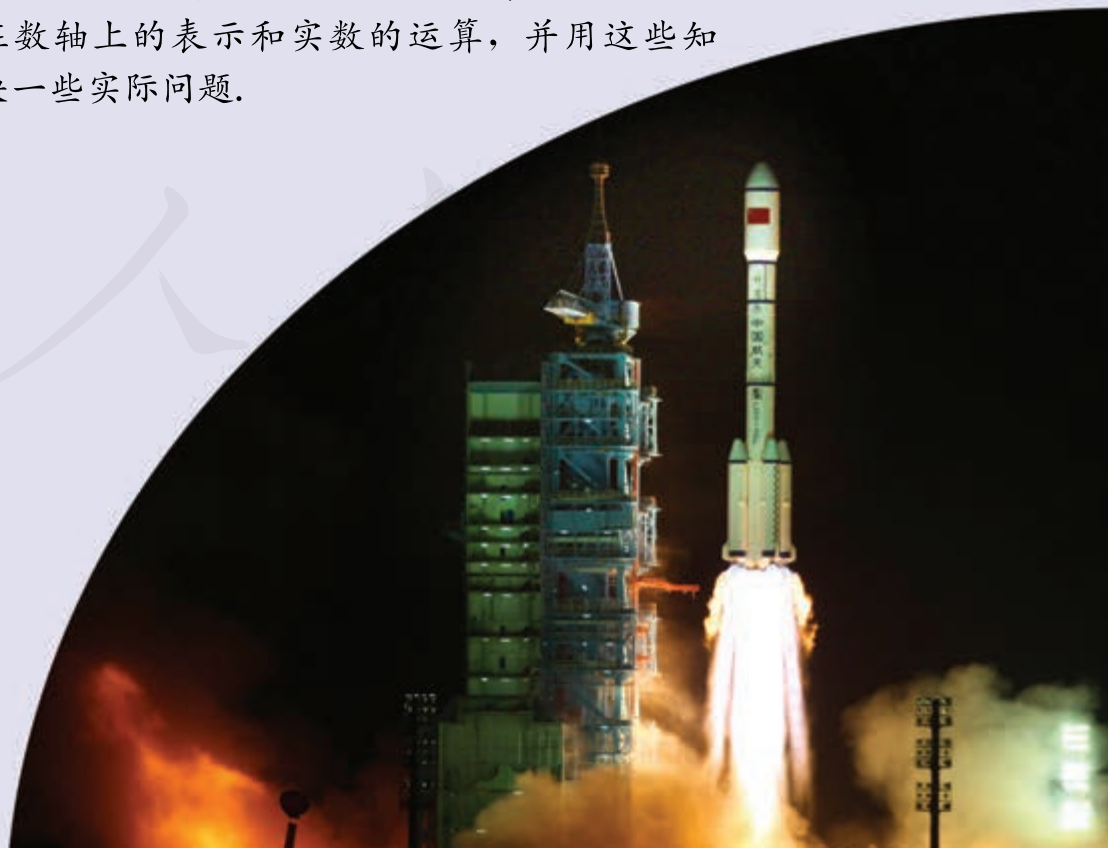
(第 15 题)

15. 一个台球桌的桌面如图所示, 一个球在桌面上的点 A 滚向桌边 PQ , 碰着 PQ 上的点 B 后便反弹而滚向桌边 RS , 碰着 RS 上的点 C 便反弹而滚向点 D . 如果 $PQ \parallel RS$, AB , BC , CD 都是直线, 且 $\angle ABC$ 的平分线 BN 垂直于 PQ , $\angle BCD$ 的平分线 CM 垂直于 RS , 那么, 球经过两次反弹后所滚的路径 CD 是否平行于原来的路径 AB ?

第十三章 实数

同学们，你们知道宇宙飞船离开地球进入地面附近轨道的速度在什么范围内吗？这时它的速度要大于第一宇宙速度 v_1 (单位：m/s)，而小于第二宇宙速度 v_2 (单位：m/s). v_1, v_2 的大小满足 $v_1^2 = gR, v_2^2 = 2gR$ ，其中 g 是物理中的一个常数 (重力加速度)， $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ ， R 是地球半径， $R \approx 6.4 \times 10^6 \text{ m}$. 怎样求 v_1, v_2 呢？这就要用到平方根的概念.

随着对于数的认识的不断深入，人们发现，边长为 1 的正方形的对角线的长不是有理数，这就需要引入一种新的数——无理数. 实际上，计算第一、第二宇宙速度等也要用到无理数. 本章将首先学习平方根与立方根；在此基础上引入无理数，把数的范围扩充到实数；然后类比有理数，引入实数在数轴上的表示和实数的运算，并用这些知识解决一些实际问题.



13.1 平方根

问题 学校要举行美术作品比赛，小鸥想裁出一块面积为 25 dm^2 的正方形画布，画上自己的得意之作参加比赛，这块正方形画布的边长应取多少？

你一定会算出边长应取 5 dm . 说一说，你是怎样算出来的？

因为 $5^2=25$ ，所以这个正方形画布的边长应取 5 dm .

填表：

正方形的面积/ dm^2	1	9	16	36	$\frac{4}{25}$
正方形的边长/ dm					

上面的问题，实际上是已知一个正数的平方，求这个正数的问题.

一般地，如果一个正数 x 的平方等于 a ，即 $x^2=a$ ，那么这个正数 x 叫做 a 的**算术平方根** (arithmetic square root). a 的算术平方根记为 $\sqrt{a}$ ，读作“根号 a ”， a 叫做**被开方数** (radicand).

规定：**0 的算术平方根是 0.**

例 1 求下列各数的算术平方根：

- (1) 100; (2) $\frac{49}{64}$; (3) 0.000 1.

解：(1) 因为 $10^2=100$ ，所以 100 的算术平方根是 10，即 $\sqrt{100}=10$ ；

(2) 因为 $\left(\frac{7}{8}\right)^2=\frac{49}{64}$ ，所以 $\frac{49}{64}$ 的算术平方根是 $\frac{7}{8}$ ，即 $\sqrt{\frac{49}{64}}=\frac{7}{8}$ ；

(3) 因为 $0.01^2=0.000\ 1$ ，所以 0.000 1 的算术平方根是 0.01，即 $\sqrt{0.000\ 1}=0.01$.

从例 1 可以看出：被开方数越大，对应的算术平方根也越大. 这个结论对所有正数都成立.



练习

1. 求下列各数的算术平方根:

(1) $0.002\ 5$;

(2) 81 ;

(3) 3^2 .

2. 求下列各式的值:

(1) $\sqrt{1}$;

(2) $\sqrt{\frac{9}{25}}$;

(3) $\sqrt{2^2}$.



探究

能否用两个面积为 1 dm^2 的小正方形拼成一个面积为 2 dm^2 的大正方形?

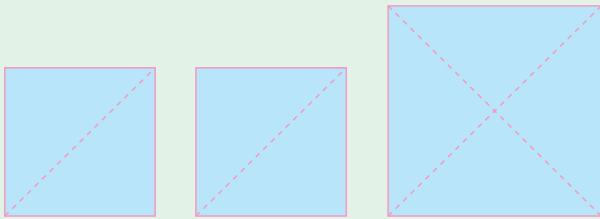


图 13.1-1

如图 13.1-1, 把两个小正方形分别沿对角线剪开, 将所得的 4 个直角三角形拼在一起, 就得到一个面积为 2 dm^2 的大正方形. 你知道这个大正方形的边长是多少吗?

设大正方形的边长为 $x\text{ dm}$, 则

$$x^2 = 2.$$

由算术平方根的意义可知

$$x = \sqrt{2},$$

所以大正方形的边长是 $\sqrt{2}\text{ dm}$.

小正方形的对角线的长是多少呢?



探究

$\sqrt{2}$ 有多大呢?

因为 $1^2=1$, $2^2=4$,

所以 $1<\sqrt{2}<2$;

因为 $1.4^2=1.96$, $1.5^2=2.25$,

所以 $1.4<\sqrt{2}<1.5$;

因为 $1.41^2=1.9881$, $1.42^2=2.0164$,

所以 $1.41<\sqrt{2}<1.42$;

因为 $1.414^2=1.999396$, $1.415^2=2.002225$,

所以 $1.414<\sqrt{2}<1.415$

.....

如此进行下去,可以得到 $\sqrt{2}$ 的更精确的近似值.事实上, $\sqrt{2}=1.414\ 213\ 562\ 373\cdots$,它是一个无限不循环小数.

实际上,许多正有理数的算术平方根(例如 $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ 等)都是无限不循环小数.

无限不循环小数是指小数位数无限,且小数部分不循环的小数.你以前见过这种数吗?

大多数计算器都有 $\sqrt{\quad}$ 键,用它可以求出一个正有理数的算术平方根(或其近似值).

例 2 用计算器求下列各式的值:

(1) $\sqrt{3\ 136}$; (2) $\sqrt{2}$ (精确到 0.001).

解: (1) 依次按键 $\sqrt{\quad}$ 3136 $=$,

显示: 56.

$\therefore \sqrt{3\ 136}=56$.

(2) 依次按键 $\sqrt{\quad}$ 2 $=$,

显示: 1.414213562.

$\therefore \sqrt{2}\approx 1.414$.

不同品牌的计算器,按键顺序有所不同.

计算器上显示的1.414 213 562是 $\sqrt{2}$ 的近似值.

下面我们来看引言中提出的问题：

由 $v_1^2 = gR$, $v_2^2 = 2gR$, 得 $v_1 = \sqrt{gR}$, $v_2 = \sqrt{2gR}$, 其中 $g \approx 9.8$, $R \approx 6.4 \times 10^6$.

用计算器求 v_1 和 v_2 (用科学记数法把结果写成 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 a 保留小数点后一位), 得

$$v_1 \approx \sqrt{9.8 \times 6.4 \times 10^6} \approx 7.9 \times 10^3,$$

$$v_2 \approx \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.4 \times 10^6} \approx 1.1 \times 10^4.$$

因此, 第一宇宙速度 v_1 大约是 7.9×10^3 m/s, 第二宇宙速度 v_2 大约是 1.1×10^4 m/s.



探究

(1) 利用计算器计算下表中的算术平方根, 并将计算结果填在表中, 你发现了什么规律? 你能说出其中的道理吗?

...	$\sqrt{0.0625}$	$\sqrt{0.625}$	$\sqrt{6.25}$	$\sqrt{62.5}$	$\sqrt{625}$	$\sqrt{6250}$	$\sqrt{62500}$	...
...								...

(2) 用计算器计算 $\sqrt{3}$ (精确到 0.001), 并利用你在 (1) 中发现的规律说出 $\sqrt{0.03}$, $\sqrt{300}$, $\sqrt{30000}$ 的近似值, 你能根据 $\sqrt{3}$ 的值说出 $\sqrt{30}$ 是多少吗?

在生活中, 我们经常遇到估计一个数的大小的问题. 请看下面的例子.

例 3 小丽想用一块面积为 400 cm^2 的正方形纸片, 沿着边的方向裁出一块面积为 300 cm^2 的长方形纸片, 使它的长宽之比为 $3:2$. 她不知能否裁得出来, 正在发愁. 小明见了说: “别发愁, 一定能用一块面积大的纸片裁出一块面积小的纸片.” 你同意小明的说法吗? 小丽能用这块纸片裁出符合要求的纸片吗?



解：设长方形纸片的长为 $3x$ cm，宽为 $2x$ cm.

根据边长与面积的关系得

$$3x \cdot 2x = 300,$$

$$6x^2 = 300,$$

$$x^2 = 50,$$

$$x = \sqrt{50}.$$

因此长方形纸片的长为 $3\sqrt{50}$ cm.

因为 $50 > 49$ ，所以 $\sqrt{50} > 7$.

由上可知 $3\sqrt{50} > 21$ ，即长方形纸片的长应该大于21 cm.

因为 $\sqrt{400} = 20$ ，所以正方形纸片的边长只有20 cm. 这样，长方形纸片的长将大于正方形纸片的边长.

答：不能同意小明的说法. 小丽不能用这块正方形纸片裁出符合要求的长方形纸片.

$3\sqrt{50}$ 就是 $3 \times \sqrt{50}$.

练习

1. 用计算器求下列各式的值：

(1) $\sqrt{1\,369}$; (2) $\sqrt{101.203\,6}$; (3) $\sqrt{5}$ (精确到0.01).

2. 比较下列各组数的大小：

(1) $\sqrt{8}$ 与 $\sqrt{10}$; (2) $\sqrt{65}$ 与8;

(3) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 与0.5; (4) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 与1.



思考

如果一个数的平方等于9，这个数是多少？

从前面我们知道，这个数可以是3. 除了3以外，还有没有别的数的平方也等于9呢？

由于 $(-3)^2 = 9$ ，这个数也可以是-3.

因此，如果一个数的平方等于9，那么这个数是3或-3.

填表：

x^2	1	16	36	49	$\frac{4}{25}$
x					

一般地，如果一个数的平方等于 a ，那么这个数叫做 a 的**平方根** (square root) 或**二次方根**. 这就是说，如果 $x^2=a$ ，那么 x 叫做 a 的平方根.

例如，3 和 -3 是 9 的平方根，简记为 ± 3 是 9 的平方根.

求一个数 a 的平方根的运算，叫做**开平方** (extraction of square root).

我们看到， ± 3 的平方等于 9，9 的平方根是 ± 3 ，所以平方与开平方互为逆运算 (图 13.1-2). 根据这种互逆关系，可以求一个数的平方根.

几千年前，古埃及人就已经知道了平方根.

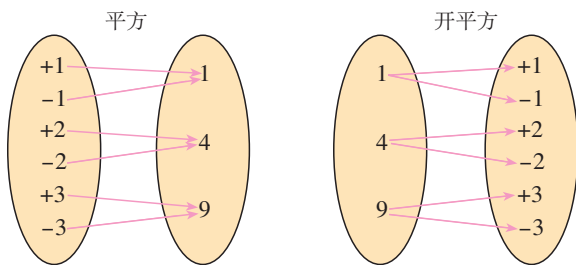


图 13.1-2

例 4 求下列各数的平方根：

- (1) 100; (2) $\frac{9}{16}$; (3) 0.25.

解：(1) 因为 $(\pm 10)^2=100$ ，所以 100 的平方根是 ± 10 ；

(2) 因为 $\left(\pm \frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$ ，所以 $\frac{9}{16}$ 的平方根是 $\pm \frac{3}{4}$ ；

(3) 因为 $(\pm 0.5)^2=0.25$ ，所以 0.25 的平方根是 ± 0.5 .



思考

正数的平方根有什么特点？0 的平方根是多少？负数有平方根吗？

我们发现，正数的平方根有两个，它们互为相反数，其中正的平方根就是这个数的算术平方根.

因为 $0^2=0$ ，并且任何一个不为 0 的数的平方都不等于 0，所以 0 的平方根是 0.

正数的平方是正数，0 的平方是 0，负数的平方也是正数，即在我们所认识的数中，任何一个数的平方都不会是负数，所以负数没有平方根.



归纳

正数有两个平方根，它们互为相反数；

0 的平方根是 0；

负数没有平方根.

我们知道，正数 a 的算术平方根可以用 $\sqrt{a}$ 表示；正数 a 的负的平方根，可以用符号 “ $-\sqrt{a}$ ” 表示，故正数 a 的平方根可以用符号 “ $\pm\sqrt{a}$ ” 表示，读作 “正、负根号 a ”. 例如， $\pm\sqrt{9}=\pm 3$ ， $\pm\sqrt{25}=\pm 5$.

符号 $\sqrt{a}$ 只有当 $a \geq 0$ 时有意义， $a < 0$ 时无意义. 你知道为什么吗？

例 5 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{36}$ ；(2) $-\sqrt{0.81}$ ；(3) $\pm\sqrt{\frac{49}{9}}$.

解：(1) 因为 $6^2=36$ ，所以 $\sqrt{36}=6$ ；

(2) 因为 $0.9^2=0.81$ ，所以 $-\sqrt{0.81}=-0.9$ ；

(3) 因为 $\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{49}{9}$ ，所以 $\pm\sqrt{\frac{49}{9}}=\pm\frac{7}{3}$.

知道一个数的算术平方根，就可以立即写出它的负的平方根. 为什么？

练习

1. 判断下列说法是否正确：

(1) 0 的平方根是 0；

(2) 1 的平方根是 1；

(3) -1 的平方根是 -1；

(4) 0.01 是 0.1 的一个平方根.

2. 填表:

x	8	-8	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$				
x^2					16		0.36	

3. 计算下列各式的值:

$$(1) \sqrt{9}; \quad (2) -\sqrt{0.49}; \quad (3) \pm\sqrt{\frac{64}{81}}.$$

4. 平方根概念的起源与几何中的正方形有关. 如果一个正方形的面积为 A , 那么这个正方形的边长是多少?

习题 13.1

复习巩固

1. 求下列各数的算术平方根:

$$(1) 81; \quad (2) \frac{25}{64}; \quad (3) 0.04; \quad (4) 10^2.$$

2. 下列各式是否有意义? 为什么?

$$(1) -\sqrt{3}; \quad (2) \sqrt{-3}; \quad (3) \sqrt{(-3)^2}; \quad (4) \sqrt{\frac{1}{10^2}}.$$

3. 求下列各数的平方根:

$$(1) 49; \quad (2) \frac{4}{25}; \quad (3) \frac{1}{10^6}; \quad (4) 0.001\ 6.$$

4. 判断下列说法是否正确:

(1) 5 是 25 的算术平方根;

(2) $\frac{5}{6}$ 是 $\frac{25}{36}$ 的一个平方根;

(3) $(-4)^2$ 的平方根是 -4;

(4) 0 的平方根与算术平方根都是 0.

5. 用计算器计算下列各式的值 (精确到 0.01):

$$(1) \sqrt{867}; \quad (2) \sqrt{0.462\ 54}; \quad (3) -\sqrt{\frac{8}{25}}; \quad (4) \pm\sqrt{2\ 402}.$$

6. 估计与 $\sqrt{40}$ 最接近的两个整数是多少.

综合运用

7. 根据下表回答下列问题:

x	16	16.1	16.2	16.3	16.4	16.5	16.6	16.7	16.8	16.9	17
x^2	256	259.21	262.44	265.69	268.96	272.25	275.56	278.89	282.24	285.61	289

(1) 268.96 的平方根是多少?

(2) $\sqrt{285.6} \approx$ _____.

(3) $\sqrt{270}$ 在表中哪两个相邻的数之间? 为什么?

8. 求下列各式中 x 的值:

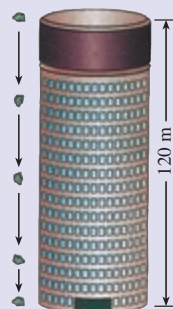
(1) $x^2 = 25$;

(2) $x^2 - 81 = 0$;

(3) $25x^2 = 36$.

9. 物体自由下落的高度 h (单位: m) 与下落时间 t (单位: s) 的关系是 $h = 4.9t^2$. 如图, 有一个物体从 120 m 高的建筑物上自由落下, 到达地面需要多长时间 (结果取整数)?

10. 一个正方形的面积扩大为原来的 4 倍, 它的边长变为原来的多少倍? 面积扩大为原来的 9 倍呢? n 倍呢?



(第 9 题)

拓展探索

11. (1) 求 $\sqrt{2^2}$, $\sqrt{(-3)^2}$, $\sqrt{5^2}$, $\sqrt{(-6)^2}$, $\sqrt{7^2}$, $\sqrt{0^2}$ 的值. 对于任意数 a , $\sqrt{a^2}$ 等于多少?

(2) 求 $(\sqrt{4})^2$, $(\sqrt{9})^2$, $(\sqrt{25})^2$, $(\sqrt{36})^2$, $(\sqrt{49})^2$, $(\sqrt{0})^2$ 的值. 对于任意非负数 a , $(\sqrt{a})^2$ 等于多少?

12. 任意找一个正数, 比如 1 234, 利用计算器对它进行开平方, 再对得到的算术平方根进行开平方……如此进行下去, 你有什么发现?

13.2 立方根

问题 要制作一种容积为 27 m^3 的正方体形状的包装箱，这种包装箱的棱长应该是多少？

设这种包装箱的棱长为 $x \text{ m}$ ，则

$$x^3 = 27.$$

这就是要求一个数，使它的立方等于 27.

因为 $3^3 = 27$ ，所以 $x = 3$.

因此这种包装箱的棱长应为 3 m.



一般地，如果一个数的立方等于 a ，那么这个数叫做 a 的**立方根** (cube root) 或**三次方根**. 这就是说，如果 $x^3 = a$ ，那么 x 叫做 a 的立方根.

在上面的问题中，由于 $3^3 = 27$ ，所以 3 是 27 的立方根.

求一个数的立方根的运算，叫做**开立方** (extraction of cube root). 正如开平方与平方互为逆运算一样，开立方与立方也互为逆运算. 我们可以根据这种关系求一个数的立方根.



探究

根据立方根的意义填空. 你能发现正数、0 和负数的立方根各有什么特点吗？

因为 $2^3 = 8$ ，所以 8 的立方根是 ()；

因为 ()³ = 0.064，所以 0.064 的立方根是 ()；

因为 ()³ = 0，所以 0 的立方根是 ()；

因为 ()³ = -8，所以 -8 的立方根是 ()；

因为 ()³ = $-\frac{8}{27}$ ，所以 $-\frac{8}{27}$ 的立方根是 ().



归纳

正数的立方根是正数，
负数的立方根是负数，
0 的立方根是 0.

你能说说数的
平方根与数的立方
根有什么不同吗？

类似于平方根，一个数 a 的立方根，用符号“ $\sqrt[3]{a}$ ”表示，读作“三次根号 a ”，其中 a 是被开方数，3 是**根指数** (radical exponent). 例如， $\sqrt[3]{8}$ 表示 8 的立方根， $\sqrt[3]{8} = 2$ ； $\sqrt[3]{-8}$ 表示 -8 的立方根， $\sqrt[3]{-8} = -2$. $\sqrt[3]{a}$ 中的根指数 3 不能省略.

算术平方根的符号

$\sqrt{a}$ ，实际上省略了 $\sqrt[2]{a}$ 中的根指数 2. 因此， $\sqrt{a}$ 也可读作“二次根号 a ”.



探究

因为 $\sqrt[3]{-8} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $-\sqrt[3]{8} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，所以 $\sqrt[3]{-8} \underline{\hspace{1cm}} -\sqrt[3]{8}$ ；

因为 $\sqrt[3]{-27} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $-\sqrt[3]{27} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，所以 $\sqrt[3]{-27} \underline{\hspace{1cm}} -\sqrt[3]{27}$.

一般地，

$$\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}.$$

例 求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{64}$ ； (2) $-\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ ； (3) $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$.

解：(1) $\sqrt[3]{64} = 4$ ；

(2) $-\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$ ；

(3) $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}} = -\frac{3}{4}$.

实际上，很多有理数的立方根是无限不循环小数. 例如 $\sqrt[3]{2}$ ， $\sqrt[3]{3}$ 等都是无限不循环小数. 我们可以用有理数近似地表示它们.

一些计算器设有 $\sqrt[3]{}$ 键，用它可以求出一个数的立方根（或其近似值）.

例如，用计算器求 $\sqrt[3]{1\ 845}$ ，可以按照下面的步骤进行：

依次按键 $\sqrt[3]{}$ 1845 $=$ ，显示：12.26494081.

这样就得到 $\sqrt[3]{1\ 845}$ 的近似值 12.264 940 81.

有些计算器需要用第二功能键求一个数的立方根. 例如用这种计算器求 $\sqrt[3]{1\ 845}$ ，可以依次按键 $\boxed{2\text{nd F}}$ $\sqrt[3]{}$ 1845 $=$ ，显示：12.26494081.



探究

用计算器计算 $\dots$, $\sqrt[3]{0.000\ 216}$, $\sqrt[3]{0.216}$, $\sqrt[3]{216}$, $\sqrt[3]{216\ 000}$, $\dots$, 你能发现什么规律? 用计算器计算 $\sqrt[3]{100}$ (精确到 0.001), 并利用你发现的规律求 $\sqrt[3]{0.1}$, $\sqrt[3]{0.000\ 1}$, $\sqrt[3]{100\ 000}$ 的近似值.

练习

1. 求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{1\ 000}$; (2) $\sqrt[3]{-0.001}$; (3) $\sqrt[3]{-1}$; (4) $-\sqrt[3]{\frac{64}{27}}$.

2. 用计算器求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{1\ 728}$; (2) $\sqrt[3]{15\ 625}$; (3) $\pm\sqrt[3]{2\ 197}$.

3. 比较 3, 4, $\sqrt[3]{50}$ 的大小.

4. 立方根概念的起源与几何中的正方体有关. 如果一个正方体的体积为 V , 这个正方体的棱长为多少?

习题 13.2

复习巩固

1. 判断下列说法是否正确：

(1) 2 是 8 的立方根；

(2) ± 4 是 64 的立方根；

(3) $-\frac{1}{3}$ 是 $-\frac{1}{27}$ 的立方根；

(4) $(-4)^3$ 的立方根是 -4 .

2. 下列各式是否有意义？为什么？

(1) $-\sqrt[3]{3}$; (2) $\sqrt[3]{-3}$; (3) $\sqrt[3]{(-3)^3}$; (4) $\sqrt[3]{\frac{1}{10^3}}$.

3. 求下列各式的值：

(1) $-\sqrt[3]{0.027}$; (2) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$; (3) $\sqrt[3]{1-\frac{37}{64}}$; (4) $\sqrt[3]{\frac{7}{8}-1}$.

4. 用计算器计算下列各式的值（精确到 0.001）：

(1) $\sqrt[3]{868}$; (2) $\sqrt[3]{0.426\ 254}$; (3) $-\sqrt[3]{\frac{8}{25}}$; (4) $\pm\sqrt[3]{2\ 402}$.

综合运用

5. 求下列各式中 x 的值：

(1) $x^3=0.008$; (2) $x^3-3=\frac{3}{8}$; (3) $(x-1)^3=64$.

6. 一个正方体的体积扩大为原来的 8 倍，它的棱长变为原来的多少倍？扩大为原来的 27 倍呢？ n 倍呢？

7. 如图，要生产一种容积为 50 L 的圆柱形热水器，使它的高等于底面直径的 2 倍，这种容器的底面直径应取多少分米（用计算器计算，结果保留小数点后一位）？



8. 比较下列各组数的大小：

(1) $\sqrt[3]{9}$ 与 2.5; (2) $\sqrt[3]{3}$ 与 $\frac{3}{2}$.

拓广探索

(第 7 题)

9. (1) 求 $\sqrt[3]{2^3}$, $\sqrt[3]{(-2)^3}$, $\sqrt[3]{(-3)^3}$, $\sqrt[3]{4^3}$, $\sqrt[3]{0^3}$ 的值. 对于任意数 a , $\sqrt[3]{a^3}$ 等于多少？

(2) 求 $(\sqrt[3]{8})^3$, $(\sqrt[3]{-8})^3$, $(\sqrt[3]{27})^3$, $(\sqrt[3]{-27})^3$, $(\sqrt[3]{0})^3$ 的值. 对于任意数 a , $(\sqrt[3]{a})^3$ 等于多少？

10. 任意找一个数，比如 1 234，利用计算器对它进行开立方，再对得到的立方根进行开立方……如此进行下去，你有什么发现？

13.3 实数



探究

我们知道有理数包括整数和分数，请把下列分数写成小数的形式，你有什么发现？

$$\frac{5}{2}, -\frac{3}{5}, \frac{27}{4}, \frac{11}{9}, \frac{9}{11}.$$

我们发现，上面的分数都可以写成有限小数或者无限循环小数的形式，即

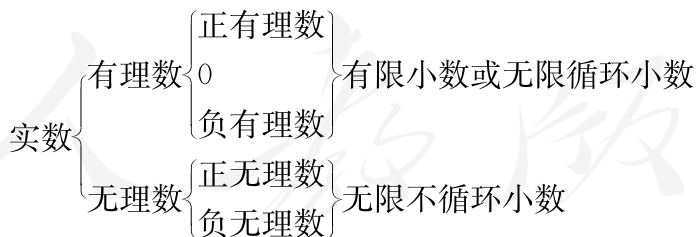
$$\frac{5}{2}=2.5, -\frac{3}{5}=-0.6, \frac{27}{4}=6.75, \frac{11}{9}=1.\dot{2}, \frac{9}{11}=0.\dot{8}\dot{1}.$$

事实上，如果把整数看成小数点后是 0 的小数（例如，将 3 看成 3.0），那么任何一个有理数都可以写成有限小数或无限循环小数的形式. 反过来，任何有限小数或无限循环小数也都是有理数.

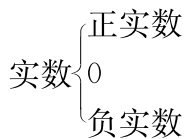
通过前两节的学习，我们知道，很多数的平方根和立方根都是无限不循环小数，无限不循环小数又叫做**无理数**（irrational number）. 例如 $\sqrt{2}$ ， $-\sqrt{5}$ ， $\sqrt[3]{2}$ ， $\sqrt[3]{3}$ 等都是无理数， $\pi=3.141\ 592\ 65\cdots$ 也是无理数.

像有理数一样，无理数也有正负之分. 例如， $\sqrt{2}$ ， $\sqrt[3]{3}$ ， π 是正无理数， $-\sqrt{2}$ ， $-\sqrt[3]{3}$ ， $-\pi$ 是负无理数.

有理数和无理数统称**实数**（real number）. 这样，我们学过的数可以这样分类：



由于非 0 有理数和无理数都有正负之分，实数也有正负之分，所以实数还可以按大小分类如下：



我们知道，每个有理数都可以用数轴上的点来表示. 无理数是否也可以用数轴上的点表示出来呢？



探究

如图 13.3-1，直径为 1 个单位长度的圆从原点沿数轴向右滚动一周，圆上的一点由原点到达点 O' ，点 O' 对应的数是多少？

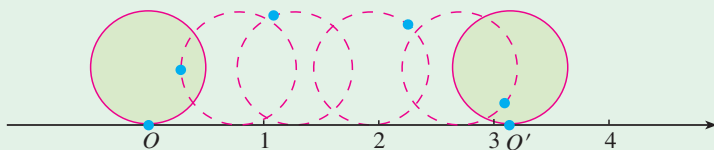


图 13.3-1

从图中可以看出， OO' 的长是这个圆的周长 π ，所以点 O' 对应的数是 π 。

这样，无理数 π 可以用数轴上的点表示出来。

又如，以单位长度为边长画一个正方形（图 13.3-2），以原点为圆心，正方形的对角线长为半径画弧，与正半轴的交点就表示 $\sqrt{2}$ ，与负半轴的交点就表示 $-\sqrt{2}$ 。（为什么？）

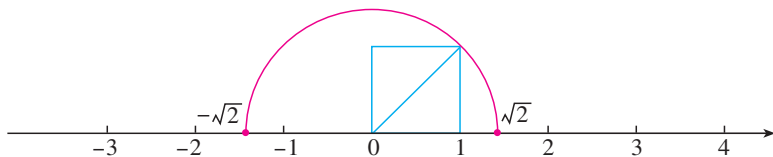


图 13.3-2

事实上，每一个无理数都可以用数轴上的一个点表示出来。

当数的范围从有理数扩充到实数后，实数与数轴上的点是一一对应的，即每一个实数都可以用数轴上的一个点来表示；反过来，数轴上的每一个点都表示一个实数. 与规定有理数的大小一样，对于数轴上的任意两个点，右边的点表示的实数总比左边的点表示的实数大。

有理数关于相反数和绝对值的意义同样适合于实数。



思考

(1) $\sqrt{2}$ 的相反数是_____， $-\pi$ 的相反数是_____，0 的相反数是_____；

(2) $|\sqrt{2}| = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $|-\pi| = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $|0| = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

数 a 的相反数是 $-a$ ，这里 a 表示任意一个实数.

一个正实数的绝对值是它本身；一个负实数的绝对值是它的相反数；0 的绝对值是 0. 即设 a 表示一个实数，则

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{当 } a > 0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } a = 0 \text{ 时;} \\ -a, & \text{当 } a < 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

例 1 (1) 分别写出 $-\sqrt{6}$ ， $\pi-3.14$ 的相反数；

(2) 指出 $-\sqrt{5}$ ， $1-\sqrt[3]{3}$ 分别是什么数的相反数；

(3) 求 $\sqrt[3]{-64}$ 的绝对值；

(4) 已知一个数的绝对值是 $\sqrt{3}$ ，求这个数.

解：(1) 因为

$$-(-\sqrt{6}) = \sqrt{6}, \quad -(\pi-3.14) = 3.14-\pi,$$

所以， $-\sqrt{6}$ ， $\pi-3.14$ 的相反数分别为 $\sqrt{6}$ ， $3.14-\pi$.

(2) 因为

$$-(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}, \quad -(\sqrt[3]{3}-1) = 1-\sqrt[3]{3},$$

所以， $-\sqrt{5}$ ， $1-\sqrt[3]{3}$ 分别是 $\sqrt{5}$ ， $\sqrt[3]{3}-1$ 的相反数.

(3) 因为

$$\sqrt[3]{-64} = -\sqrt[3]{64} = -4,$$

所以

$$|\sqrt[3]{-64}| = |-4| = 4.$$

(4) 因为

$$|\sqrt{3}| = \sqrt{3}, \quad |-\sqrt{3}| = \sqrt{3},$$

所以绝对值为 $\sqrt{3}$ 的数是 $\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$.

实数之间不仅可以进行加、减、乘、除（除数不为 0）、乘方运算，而且正数及 0 可以进行开平方运算，任意一个实数可以进行开立方运算. 在进行实数的运算时，有理数的运算法则及运算性质等同样适用.

随着数的进一步扩充，负数将可以进行开方运算，这是我们今后要学的.

例 2 计算下列各式的值:

(1) $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - \sqrt{2}$; (2) $3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$.

解: (1) $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - \sqrt{2}$

$$= \sqrt{3} + (\sqrt{2} - \sqrt{2}) \quad (\text{加法结合律})$$

$$= \sqrt{3} + 0 = \sqrt{3};$$

(2) $3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$

$$= (3 + 2)\sqrt{3} \quad (\text{分配律})$$

$$= 5\sqrt{3}.$$

在实数运算中, 当遇到无理数并且需要求出结果的近似值时, 可以按照所要求的精确度用相应的近似有限小数去代替无理数, 再进行计算.

例 3 计算(结果保留小数点后两位):

(1) $\sqrt{5} + \pi$; (2) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$.

解: (1) $\sqrt{5} + \pi \approx 2.236 + 3.142 \approx 5.38$;

(2) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \approx 1.732 \times 1.414 \approx 2.45$.

练习

1. 请将图中数轴上标有字母的各点与下列实数对应起来:

$$\sqrt{2}, -1.5, \sqrt{5}, \pi, 3.$$



(第 1 题)

2. 求下列各数的相反数与绝对值:

$$2.5, -\sqrt{7}, -\frac{\pi}{2}, \sqrt{3}-2, 0.$$

3. 求下列各式中的实数 x :

(1) $|x| = \frac{2}{3}$;

(2) $|x| = 0$;

(3) $|x| = \sqrt{10}$;

(4) $|x| = \pi$.

4. 计算:

(1) $2\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$;

(2) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| + 2\sqrt{2}$.

习题 13.3

复习巩固

1. 判断下列说法是否正确:

- (1) 无限小数都是无理数;
- (2) 无理数都是无限小数;
- (3) 带根号的数都是无理数;
- (4) 所有有理数都可以用数轴上的点表示, 反过来, 数轴上的所有点都表示有理数;
- (5) 所有实数都可以用数轴上的点表示, 反过来, 数轴上的所有点都表示实数.

2. 把下列各数分别填在相应的集合中:

$$\frac{22}{7}, 3.141\ 592\ 65, \sqrt{7}, -8, \sqrt[3]{2}, 0.6, 0, \sqrt{36}, \frac{\pi}{3}.$$



有理数集合



无理数集合

3. 求下列各数的绝对值:

$$\sqrt[3]{-8}, \sqrt{17}, -\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{3}-1.7, 1.4-\sqrt{2}.$$

4. 用计算器计算 (结果保留小数点后两位):

$$(1) \sqrt{5}-\sqrt{3}+0.145; \quad (2) \sqrt[3]{6}-\pi-\sqrt{2}.$$

5. 计算:

$$(1) 3\sqrt{2}+2\sqrt{2}; \quad (2) \sqrt[3]{3}-|-\sqrt[3]{3}|.$$

综合运用

6. 比较下列各组数的大小:

$$(1) \pi, 3.146; \quad (2) \sqrt{3}, 1.732; \quad (3) \sqrt{5}-3, \frac{\sqrt{5}-2}{2}; \quad (4) \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

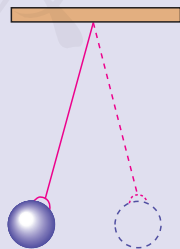
7. (1) 有没有最小的正整数? 有没有最小的整数?

(2) 有没有最小的有理数? 有没有最小的无理数?

(3) 有没有最小的正实数? 有没有最小的实数?

8. 如图, 一根细线上端固定, 下端系一个小重物, 让这个重物来回自由摆动, 来回摆动一次所用的时间 t (单位: s) 与细线的长度 l (单位: m) 之间

满足关系 $t=2\pi\sqrt{\frac{l}{10}}$. 当细线的长度为 0.5 m 时, 小



(第 8 题)

重物来回摆动一次所用的时间是多少（结果保留小数点后一位）？

拓广探索

9. 已知数 $0.101\ 001\ 000\ 100\ 001\cdots$ ，它的特点是：从左向右看，相邻的两个 1 之间依次多一个 0. 这个数是有理数还是无理数？为什么？



阅读与思考

为什么说 $\sqrt{2}$ 不是有理数

公元前 6 世纪古希腊的毕达哥拉斯学派有一种观点，即“万物皆数”，一切量都可以用整数或整数的比（分数）表示. 后来，当这一学派中的希帕索斯（Hippasus）发现边长为 1 的正方形的对角线的长度不能用整数或整数的比表示，即 $\sqrt{2}$ 不是有理数时，毕达哥拉斯学派感到惊恐不安. 由此，引发了第一次数学危机.

随着人们认识的不断深入，毕达哥拉斯学派逐渐承认 $\sqrt{2}$ 不是有理数，并给出了证明. 下面给出 $\sqrt{2}$ 不是有理数的证明方法.

假设 $\sqrt{2}$ 是有理数，那么存在两个互质的正整数 p, q ，使得

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

于是

$$p = \sqrt{2}q.$$

两边平方得

$$p^2 = 2q^2.$$

由 $2q^2$ 是偶数，可得 p^2 是偶数. 而只有偶数的平方才是偶数，所以 p 也是偶数.

因此可设 $p = 2s$ ，代入上式，得 $4s^2 = 2q^2$ ，即

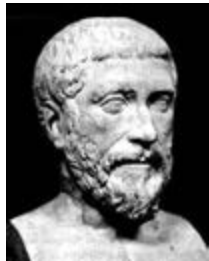
$$q^2 = 2s^2.$$

所以 q 也是偶数. 这样， p 和 q 都是偶数，不互质，这与假设 p, q 互质矛盾.

这个矛盾说明， $\sqrt{2}$ 不能写成分数的形式，即 $\sqrt{2}$ 不是有理数. 实际上， $\sqrt{2}$ 是无限不循环小数.

用类似的方法，你能证明 $\sqrt[3]{2}$ 不是有理数吗？

事实上，无理数只是一种命名，并非“无理”，而是实际存在的不能写成分数形式的数，它和有理数一样，都是现实世界中客观存在的量的反映.



毕达哥拉斯（Pythagoras，约公元前 580—约前 500），古希腊数学家，毕达哥拉斯学派的主要代表人物.



数学活动

活动1

1. 制作一个表面积为 12 dm^2 的正方体纸盒.
 - (1) 这个正方体的棱长是多少?
 - (2) 做出这个正方体纸盒.
2. 制作一个底面半径为 10 cm , 高为 20 cm 的圆柱形纸盒.
 - (1) 圆柱的侧面展开图是什么形状?
 - (2) 这个侧面展开图各边的长分别是多少?
 - (3) 做出这个圆柱形纸盒.

活动2

据说,我国著名数学家华罗庚在一次出国访问途中,看到飞机上邻座的乘客阅读的杂志上有一道智力题:一个数是 $59\ 319$, 希望求它的立方根. 华罗庚脱口而出: 39 . 邻座的乘客十分惊奇,忙问计算的奥妙.

你知道华罗庚是怎样迅速准确地计算出来的吗? 请按照下面的问题试一试:

(1) 由 $10^3=1\ 000$, $100^3=1\ 000\ 000$, 你能确定 $\sqrt[3]{59\ 319}$ 是几位数吗?

(2) 由 $59\ 319$ 的个位上的数是 9 , 你能确定 $\sqrt[3]{59\ 319}$ 的个位上的数是几吗?

(3) 如果划去 $59\ 319$ 后面的三位 319 得到数 59 , 而 $3^3=27$, $4^3=64$, 由此你能确定 $\sqrt[3]{59\ 319}$ 的十位上的数是几吗?

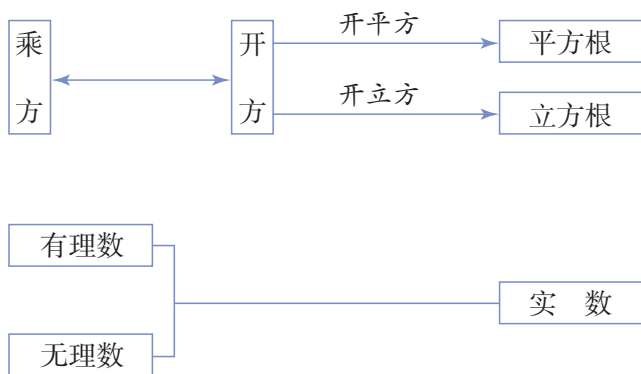
已知 $19\ 683$, $110\ 592$ 都是整数的立方, 按照上述方法, 你能确定它们的立方根吗?



华罗庚 (1910—1985)

小 结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

本章我们学习了平方根和立方根，并通过开平方、开立方运算认识了一些不同于有理数的数，在此基础上引入无理数，使数的范围由有理数扩充到实数. 随着数的扩充，数的运算也有了新的发展. 在实数范围内，不仅能进行加、减、乘、除四则运算，而且对 0 和任意正数能进行开平方运算，对任意实数能进行开立方运算.

本章中，我们通过类比有理数及其运算，引入了实数的相反数、绝对值等概念，以及实数的运算和运算律，学习时应注意体会类比这种研究方法的作用. 实数与数轴上的点是一一对应的，因此，我们可以利用数轴将“数”与“形”联系起来，这对理解实数的有关概念及运算很有帮助.

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧.

1. 数的概念是怎样从正整数逐步发展到实数的？随着数的不断扩充，数的运算有什么发展？加法与乘法的运算律始终保持不变吗？
2. 回顾平方根与立方根的概念. 乘方运算与开方运算有什么关系？
3. 无理数和有理数的区别是什么？
4. 实数由哪些数组成？实数与数轴上的点有什么关系？

复习题 13

复习巩固

1. 求下列各数的算术平方根及平方根:

- (1) 64; (2) 0.25; (3) $\frac{4}{9}$;
(4) 5^6 ; (5) $\left(-\frac{4}{13}\right)^2$; (6) 10^4 .

2. 求下列各数的立方根:

- (1) $-\frac{1}{64}$; (2) -0.008 ;
(3) $\frac{27}{8}$; (4) 3^6 .

3. 求下列各式的值:

- (1) $-\sqrt{\frac{49}{25}}$; (2) $\sqrt[3]{-1}$;
(3) $\sqrt{0.16}$; (4) $\sqrt[3]{0.027}$.

4. 下列各数分别界于哪两个相邻的整数之间?

- (1) $\sqrt{28}$; (2) $\sqrt{38}$; (3) $\sqrt[3]{99}$.

5. 用计算器求下列各式的值 (精确到 0.001):

- (1) $-\sqrt{94.3}$; (2) $\sqrt[3]{0.43}$;
(3) $\sqrt{55\ 225}$; (4) $\sqrt[3]{34\ 012\ 224}$.

6. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的平方根及立方根中, 哪些是有理数? 哪些是无理数?

7. 比较下列各组数的大小:

- (1) $|-1.5|$, $1.\dot{5}$; (2) 1.414, $\sqrt{2}$;
(3) $\frac{2}{3}$, 0.666 67.

8. 计算下列各式的值:

- (1) $\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)$; (2) $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

综合运用

9. 已知 $(x-1)^2=4$, 求 x 的值.

10. 已知 $|x| < 2\pi$, x 是整数, 求 x 的值, 并在数轴上表示求得的数.

11. 天气晴朗时, 一个人能看到大海的最远距离 s (单位: km) 可用公式 $s^2 = 16.88h$ 来估计, 其中 h (单位: m) 是眼睛离海平面的高度. 如果一个人站在岸边观察, 当眼睛离海平面的高度是 1.5 m 时, 能看到多远 (精确到 0.01 km)? 如果登上一个观望台, 当眼睛离海平面的高度是 35 m 时, 能看到多远 (精确到 0.01 km)?
12. 一个圆与一个正方形的面积都是 $2\pi \text{ cm}^2$, 它们中哪一个的周长比较大? 你能从中得到什么启示?
13. 要生产一种容积为 500 L 的球形容器, 这种球形容器的半径是多少分米 (结果保留小数点后两位)? (球的体积公式是 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, 其中 R 是球的半径.)

拓广探索

14. 填空:
- (1) 一个数的平方等于它本身, 这个数是_____; 一个数的平方根等于它本身, 这个数是_____; 一个数的算术平方根等于它本身, 这个数是_____.
- (2) 一个数的立方等于它本身, 这个数是_____; 一个数的立方根等于它本身, 这个数是_____.

人教版®

第十四章 平面直角坐标系

在中华人民共和国成立 70 周年的庆典活动中，天安门广场上出现了壮观的图案，你知道它是怎么组成的吗？

原来，表演现场设置了由有序数对标识的点位，3 000 多名表演者手举光影屏，根据预先编排的流程，不停地变换所在的点位，就拼出了不同的图案。

类似于用“第几排第几列”来确定位置，在数学中可以通过建立坐标系，用有顺序的两个数来刻画平面内点的位置。

本章中，我们将学习平面直角坐标系等有关知识，由此建立图形与数量间的联系。这将为几何问题和代数问题的相互转化打下基础。



14.1 平面直角坐标系

14.1.1 有序数对

我们都有去影剧院看电影的经历. 你一定知道, 影剧院对观众席的所有座位都按“几排几号”编号, 以便确定每一个座位在影剧院中的位置. 这样, 观众就能根据入场券上的“排数”和“号数”准确地“对号入座”.

这种办法在日常生活中是常用的. 比如, 当发现一本书上某页有一处印刷错误时, 你可以怎样告诉其他同学这一处的位置呢? 又如, 假设根据教室平面图(图 14.1-1)写出如下通知, 你知道哪些同学参加讨论吗?

“请以下座位的同学今天放学后参加数学问题讨论:

$(1, 5), (2, 4), (4, 2), (3, 3), (5, 6).$ ”

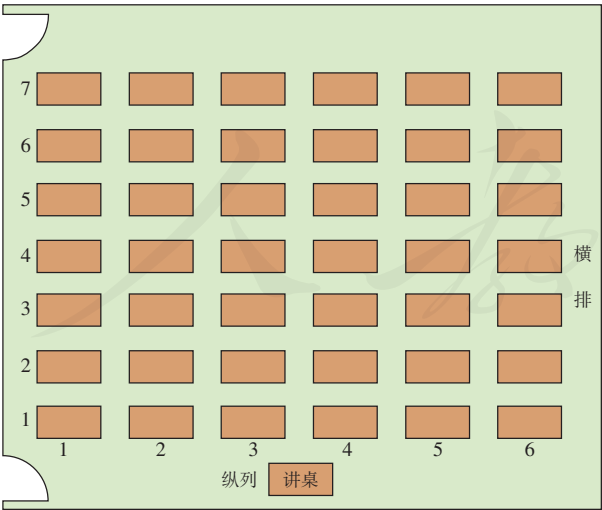


图 14.1-1



$(2, 4)$ 和 $(4, 2)$ 在同一位置吗?



思考

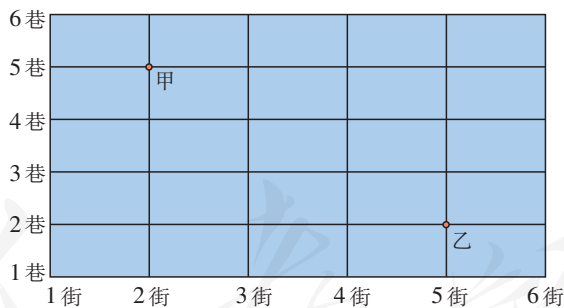
怎样确定教室里座位的位置？排数和列数的先后顺序对位置有影响吗？假设我们约定“列数在前，排数在后”，请你在图 14.1-1 上标出被邀请参加讨论的同学的座位。

上面的问题都是通过像“9 排 7 号”“第 1 列第 5 排”这样含有两个数的表达方式来表示一个确定的位置，其中两个数各自表示不同的含义，例如前边的表示“排数”，后边的表示“号数”。我们把这种有顺序的两个数 a 与 b 组成的数对，叫做**有序数对** (ordered pair)，记作 (a, b) 。

利用有序数对，可以准确地表示出一个位置。生活中利用有序数对表示位置的情况是很常见的，如人们常用经纬度来表示地球上的地点等。你能再举出一些例子吗？

练习

如图，甲处表示 2 街与 5 巷的十字路口，乙处表示 5 街与 2 巷的十字路口。如果用 $(2, 5)$ 表示甲处的位置，那么 $(2, 5) \rightarrow (3, 5) \rightarrow (4, 5) \rightarrow (5, 5) \rightarrow (5, 4) \rightarrow (5, 3) \rightarrow (5, 2)$ 表示从甲处到乙处的一种路线。请你用这种形式写出几种从甲处到乙处的路线。



14.1.2 平面直角坐标系

图 14.1-2 是一条数轴，数轴上的点与实数是一一对应的。数轴上每个点都对应一个实数，这个实数叫做这个点在数轴上的坐标。例如，点 A 在数轴上的坐标为 -4 ，点 B 在数轴上的坐标为 2 。反过来，知道数轴上一个点的坐标，这个点在数轴上的位置也就确定了。例如，数轴上坐标为 5 的点是点 C 。

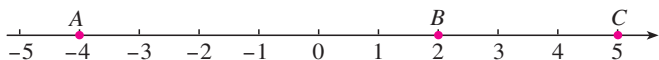


图 14.1-2



思考

类似于利用数轴确定直线上点的位置，能不能找到一种办法来确定平面内的点的位置呢（例如图 14.1-3 中 A, B, C, D 各点）？

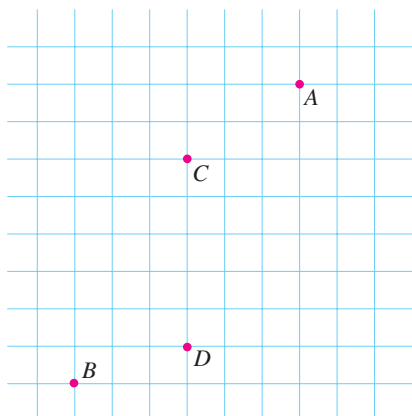


图 14.1-3

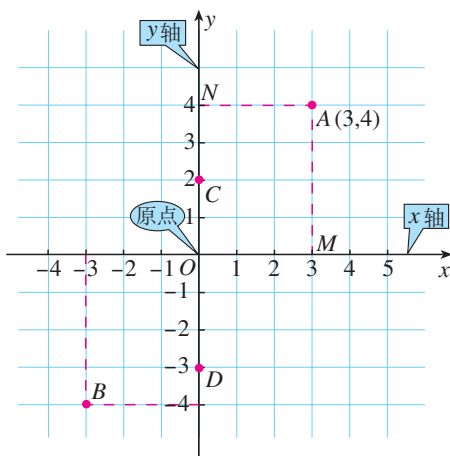


图 14.1-4

如图 14.1-4，我们可以在平面内画两条互相垂直、原点重合的数轴，组成**平面直角坐标系** (rectangular coordinate system). 水平的数轴称为 x 轴 (x -axis) 或**横轴**，习惯上取向右为正方向；竖直的数轴称为 y 轴 (y -axis) 或**纵轴**，取向上方向为正方向；两坐标轴的交点为平面直角坐标系的**原点**.

有了平面直角坐标系，平面内的点就可以用一个有序数对来表示了. 例如，如图 14.1-4，由点 A 分别向 x 轴和 y 轴作垂线，垂足 M 在 x 轴上的坐标是 3，垂足 N 在 y 轴上的坐标是 4，我们说点 A 的横坐标是 3，纵坐标是 4，有序数对 $(3, 4)$ 就叫做点 A 的**坐标** (coordinate)，记作 $A(3, 4)$. 类似地，请你写出点 B, C, D 的坐标： $B(_, _)$, $C(_, _)$, $D(_, _)$.



法国数学家笛卡儿 (Descartes, 1596—1650)，最早引入坐标系，用代数方法研究几何图形.



思考

原点 O 的坐标是什么？ x 轴和 y 轴上的点的坐标有什么特点？

可以看出，原点 O 的坐标为 $(0, 0)$ ； x 轴上的点的纵坐标为 0 ，例如 $(1, 0)$ ， $(-1, 0)$ ， $\dots$ ； y 轴上的点的横坐标为 0 ，例如 $(0, 1)$ ， $(0, -1)$ ， $\dots$ 。

建立了平面直角坐标系以后，坐标平面就被两条坐标轴分成 I，II，III，IV 四个部分（图 14.1-5），每个部分称为**象限**（quadrant），分别叫做第一象限、第二象限、第三象限和第四象限。坐标轴上的点不属于任何象限。

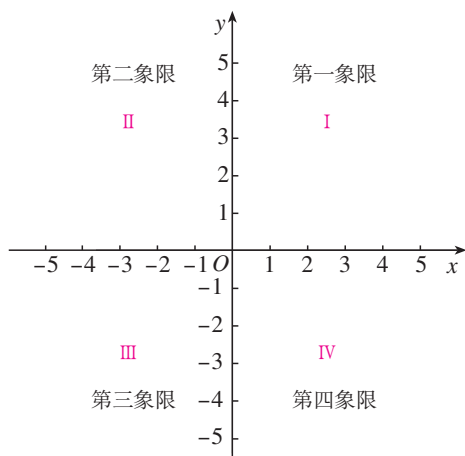


图 14.1-5

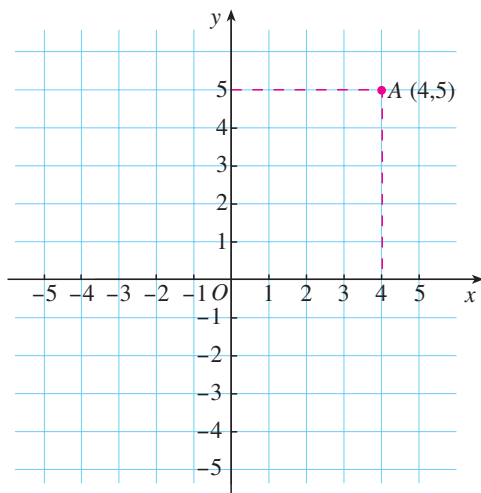


图 14.1-6

例 在平面直角坐标系(图14.1-6)中描出下列各点：

$A(4, 5)$ ， $B(-2, 3)$ ， $C(-4, -1)$ ， $D(2.5, -2)$ ， $E(0, -4)$ 。

解：如图14.1-6，先在 x 轴上找出表示 4 的点，再在 y 轴上找出表示 5 的点，过这两个点分别作 x 轴和 y 轴的垂线，垂线的交点就是点 A 。

类似地，请你在图 14.1-6 上描出点 B ， C ， D ， E 。

我们知道，数轴上的点与实数是一一对应的。我们还可以得出：对于坐标平面内任意一点 M ，都有唯一的一对有序实数 (x, y) （即点 M 的坐标）和它对应；反过来，对于任意一对有序实数 (x, y) ，在坐标平面内都有唯一的一点 M （即坐标为 (x, y) 的点）和它对应。也就是说，坐标平面内的点与有序实数对是一一对应的。



探究

如图 14.1-7, 正方形 $ABCD$ 的边长为 6, 如果以点 A 为原点, AB 所在直线为 x 轴, 建立平面直角坐标系, 那么 y 轴是哪条线? 写出正方形的顶点 A, B, C, D 的坐标.

请另建立一个平面直角坐标系, 这时正方形的顶点 A, B, C, D 的坐标又分别是什么? 与同学们交流一下.

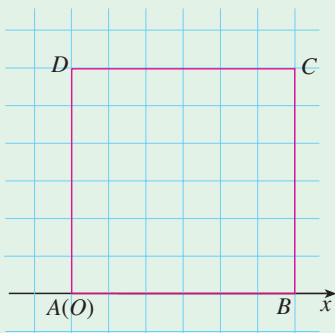
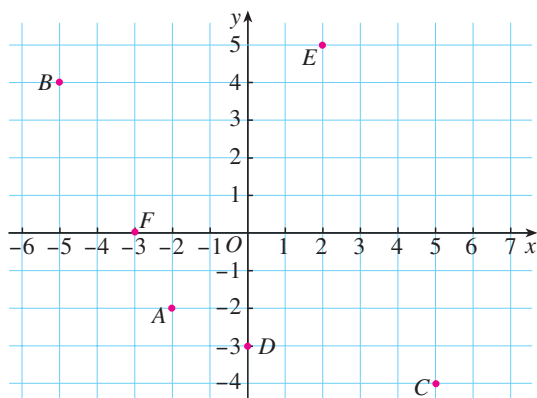


图 14.1-7

练习

1. 写出图中点 A, B, C, D, E, F 的坐标.



(第 1, 2 题)

2. 在图中描出下列各点:

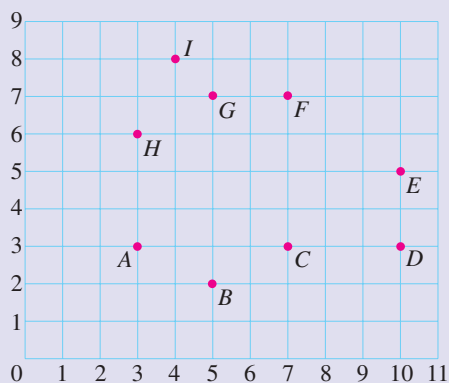
$L(-5, -3), M(4, 0), N(-6, 2), P(5, -3.5), Q(0, 5), R(6, 2)$.

习题 14.1

复习巩固

1. 如图, 写出表示下列各点的有序数对:

A (__, __); B (5, 2); C (__, __); D (__, __); E (__, __); F (__, __);
 G (__, __); H (__, __); I (__, __).

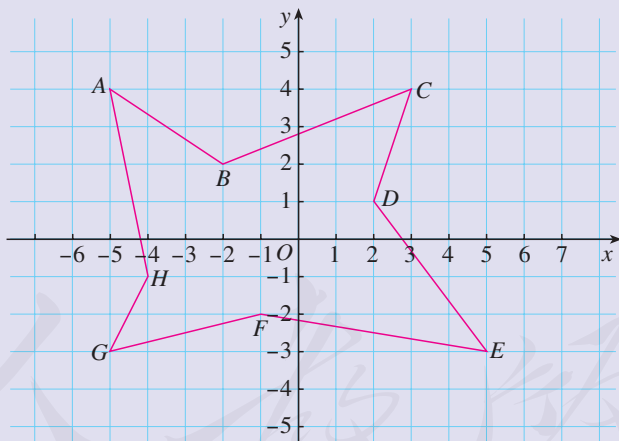


(第1题)

2. 根据点所在的位置, 用“+”“-”填表.

点的位置	横坐标符号	纵坐标符号
在第一象限	+	+
在第二象限		
在第三象限		
在第四象限		

3. 如图, 写出其中标有字母的各点的坐标, 并指出它们的横坐标和纵坐标.



(第3题)

4. 在平面直角坐标系中, 描出下列各点:

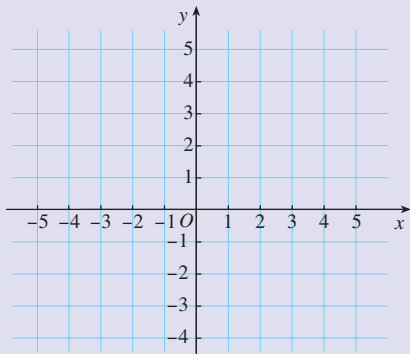
- 点 A 在 y 轴上, 位于原点上方, 距离原点 2 个单位长度;
- 点 B 在 x 轴上, 位于原点右侧, 距离原点 1 个单位长度;
- 点 C 在 x 轴上方, y 轴右侧, 距离每条坐标轴都是 2 个单位长度;
- 点 D 在 x 轴上, 位于原点右侧, 距离原点 3 个单位长度;

点 E 在 x 轴上方, y 轴右侧, 距离 x 轴 2 个单位长度, 距离 y 轴 4 个单位长度. 依次连接这些点, 你能得到什么图形?

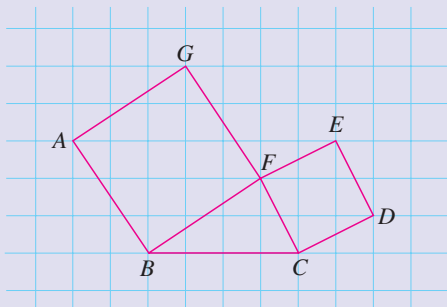
5. 如图, 在所给的坐标系中描出下列各点:

$A(-4, -4)$, $B(-2, -2)$, $C(3, 3)$, $D(5, 5)$, $E(-3, -3)$, $F(0, 0)$.

这些点有什么关系? 你能再找出一些类似的点吗?



(第 5 题)



(第 6 题)

6. 如图, 建立平面直角坐标系, 使点 B, C 的坐标分别为 $(0, 0)$ 和 $(4, 0)$, 写出点 A, D, E, F, G 的坐标, 并指出它们所在的象限.

综合运用

7. 在平面直角坐标系中描出下列各组点, 并将各组内的点用线段依次连接起来.

(1) $(-5, 0)$, $(-4, 3)$, $(-3, 0)$, $(-2, 3)$, $(-1, 0)$, $(-5, 0)$;

(2) $(2, 1)$, $(6, 1)$, $(6, 3)$, $(7, 3)$, $(4, 6)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(2, 1)$.

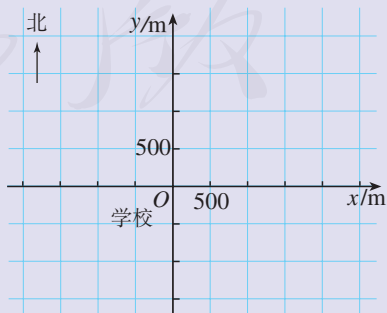
观察得到的图形, 你觉得它们像什么? 求出所得到图形的面积.

8. 建立一个平面直角坐标系, 描出点 $A(-2, 4)$, $B(3, 4)$, 画直线 AB . 若点 C 为直线 AB 上的任意一点, 则点 C 的纵坐标是什么? 想一想:

(1) 如果一些点在平行于 x 轴的直线上, 那么这些点的纵坐标有什么特点?

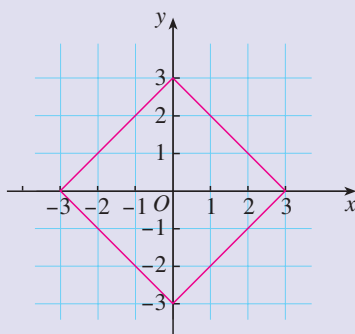
(2) 如果一些点在平行于 y 轴的直线上, 那么这些点的横坐标有什么特点?

9. 李强同学家在学校以东 1 000 m 再往北 1 500 m 处, 张明同学家在学校以西 2 000 m 再往南 500 m 处, 王玲同学家在学校以南 1 500 m 处. 如图, 在坐标系 (规定一个单位长度代表 1 m 长) 中画出这三位同学家的位置, 并用坐标表示出来.



(第 9 题)

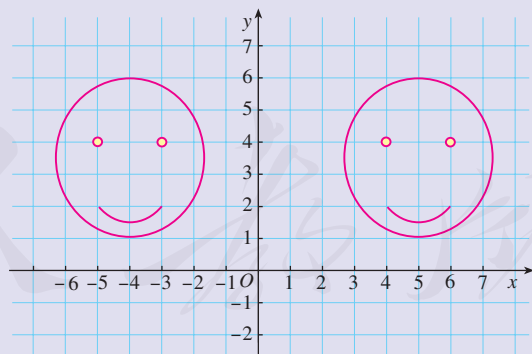
10. 在平面直角坐标系中选择一些横、纵坐标满足下面条件的点，标出它们的位置，看看它们在第几象限或哪条坐标轴上：
- (1) 点 $P(x, y)$ 的坐标满足 $xy > 0$;
 - (2) 点 $P(x, y)$ 的坐标满足 $xy < 0$;
 - (3) 点 $P(x, y)$ 的坐标满足 $xy = 0$.
11. 图中正方形（实线）四条边上横坐标、纵坐标都为整数的点有几个？写出它们的坐标.



(第 11 题)

拓广探索

12. 设计一个容易用它的顶点坐标描绘出来的图形，把这些坐标告诉你的同学，看看他能否画出你所设计的图形.
13. 如图，右图是由左图平移后得到的图形，找几对特殊的对应点，分别写出它们的坐标，你能发现什么规律吗？



(第 13 题)

14. 已知点 $O(0, 0)$, $B(1, 2)$, 点 A 在坐标轴上, 且 $S_{\triangle OAB} = 2$, 求满足条件的点 A 的坐标.

用经纬度表示地理位置

怎样表示地理位置呢？通过地球上的经度和纬度，人们可以确定一个地点在地球上的位置。

不管在地球仪上、还是在各种地图上都布满了细线网，这就是经线和纬线。地图上水平方向的线是纬线，它们用度（°）来表示地理纬度。赤道上所有的点是0°纬度，北极对应北纬90°，南极对应南纬90°。北京位于北纬39.9°，但仅用纬度确定北京的位置还是不够的，还需要第二个坐标——经度。

地图上竖直方向的线是经线，它们也用度（°）来表示地理经度。经过英国格林尼治（Greenwich）天文台的经线是初始经线（0°经度）。它东面的所有点有东经度值（从0°到180°），西面的点有西经度值。例如北京位于东经116.4°，再加上北京位于北纬39.9°，就能确定北京在地球上的位置了。

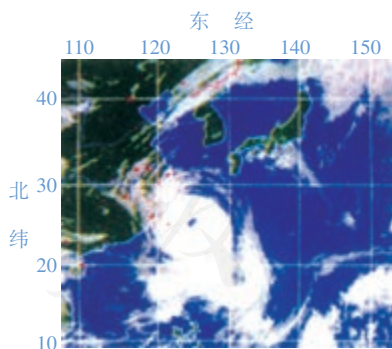
由于地球可近似地看作一个球体，所以经线和纬线在地球表面构成一个坐标网。经线沿东西方向分布，纬线沿南北方向分布。指明一点的经度和纬度，就可以确定这一点在地球上的位置。

以下是某气象台发布的一次热带风暴的风暴中心位置的一些信息：

9月25日16时：北纬17.9°，东经119.4°。

9月27日11时：北纬21.4°，东经118.6°。

右图是利用经纬度画出的地图的一部分，你能在它上面找到这次热带风暴的风暴中心在上述两个时刻的位置吗？



14.2 平面直角坐标系的简单应用

14.2.1 用坐标表示地理位置



思考

不管是出差办事，还是出去旅游，人们都愿意带上一幅地图，它给人们出行带来了很大方便. 如图 14.2-1，这是北京市地图的一部分，你知道怎样用坐标表示地理位置吗？



图 14.2-1



探究

根据以下条件画一幅示意图，标出学校和小刚家、小强家、小敏家的位置.

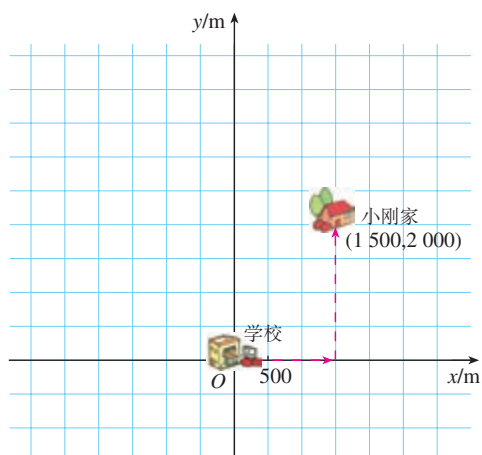
小刚家：出校门向东走 1 500 m，再向北走 2 000 m.

小强家：出校门向西走 2 000 m，再向北走 3 500 m，最后向东走 500 m.

小敏家：出校门向南走 1 000 m，再向东走 3 000 m，最后向南走 750 m.

如图 14.2-2，选学校所在位置为原点，分别以正东、正北方向为 x 轴、 y 轴正方向建立平面直角坐标系，规定一个单位长度代表 1 m 长. 依题目所给条件，点 (1 500, 2 000) 就是小刚家的位置.

类似地，请你在图 14.2-2 上画出小强家、小敏家的位置，并标明它们的坐标.



选取学校所在
位置为原点，并以
正东、正北方向为
 x 轴、 y 轴正方向
有什么优点？

图 14.2-2



归纳

利用平面直角坐标系绘制区域内一些地点分布情况平面图的过程如下：

- (1) 建立坐标系，选择一个适当的参照点为原点，确定 x 轴、 y 轴的正方向；
- (2) 根据具体问题确定单位长度；
- (3) 在坐标平面内画出这些点，写出各点的坐标和各个地点的名称.

我们知道，通过建立平面直角坐标系，可以用坐标表示平面内点的位置. 还有其他方法吗？



思考

如图 14.2-3，一艘船在 A 处遇险后向相距 35 n mile 位于 B 处的救生船报警，如何用方向和距离描述救生船相对于遇险船的位置？救生船接到报警后准备前往救援，如何用方向和距离描述遇险船相对于救生船的位置？

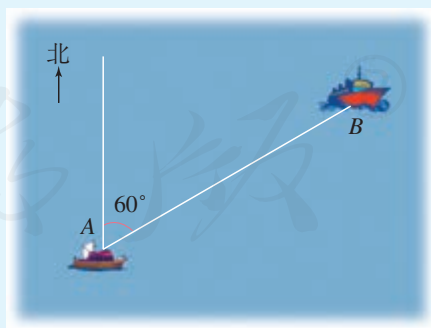


图 14.2-3

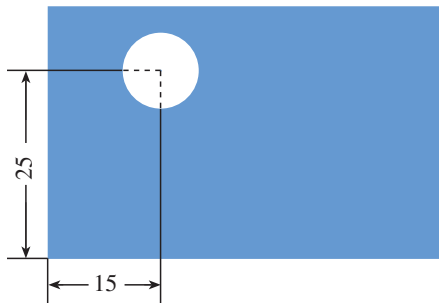
由图 14.2-3 可知，救生船在遇险船北偏东 60° 的方向上，与遇险船的距离是 35 n mile，用北偏东 60° ，35 n mile 就可以确定救生船相对于遇险船的位置.

反过来, 用南偏西 60° , 35 n mile 就可以确定遇险船相对于救生船的位置.

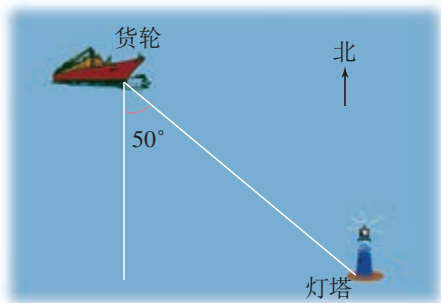
一般地, 可以建立平面直角坐标系, 用坐标表示地理位置. 此外, 还可以用方向和距离表示平面内物体的位置.

练习

1. 长方形零件如图 (单位: mm), 建立适当的坐标系, 用坐标表示孔心的位置.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图, 货轮与灯塔相距 40 n mile, 如何用方向和距离描述灯塔相对于货轮的位置? 反过来, 如何用方向和距离描述货轮相对于灯塔的位置?

14.2.2 用坐标表示平移

在平面直角坐标系中, 对一个图形进行平移, 图形上点的位置发生了变化, 坐标也发生了变化.



探究

如图 14.2-4, 将点 $A(-2, -3)$ 向右平移 5 个单位长度, 得到点 A_1 , 在图上标出这个点, 并写出它的坐标. 观察坐标的变化, 你能从中发现什么规律吗? 把点 A 向上平移 4 个单位长度呢? 把点 A 向左或向下平移呢?

再找几个点, 对它们进行平移, 观察它们的坐标是否按你发现的规律变化.

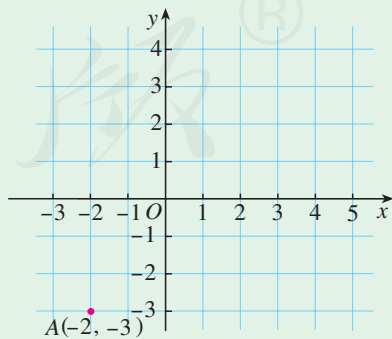


图 14.2-4

一般地，在平面直角坐标系中，将点 (x, y) 向右（或左）平移 a 个单位长度，可以得到对应点 $(x+a, y)$ （或 $(x-a, y)$ ）；将点 (x, y) 向上（或下）平移 b 个单位长度，可以得到对应点 $(x, y+b)$ （或 $(x, y-b)$ ）。



探究

如图 14.2-5，正方形 $ABCD$ 四个顶点的坐标分别是 $A(-2, 4)$ ， $B(-2, 3)$ ， $C(-1, 3)$ ， $D(-1, 4)$ ，将正方形 $ABCD$ 向下平移 7 个单位长度，再向右平移 8 个单位长度，两次平移后四个顶点相应变为点 E, F, G, H ，它们的坐标分别是什么？如果直接平移正方形 $ABCD$ ，使点 A 移到点 E ，它和我们前面得到的正方形位置相同吗？

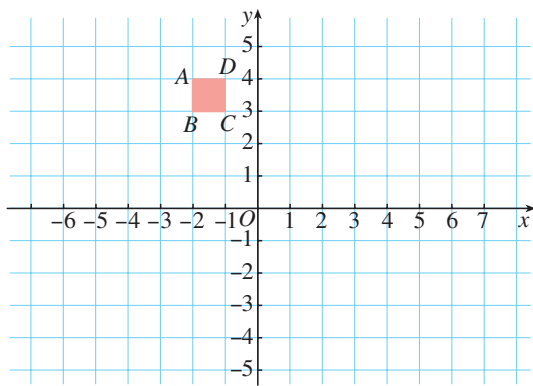


图 14.2-5

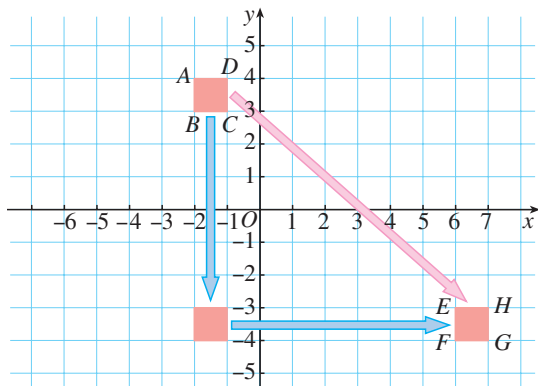


图 14.2-6

可求出点 E, F, G, H 的坐标分别是 $(6, -3)$ ， $(6, -4)$ ， $(7, -4)$ ， $(7, -3)$ 。如果直接平移正方形 $ABCD$ ，使点 A 移到点 E ，它和我们前面得到的正方形位置相同（图 14.2-6）。

一般地，将一个图形依次沿两个坐标轴方向平移所得到的图形，可以通过将原来的图形作一次平移得到。

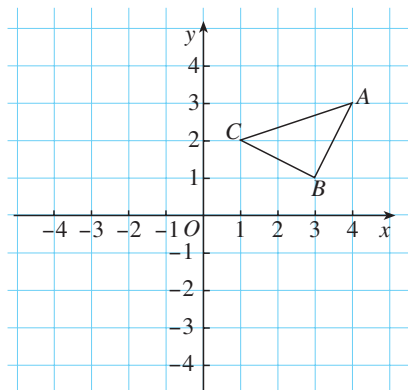
对一个图形进行平移，这个图形上所有点的坐标都要发生相应的变化；反过来，从图形上的点的坐标的某种变化，我们也可以看出对这个图形进行了怎样的平移。

例 如图 14.2-7 (1)，三角形 ABC 三个顶点的坐标分别是 $A(4, 3)$ ， $B(3, 1)$ ， $C(1, 2)$ 。

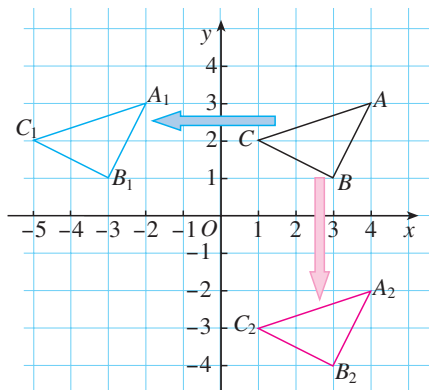
(1) 将三角形 ABC 三个顶点的横坐标都减去 6，纵坐标不变，分别得到

点 A_1, B_1, C_1 ，依次连接 A_1, B_1, C_1 各点，所得三角形 $A_1B_1C_1$ 与三角形 ABC 的大小、形状和位置有什么关系？

(2) 将三角形 ABC 三个顶点的纵坐标都减去 5，横坐标不变，分别得到点 A_2, B_2, C_2 ，依次连接 A_2, B_2, C_2 各点，所得三角形 $A_2B_2C_2$ 与三角形 ABC 的大小、形状和位置有什么关系？



(1)



(2)

图 14.2-7

解：如图14.2-7 (2)，所得三角形 $A_1B_1C_1$ 与三角形 ABC 的大小、形状完全相同，三角形 $A_1B_1C_1$ 可以看作将三角形 ABC 向左平移 6 个单位长度得到. 类似地，三角形 $A_2B_2C_2$ 与三角形 ABC 的大小、形状完全相同，它可以看作将三角形 ABC 向下平移 5 个单位长度得到.



思考

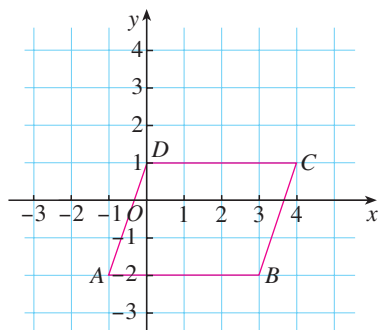
(1) 如果将这个问题中的“横坐标都减去 6”“纵坐标都减去 5”相应地变为“横坐标都加 3”“纵坐标都加 2”，分别能得出什么结论？画出得到的图形.

(2) 如果将三角形 ABC 三个顶点的横坐标都减去 6，同时纵坐标都减去 5，能得到什么结论？画出得到的图形.

一般地，在平面直角坐标系内，如果把一个图形各个点的横坐标都加（或减去）一个正数 a ，相应的新图形就是把原图形向右（或向左）平移 a 个单位长度；如果把它各个点的纵坐标都加（或减去）一个正数 a ，相应的新图形就是把原图形向上（或向下）平移 a 个单位长度.

练习

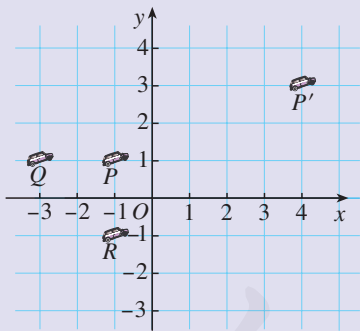
如图，将平行四边形 $ABCD$ 向左平移 2 个单位长度，然后再向上平移 3 个单位长度，可以得到平行四边形 $A'B'C'D'$ ，画出平移后的图形，并指出其各个顶点的坐标。



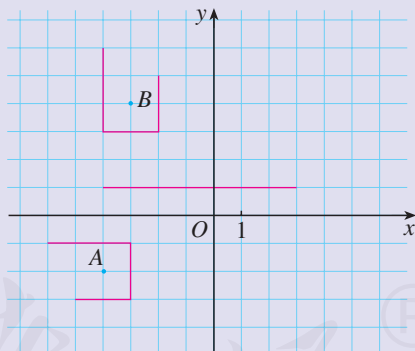
习题 14.2

复习巩固

- 如图，三辆汽车 P , Q , R 保持编队行驶，分别写出它们的坐标。当汽车 P 行驶到 P' 位置时，汽车 Q , R 行驶到了什么位置？分别写出这三辆汽车新位置的坐标。

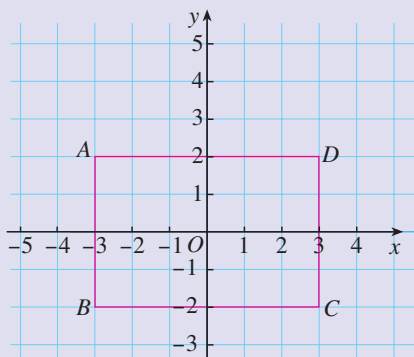


(第 1 题)

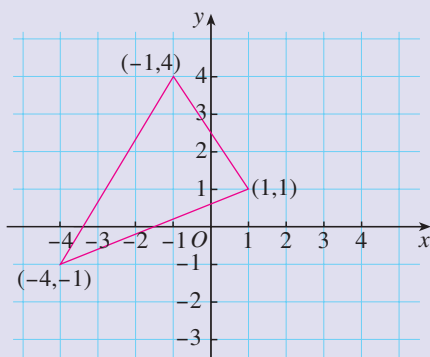


(第 2 题)

- 如图，机械手要将一个工件从图中 A 处移动到 B 处，但是这个工件不能碰到图中的红色障碍，试用坐标写出一条机械手在移动中可能要走过的路线。
- 如图，长方形 $ABCD$ 四个顶点分别是 $A(-3, 2)$, $B(-3, -2)$, $C(3, -2)$, $D(3, 2)$ 。将长方形向左平移 2 个单位长度，各个顶点的坐标变为什么？将它向上平移 3 个单位长度呢？分别画出平移后的图形。



(第3题)

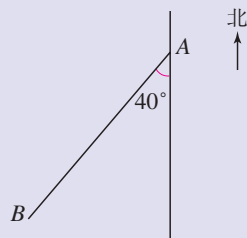


(第4题)

4. 选择题. 如图, 将三角形向右平移 2 个单位长度, 再向上平移 3 个单位长度, 则平移后三个顶点的坐标是 ().
- (A) (2, 2), (3, 4), (1, 7) (B) (-2, 2), (4, 3), (1, 7)
- (C) (-2, 2), (3, 4), (1, 7) (D) (2, -2), (3, 3), (1, 7)
5. 如图, 这是一所学校的平面示意图, 建立适当的平面直角坐标系, 并用坐标表示教学楼、图书馆、校门、实验楼、国旗杆的位置. 类似地, 你能用坐标表示你自己学校各主要建筑物的位置吗?



(第5题)

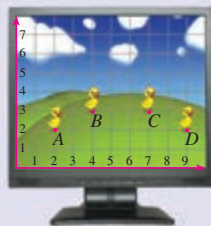


(第6题)

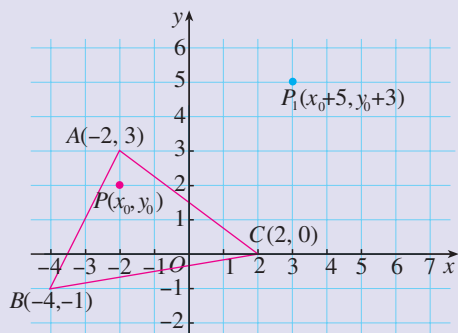
6. 如图, 在一次活动中, 位于 A 处的 1 班准备前往相距 5 km 的 B 处与 2 班会合, 如何用方向和距离描述 2 班相对于 1 班的位置? 反过来, 如何用方向和距离描述 1 班相对于 2 班的位置?

综合运用

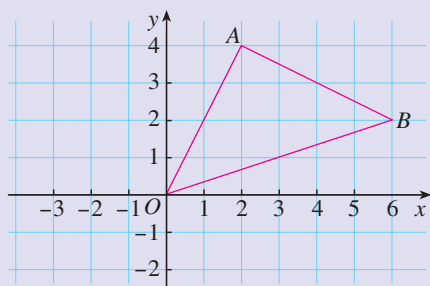
7. 制作动画片时, 经常要用到图形的平移. 如图, 小鸭子从 A 到 B, 再到 C, 到 D, 这几个过程中, 分别进行了怎样的平移?
8. 如图, 三角形 ABC 中任意一点 $P(x_0, y_0)$ 经平移后对应点为 $P_1(x_0 + 5, y_0 + 3)$, 将三角形 ABC 作同样的平移得到三角形 $A_1B_1C_1$. 求 A_1, B_1, C_1 的坐标.



(第7题)



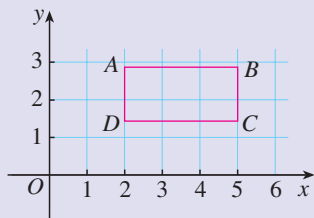
(第 8 题)



(第 9 题)

9. 如图, 三角形 AOB 中, A, B 两点的坐标分别为 $(2, 4), (6, 2)$, 求三角形 AOB 的面积. (提示: 三角形 AOB 的面积可以看作一个长方形的面积减去一些小三角形的面积.)

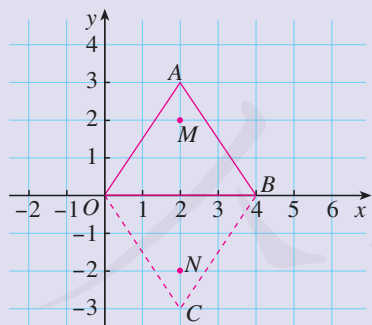
10. 如图, 长方形 $ABCD$ 四个顶点的坐标分别是 $A(2, 2\sqrt{2}), B(5, 2\sqrt{2}), C(5, \sqrt{2}), D(2, \sqrt{2})$. 将这个长方形向下平移 $2\sqrt{2}$ 个单位长度, 得到长方形 $A'B'C'D'$. 求长方形 $A'B'C'D'$ 四个顶点的坐标.



(第 10 题)

拓展探索

11. 如图, 三角形 COB 是由三角形 AOB 经过某种变换后得到的图形, 观察点 A 与点 C 的坐标之间的关系. 三角形 AOB 内任意一点 M 的坐标为 (x, y) , 点 M 经过这种变换后得到点 N , 点 N 的坐标是什么?



(第 11 题)



(第 12 题)

12. 如图, 这是一个利用平面直角坐标系画出的某动物园的示意图, 如果这个坐标系分别以正东、正北方向为 x 轴、 y 轴的正方向, 并且猴山和狮虎山的坐标分别是 $(2, 1)$ 和 $(8, 2)$. 你能在此图上标出熊猫馆 $(6, 6)$ 的位置吗?



数学活动

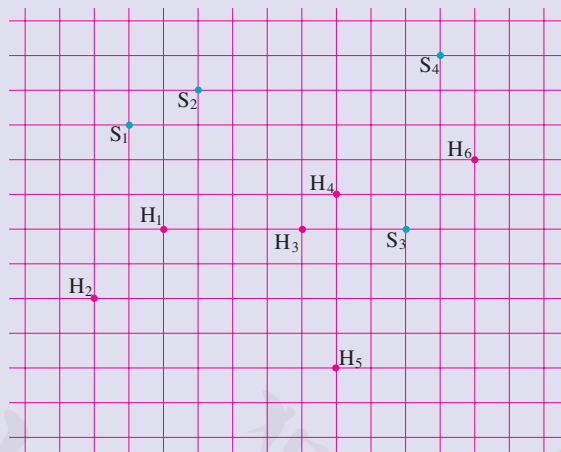
活动1

近年来,园林部门为了对古树名木进行系统养护,建立了相关的地理信息系统,其中重要的一条就是要确定这些树的位置.

如下图,某小区有树龄百年以上的古松树4棵(S_1, S_2, S_3, S_4),古槐树6棵($H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6$).为了加强对古树的保护,园林部门将4棵古松树的位置用坐标表示为 $S_1(3, 9)$, $S_2(5, 10)$, $S_3(11, 6)$, $S_4(12, 11)$.



类似地,你能在下图中把6棵古槐树的位置也用坐标表示出来吗?



请以小组的形式完成下面的活动:

- (1) 收集一些当地古树名木的资料,特别是有关它们具体位置的记载,并为它们编号;
- (2) 建立适当的平面直角坐标系,为上述树木绘制一幅平面分布图;
- (3) 你也可以收集一些校园或自己家附近有代表性的建筑,绘制出相关的平面分布图.

活动2

春天到了，七（2）班组织同学到人民公园春游，张明、李华对着景区示意图（图1）如下描述牡丹园的位置（图中小正方形的边长代表100 m长）。

张明：“牡丹园的坐标是（300，300）。”

李华：“牡丹园在中心广场东北方向约420 m处。”



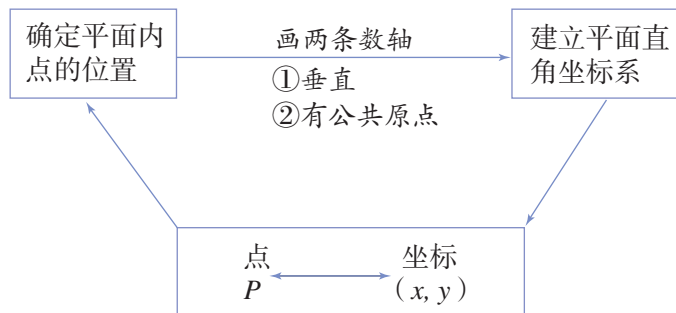
图1

实际上，他们所说的位置都是正确的。你知道张明同学是如何在景区示意图上建立坐标系的吗？你理解李华同学所说的“东北方向约420 m处”的含义吗？

用他们的方法，你能描述公园内其他景点的位置吗？与同学们交流一下。

小 结

一、本章知识结构图



二、回顾与思考

本章我们通过具体实例学习了平面直角坐标系等知识，应用坐标方法解决了一些简单问题.

建立平面直角坐标系后，对于坐标平面内任意一点 M ，都有唯一的一对有序实数 (x, y) 和它对应；反过来，对于任意一对有序实数 (x, y) ，在坐标平面内都有唯一的点 M 和它对应. 这样，我们就可以数形结合地研究问题.

坐标方法有广泛的应用. 例如，我们可以利用坐标描述一些地点的分布情况；还可以通过直角坐标系中对应点的坐标之间的关系，研究图形平移等问题. 这种用数和运算来研究几何问题的方法是非常重要的，今后我们将不断地看到它的应用.

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧.

1. 在日常生活中，我们可以用有序数对来描述物体的位置. 以教室中座位位置为例，说明有序数对 (x, y) 和 (y, x) 是否相同以及为什么.

2. 平面直角坐标系由两条互相垂直且有公共原点的数轴组成. 请你举例说明如何建立平面直角坐标系，在直角坐标平面内描出点 $P(2, 4)$ 和原点的位置，并指出点 P 和原点的横坐标和纵坐标.

平面直角坐标系的两条坐标轴将平面分成 I, II, III, IV 四个部分，这四个部分依次称为第一象限、第二象限、第三象限和第四象限. 请你在直角坐标平面内描出点 $A(2, 1)$, $B(-2, 1)$, $C(-2, -1)$, $D(2, -1)$ 的位置，并说明它们所在的象限.

3. 平面直角坐标系具有广泛的应用，请你举例说明它的应用.

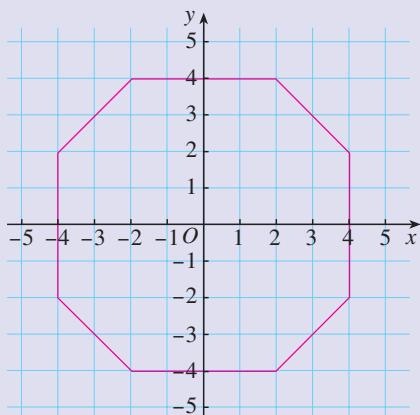
复习题 14

复习巩固

1. 指出下列各点的横坐标和纵坐标, 并指出各点所在的象限.

$$A(2, 3), B(-2, 3), C(-2, -3), D(2, -3).$$

2. 如图, 写出八边形各顶点的坐标.



(第 2 题)

3. 在同一平面直角坐标系中描出下列各组点, 并将各组内的点用线段依次连接起来.

(1) $(2, 0), (4, 0), (2, 2), (2, 0)$;

(2) $(0, 2), (0, 4), (-2, 2), (0, 2)$;

(3) $(-4, 0), (-2, -2), (-2, 0), (-4, 0)$;

(4) $(0, -2), (2, -2), (0, -4), (0, -2)$.

观察所得的图形, 你觉得它像什么?

4. 图中标明了李明家附近的一些地方.



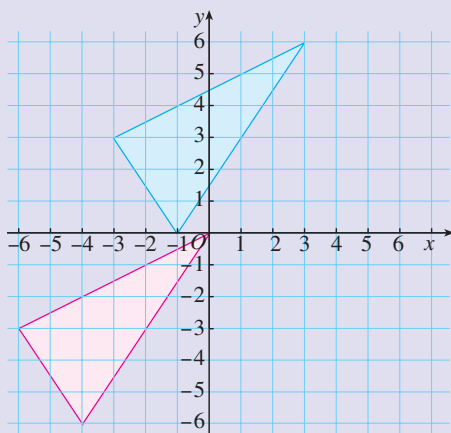
(第 4 题)

(1) 写出书店和邮局的坐标；

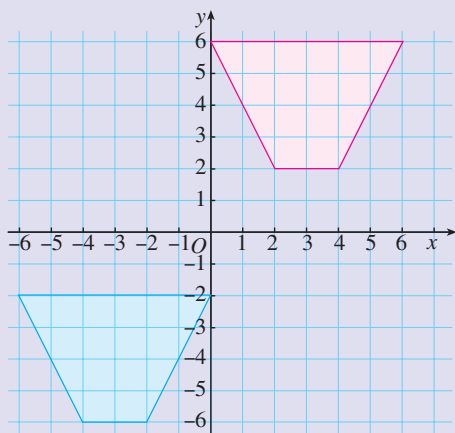
(2) 某星期日早晨，李明同学从家里出发，沿 $(-100, 200)$, $(100, 0)$, $(200, 100)$, $(200, -200)$, $(-100, -200)$, $(0, -100)$ 的路线转了一下，又回到家里，写出他路上经过的地方；

(3) 连接他在 (2) 中经过的地点，你能得到什么图形？

5. 如图，红色图形可以由蓝色图形经过怎样的平移得到？对应点的坐标有什么变化？



(1)



(2)

(第 5 题)

综合运用

6. (1) 坐标 $(x, 3)$ 中的 x 取 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 所表示的点是否在一条直线上？这条直线与 x 轴有什么关系？

(2) 坐标 $(3, y)$ 中的 y 取 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 所表示的点是否在一条直线上？这条直线与 x 轴有什么关系？

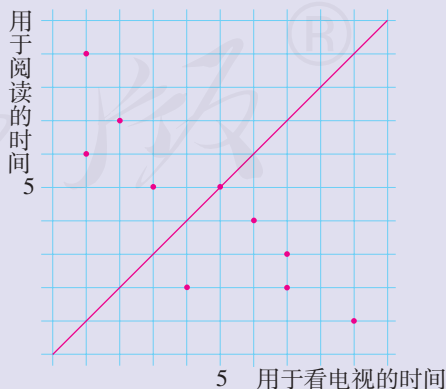
7. 图中显示了 10 名学生平均每周用于阅读课外书的时间和用于看电视的时间（单位：h）.

(1) 用有序数对表示图中各点.

(2) 图中有一个点位于方格的对角线上，这表示什么意思？

(3) 图中方格纸的对角线的左上方的点有什么共同的特点？它右下方的点呢？

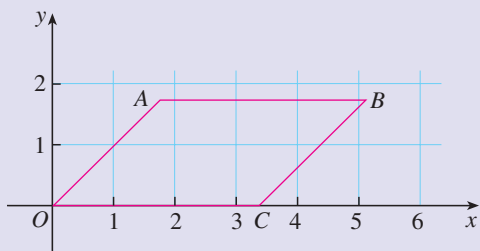
(4) 估计一下你每周用于阅读课外书的时间和用于看电视的时间，在图上描出来，这个点位于什么位置？



(第 7 题)

8. 某村过去是一个缺水的村庄，由于兴修水利，现在家家户户都用上了自来水. 据村委会主任徐伯伯讲，以前全村 400 多户人家只有五口水井：第一口在村委会的院子里，第二口在村委会北偏东 30° 方向 2 000 m 处，第三口在村委会正西方向 1 500 m 处，第四口在村委会东南方向 1 000 m 处，第五口在村委会正南方向 900 m 处. 请你根据徐伯伯的话，和同学们一起讨论，画图表示这个村庄五口水井的位置.

9. 如图，平行四边形 $ABCO$ 四个顶点的坐标分别是 $A(\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $B(3\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $C(2\sqrt{3}, 0)$, $O(0, 0)$. 将这个平行四边形向左平移 $\sqrt{3}$ 个单位长度，得到平行四边形 $A'B'C'O'$. 求平行四边形 $A'B'C'O'$ 四个顶点的坐标.



(第 9 题)

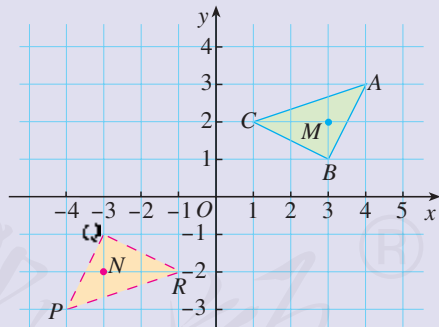
拓展探索

10. 建立平面直角坐标系，并描出下列各点：

$A(1, 1)$, $B(5, 1)$, $C(3, 3)$, $D(-3, 3)$, $E(1, -2)$, $F(1, 4)$, $G(3, 2)$, $H(3, -2)$, $I(-1, -1)$, $J(-1, 1)$.

连接 AB , CD , EF , GH , IJ , 找出它们中点的坐标，将上述中点的横坐标和纵坐标分别与对应线段的两个端点的横坐标和纵坐标进行比较，你发现它们之间有什么关系？写出你的发现，并与其他同学进行交流.

11. 如图，三角形 PQR 是三角形 ABC 经过某种变换后得到的图形，分别写出点 A 与点 P ，点 B 与点 Q ，点 C 与点 R 的坐标，并观察它们之间的关系. 三角形 ABC 内任意一点 M 的坐标为 (x, y) ，点 M 经过这种变换后得到点 N ，点 N 的坐标是什么？



(第 11 题)

部分中英文词汇索引

中文	英文	页码
方程	equation	3
一元一次方程	linear equation in one unknown	3
解	solution	4
邻补角	adjacent angles on a straight line	38
对顶角	opposite angles	38
垂直	perpendicular	39
垂线	perpendicular line	39
垂足	foot of a perpendicular	39
同位角	corresponding angles	42
内错角	alternate interior angles	42
同旁内角	interior angles on the same side	42
平行	parallel	47
命题	proposition	56
定理	theorem	57
证明	proof	57
平移	translation	65
算术平方根	arithmetic square root	76
被开方数	radicand	76
平方根	square root	81
开平方	extraction of square root	81
立方根	cube root	85
开立方	extraction of cube root	85
根指数	radical exponent	86
无理数	irrational number	89
实数	real number	89

有序数对	ordered pair	101
平面直角坐标系	rectangular coordinate system	102
x 轴	x -axis	102
y 轴	y -axis	102
坐标	coordinate	102
象限	quadrant	103

人教版®

后 记

本册教科书是人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心依据教育部《义务教育数学课程标准（2011年版）》编写的，经国家基础教育课程教材专家工作委员会2013年审查通过。

本册教科书集中反映了基础教育教科书研究与实验的成果，凝聚了参与课改实验的教育专家、学科专家、教研人员以及一线教师的集体智慧。我们感谢所有对教科书的编写、出版提供过帮助与支持的同仁和社会各界朋友。

本册教科书出版之前，我们通过多种渠道与教科书选用作品（包括照片、画作）的作者进行了联系，得到了他们的大力支持。对此，我们表示衷心的感谢！但仍有部分作者未能取得联系，恳请入选作品的作者与我们联系，以便支付稿酬。

我们真诚地希望广大教师、学生及家长在使用本册教科书的过程中提出宝贵意见，并将这些意见和建议及时反馈给我们。让我们携起手来，共同完成义务教育教材建设工作！

联系方式

电 话：010-58758322

电子邮箱：jcfk@pep.com.cn

人 教 版[®]

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心
2013年5月



YIWU JIAOYU JIAOKESHU
SHUXUE

数学

七年级 上册

人教版®



绿色印刷产品

ISBN 978-7-107-26213-1



9 787107 262131 >